

10. Voiman tekemä työ

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 10.1.

Oikeat vastaukset:

- a) B
- b) A
- c) B
- d) C
- e) A
- f) B

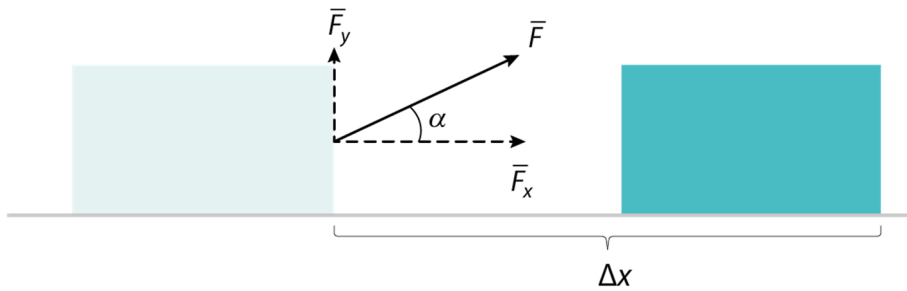
Tehtävä 10.2.

Siirtymä $\Delta x = 2,0 \text{ m}$

Vetävä voima $F = 15 \text{ N}$

- a) Voima on siirtymän suuntainen, joten vetävän voiman tekemä työ on $W = F\Delta x = 15 \text{ N} \cdot 2,0 \text{ m} = 30 \text{ J}$.
- b) Vain siirtymän suuntainen voiman komponentti tekee työtä. Kun voima on siirtymään nähden kohtisuora, on siirtymän suuntainen voiman komponentti 0. Tällöin myös voiman tekemä työ on 0.

c) Siirtymän ja vetävän voiman välinen kulma $\alpha = 60^\circ$



Siirtymän suuntainen voiman komponentti \vec{F}_x tekee työtä. Voiman vaakasuuntainen komponentti voidaan ratkaista trigonometrian avulla.

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \text{ eli } F_x = F \cos \alpha$$

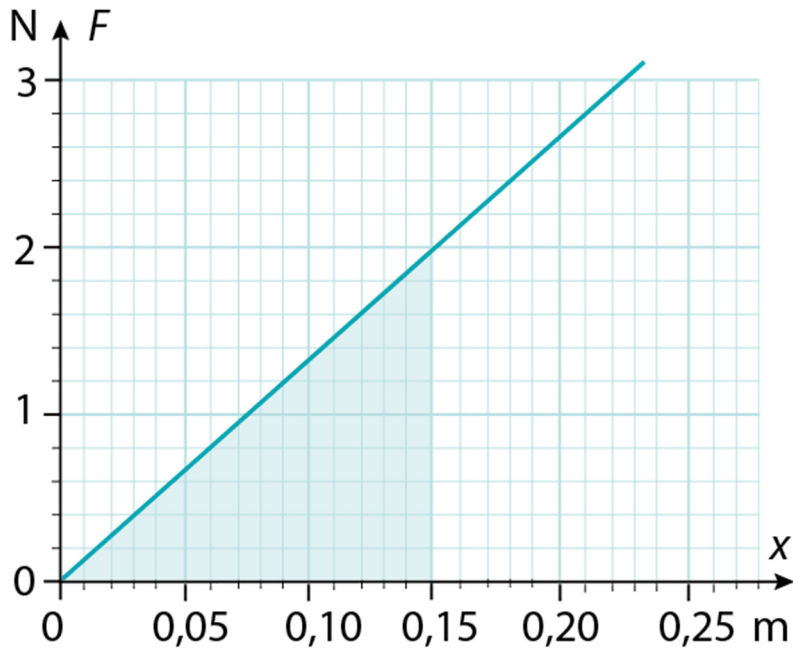
Työ saadaan, kun kerrotaan voiman siirtymän suuntainen komponentti F_x siirtymällä Δx .

Voiman tekemä työ on

$$W = F \Delta x \cos \alpha = 15 \text{ N} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot \cos 60^\circ = 15 \text{ J.}$$

Tehtävä 10.3.

Koska työ on voiman ja matkan tulo, voiman tekemä työ saadaan (x, F) -koordinaatistoon piirretyn kuvaajan ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-alan avulla.



$$\text{Voiman tekemä työ on } W = \frac{2,0\text{N} \cdot 0,15\text{m}}{2} = 0,15\text{J}.$$

Tehtävä 10.4.

Pianon massa $m = 193 \text{ kg}$

Nostokorkeus $h = 1,3 \text{ m}$

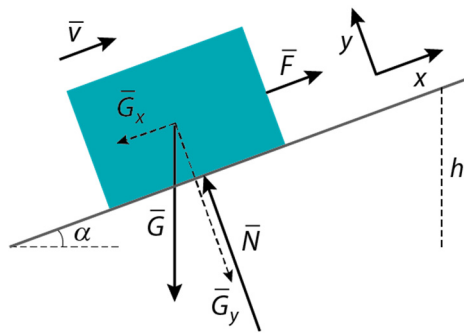
Putoamiskiihtyvyyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

a) Kun piano etenee vakionopeudella $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Nostamiseen tarvittava voima on silloin yhtä suuri kuin pianon paino

$$F = G = mg = 193 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 1\,893,33 \text{ N} \approx 1,9 \text{ kN}.$$

b) Kaltevan tason pituus $s = 3,0 \text{ m}$

Piirretään voimakuvio.



\bar{G} = pianon paino

\bar{F} = pianon vetämiseen tarvittava voima

\bar{N} = tason tukivoima

Tason kaltevuuskulma on

$$\sin \alpha = \frac{h}{s}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{h}{s} \right).$$

Tarkastellaan tason suuntaisia voimia, kun piano vedetään vakionopeudella kaltevaa tasoa pitkin.

Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Valitaan voiman F suunta positiiviseksi.

Voiman suuruus on

$$F - G_x = 0$$

$$F = G \sin \alpha = mg \sin \alpha = mg \frac{h}{s}$$

$$= 193 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1,3 \text{ m}}{3,0 \text{ m}}$$

$$= 820,443 \text{ N} \approx 820 \text{ N}.$$

Tehtävä 10.5.

Vaiheessa 1 tukin kulkema matka $s_1 = 0,50 \text{ m}$

Vaiheessa 1 tukkiin kohdistuva voima $F_1 = 880 \text{ N}$

Vaiheessa 2 tukin kulkema matka $s_2 = 8,3 \text{ m}$

Vaiheessa 2 tukkiin kohdistuva voima $F_2 = 620 \text{ N}$

Tukkiin kohdistuva liikettä vastustava voima $F_3 = 620 \text{ N}$

a) Vaijerin jännitysvoiman tekemä työ on

$$W = F_1 s_1 + F_2 s_2 = 880 \text{ N} \cdot 0,50 \text{ m} + 620 \text{ N} \cdot 8,3 \text{ m} = 5586 \text{ J} \approx 5,6 \text{ kJ}.$$

b) Kaikkien tukkiin vaikuttavien voimien tekemien töiden summa on

$$\begin{aligned} \Sigma W &= W_1 + W_2 - W_3 = F_1 s_1 + F_2 s_2 - F_3 (s_1 + s_2) \\ &= 880 \text{ N} \cdot 0,50 \text{ m} + 620 \text{ N} \cdot 8,3 \text{ m} - 620 \text{ N} \cdot (8,3 \text{ m} + 0,50 \text{ m}) = 130 \text{ J}. \end{aligned}$$

Tehtävä 10.6.

Pyöräilijän kulkema matka $s = 390 \text{ m}$

Pyöräilijän nopeus $v = 11,4 \text{ m/s}$

Pyöräilijän teho $P = 249 \text{ W}$

Koska pyöräilijä liikkuu vakionopeudella, on vastusvoimien oltava yhtä suuret kuin pyöräilijää eteenpäin vievät voimat. Pyöräilijän voiman aiheuttama teho on $P = Fv$, missä F on vastusvoimien suuruus. Vastusvoimien suuruudeksi saadaan

$$F = \frac{P}{v}.$$

Vastusvoimien tekemä työ on

$$W = Fs = \frac{P}{v}s = \frac{Ps}{v} = \frac{249 \text{ W} \cdot 390 \text{ m}}{11,4 \text{ m/s}} = 8518,42 \text{ J} \approx 8,52 \text{ kJ}.$$

Tehtävä 10.7.

Liuskan pituus $s = 6,3 \text{ m}$

Nousukorkeus $h = 0,50 \text{ m}$

Pyörätuolin ja asiakkaan massa $m = 87 \text{ kg}$

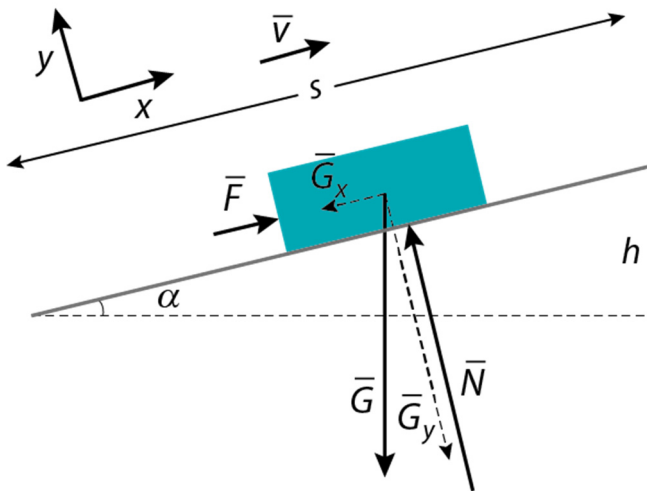
Putoamiskiihtyvyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

- a) Kun asiakas työnnetään kirjastoon, hän siirtyy pystysuunnassa 50 cm. Tällöin tehty työ on yhtä suuri kuin painovoimaa vastaan tehty työ

$$W = Gh = mgh$$

$$= 87 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,50 \text{ m} = 426,735 \text{ J} \approx 430 \text{ J}.$$

b) Hahmotellaan tilanteesta yksinkertaistettu voimakuvio.
Ei huomioida mitään vastusvoimia.



\bar{G} = pyörätuolin ja asiakkaan paino

\bar{N} = luiskan tukivoima

\bar{F} = työntävä voima

Kun pyörätuoli etenee vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = \bar{0}$.

Tason suunnassa

$$F - G_x = 0$$

$$F = mg \sin \alpha.$$

Kuvan perusteella saadaan $\sin \alpha = \frac{h}{s}$.

Työntämiseen tarvittava voima on

$$F = mg \frac{h}{s} = \frac{mgh}{s} = \frac{87 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,50 \text{ m}}{6,3 \text{ m}} = 67,7357 \text{ N} \approx 68 \text{ N}.$$

c) Mitä pidempi luiska on, sitä suurempi on matka s . Tarkastellaan työntämiseen tarvittavaa voimaa. Edellisen b-kohdan perusteella $F = mg\frac{h}{s}$, joten voima ja matka ovat kääntäen verrannollisia. Mitä suurempi on matka s , sitä pienempi on työntämiseen tarvittava voima F .

Jos vierimisvastusta ei huomioida, on työntämisessä tehty työ koko ajan sama, vaikka luiskan kaltevuus muuttuisi, sillä $W = Fs = F = mg\frac{h}{s} \cdot s = mgh$.

Työ $W = mgh$ pysyy koko ajan samana, sillä se riippuu ainoastaan korkeudesta ja massasta, jotka tilanteessa eivät muutu. Tehty työ varastoituu pyörätuolin ja asiakkaan potentiaalienergiaksi.

Sovella

Tehtävä 10.8.

Juoksumatka $s = 48 \text{ m}$

Nopeus $v = 0,52 \text{ m/s}$

Kuntoilijan massa $m = 61 \text{ kg}$

Portaiden kaltevuus $\alpha = 18^\circ$

Hyötysuhde $\eta = 0,21$

Putoamiskiihtyvyyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

- a) Kun kuntoilija juoksee juoksuportaita, muuttuu hänen paikkansa pystysuunnassa. Tällöin tehty työ on yhtä suuri kuin painovoimaa vastaan tehty työ

$$W = Gh = mgh$$

Määritetään nousukorkeus juoksun aikana

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$

$$h = s \sin\alpha.$$

Nousuun tehty työ

$$W = mgh = mg s \sin\alpha$$

$$= 61 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 48 \text{ m} \cdot \sin 18^\circ = 8876,1 \text{ J} \approx 8,9 \text{ kJ}.$$

b) Keskimääräinen nousuteho saadaan energian muutoksen avulla.

$$\text{Nousuteho on } P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W}{t}.$$

Koska juoksija etenee likimain vakionopeudella, saadaan juoksuajaksi

$$s = vt$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Keskimääräinen nousuteho on

$$\begin{aligned} P &= \frac{W}{\frac{s}{v}} = \frac{vW}{s} = \frac{vmgss \sin \alpha}{s} = vmg \sin \alpha \\ &= 0,52 \text{ m/s} \cdot 61 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 18^\circ \\ &= 96,1578 \text{ W} \approx 96 \text{ W}. \end{aligned}$$

c) Hyötysuhteen avulla ihmisen tarvitsema energia nousuun on a-kohdan tulosta apuna käyttäen

$$\eta = \frac{W}{E}$$

$$E = \frac{W}{\eta}$$

$$= \frac{mg \sin \alpha}{\eta}$$

$$= \frac{61 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 48 \text{ m} \cdot \sin 18^\circ}{0,21}$$

$$= 42267,1679 \text{ J} \approx 42 \text{ kJ.}$$

Tehtävä 10.9.

Kiihdytysaika $t = 4,1 \text{ s}$

Loppunopeus $v = 6,2 \text{ m/s}$

Potkulautailijan ja laudan massa $m = 81 \text{ kg}$

- a) Potkulautailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.
Lautailijan nopeus on aluksi nolla.

Lautailijan kiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} = \frac{6,2 \text{ m/s}}{4,1 \text{ s}} = 1,512 \text{ m/s}^2 \approx 1,5 \text{ m/s}^2.$$

- b) Pyöräilijää eteenpäin vievä voima on Newtonin II lain mukaan

$$F = ma = \frac{mv}{t} = \frac{81 \text{ kg} \cdot 6,2 \text{ m/s}}{4,1 \text{ s}} = 122,4878 \text{ N} \approx 120 \text{ N}.$$

c) Lautailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin kiihdytysmatka saadaan tasaisesti kiihtyvän liikkeen matkan ja nopeuden yhtälön perusteella

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$v = at$, josta

$$s = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\frac{v}{t}} = \frac{vt}{2}.$$

Eteenpäin vievän voiman tekemä työ

$$W = Fs = mas = \frac{mv \frac{vt}{2}}{t} = \frac{mv^2}{2} = \frac{81 \text{ kg} \cdot (6,2 \text{ m/s})^2}{2} = 1556,82 \text{ J} \approx 1,6 \text{ kJ}.$$

Tehtävä 10.10.

$$\text{Auton nopeus } v = 79 \text{ km/h} = \frac{79 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}$$

$$\text{Kitkakerroin } \mu = 0,27$$

$$\text{Auton massa } m = 1420 \text{ kg}$$

a) Eturenkaiden päällä oleva auton massa $m_1 = 0,58m$

Auto etenee vaakasuoralla tiellä vakionopeudella, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Silloin

$$N = G = mg \text{ ja}$$

$$F_\mu = \mu N = \mu m_1 g = 0,58 \mu mg$$

$$= 0,58 \cdot 0,27 \cdot 1420 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ 181 N} \approx 2,2 \text{ kN.}$$

b) Auton kulkema matka $s = 850 \text{ m}$

Koska auto etenee vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan vastusvoimien suuruus yhtä suuri kuin eteenpäin vievien voimien suuruus.

Tällöin vastusvoimien tekemä työ on

$$\begin{aligned} W &= Fs = F_{\mu} s = 0,58 \mu m g s \\ &= 0,58 \cdot 0,27 \cdot 1420 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 850 \text{ m} \\ &= 1854248,9 \text{ J} \approx 1,9 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

c) Kitka liikuttaa autoa teholla $P = F_{\mu} v$.

a-kohdan mukaan saadaan kitkan autoa liikuttavaksi tehoksi

$$\begin{aligned} P &= 0,58 \mu m g v \\ &= 0,58 \cdot 0,27 \cdot 1420 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{79 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \\ &= 47871 \text{ W} \approx 48 \text{ kW}. \end{aligned}$$

Tehtävä 10.11.

Kuljettu matka $s = 4,6 \text{ km}$

Kävelynopeus $v = 3,1 \text{ km/h}$

Elimistön teho kävelyssä $P = 290 \text{ W}$

Juoksunopeus $v = 9,8 \text{ km/h}$

Elimistön teho juoksussa $P = 700 \text{ W}$

a) Eteenpäin vievä voima saadaan tehon avulla

$$P = Fv \text{ eli } F = \frac{P}{v}.$$

$$\text{Kävelyssä: } F = \frac{P}{v} = \frac{290 \text{ W}}{\frac{3,1 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} = 336,77 \text{ N} \approx 340 \text{ N}$$

$$\text{Juoksussa: } F = \frac{P}{v} = \frac{700 \text{ W}}{\frac{9,8 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} = 257,14 \text{ N} \approx 260 \text{ N}$$

b) Tarvittava energia saadaan voiman tekemän työn avulla,

$$E = W = Fs = \frac{P}{v} s.$$

Kävelyssä:

$$\begin{aligned} E &= \frac{P}{v} s = \frac{290 \text{ W}}{\frac{3,1 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} \cdot 4600 \text{ m} \\ &= 1549161 \text{ J} \approx 1,5 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Juoksussa:

$$\begin{aligned} E &= \frac{P}{v} s = \frac{700 \text{ W}}{\frac{9,8 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} \cdot 4600 \text{ m} \\ &= 1182857,14 \text{ J} \approx 1,2 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Tehtävä 10.12.

Vetokulma $\alpha = 40^\circ$

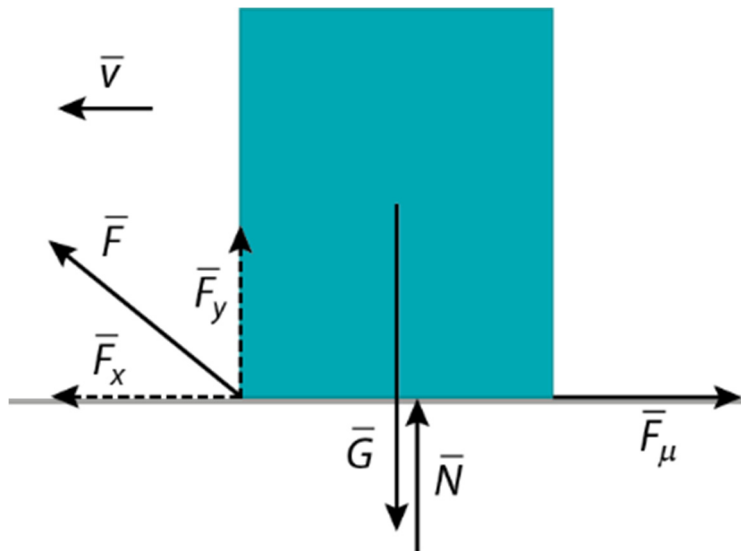
Kaapin massa $m = 120 \text{ kg}$

Maton ja lattian välinen kitkakerroin $\mu = 0,18$

Kaappia siirretty matka $s = 2,4 \text{ m}$

Putoamiskiihtyvyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

a) Esitetään kaappiin vaikuttavat voimat



\bar{G} = kaapin paino

\bar{N} = lattian tukivoima

\bar{F}_μ = liukukitka

\bar{F} = vetävä voima

Kun kaappi liikkuu vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Liikkeyhtälöt vaaka- ja pystysuunnassa

$$F_x - F_\mu = 0$$

$$N + F_y - G = 0.$$

Kun esitetään voiman F komponentit kulman α avulla ja kirjoitetaan kitkalle $F_\mu = \mu N$, saadaan

$$F \cos \alpha = \mu N$$

$$N = G - F \sin \alpha.$$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään ja ratkaistaan F .

$$F \cos \alpha = \mu(mg - F \sin \alpha)$$

$$F \cos \alpha = \mu mg - \mu F \sin \alpha$$

$$F \cos \alpha + \mu F \sin \alpha = \mu mg$$

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Tällöin kitka on

$$\begin{aligned} F_\mu &= F \cos \alpha = \frac{\mu mg \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \\ &= \frac{0,18 \cdot 120 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ + 0,18 \cdot \sin 40^\circ} \\ &= 184,09 \text{ N} \approx 180 \text{ N}. \end{aligned}$$

b) Kun kaappia siirretään matka s vakionopeudella, on kaapin siirtämisen suunnassa tehty työ yhtä suuri kuin kitkan tekemä työ.

$$\begin{aligned} W &= F_x s = F_\mu s = \frac{\mu mg \cos \alpha s}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \\ &= \frac{0,18 \cdot 120 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 40^\circ \cdot 2,4 \text{ m}}{\cos 40^\circ + 0,18 \cdot \sin 40^\circ} \\ &= 441,8 \text{ J} \approx 440 \text{ J}. \end{aligned}$$

c) Elimistön elintoiminnot tarvitsevat myös energiaa, jolloin elintoimintoihin ja siirtämiseen tarvitaan enemmän energiaa kuin vain siirtämiseen tarvittavaan työhön.

Tehtävä 10.13.

Matka $s = 8,2 \text{ m}$

Nousuaika $t = 17,0 \text{ s}$

Nostoteho $P = 7,8 \text{ kW} = 7\,800 \text{ W}$

a) Palkki liikkuu vakionopeudella, jolloin palkin nopeus on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{8,2 \text{ m}}{17,0 \text{ s}} = 0,482 \text{ m/s} \approx 0,48 \text{ m/s}.$$

b) Nosturin nostoteho $P = Gv = mgv$. a-kohdan mukaan nopeus ja teräspalkin massa voi olla

$$m = \frac{Pt}{gs} = \frac{7800 \text{ W} \cdot 17,0 \text{ s}}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 8,2 \text{ m}} = 1648 \text{ kg} \approx 1600 \text{ kg}.$$

Tehtävä 10.14.

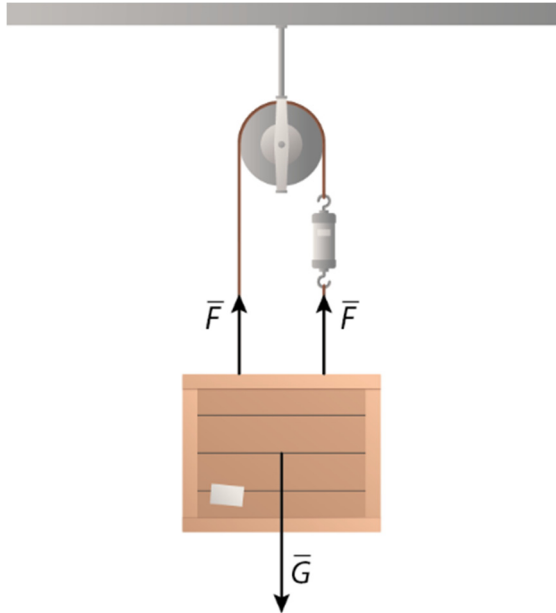
- a) Opiskelijan väkipyörässä olevaan köyteen kohdistama voima välittyy nostettavaan kappaleeseen. Opiskelija pystyy nostamaan oman painonsa suuruisen kappaleen. Tällöin opiskelija pystyy nostamaan $m = 84 \text{ kg}$ tai

$$G = mg = 84 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 824,04 \text{ N} \approx 820 \text{ N} \text{ suuruisen kuorman.}$$

b) Kuorman massa $m = 6,4 \text{ kg}$

Putoamiskiihtyvyyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



\bar{G} = punnuksen paino

\bar{F} = narun punnuksen kohdistama voima

Kun kuorma on paikoillaan, Newtonin II lain mukaan

$$\sum \bar{F} = \bar{0}.$$

Suunnat huomioituna $F + F - G = 0$.

Voima-anturin lukema on

$$F = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{6,4 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{2} = 31,392 \text{ N} \approx 31 \text{ N}.$$

c) Kuorman massa $m = 18 \text{ kg}$

Väkipyörässä oleva naru muuttaa vain voiman suuntaa, joten kulma, millä narusta vedetään ei vaikuta voiman suuruuteen. Narussa vaikuttava voima on yhtä suuri kuin kuorman paino

$$F = G = mg = 18 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 176,58 \text{ N} \approx 180 \text{ N}.$$

Tehtävä 10.15.

Nostomatka $s = 2,8 \text{ m}$

Säkin massa $m_1 = 25 \text{ kg}$

Lavan massa $m_2 = 2,9 \text{ kg}$

Säkin nopeus $v = 0,32 \text{ m/s}$

Putoamiskiihtyvyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

- a) Kun säkki liikkuu vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Köydestä on tällöin vedettävä voimalla

$$\begin{aligned} F &= G_1 + G_2 = m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) g \\ &= (25 \text{ kg} + 2,9 \text{ kg}) \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 273,699 \text{ N} \approx 270 \text{ N}. \end{aligned}$$

b) Säkin nostamisessa tehdään painovoimaa vastaan työtä.
Säkin nostamisessa tehty työ on

$$\begin{aligned} W &= G_1s + G_2s = m_1gs + m_2gs = (m_1 + m_2)gs \\ &= (25 \text{ kg} + 2,9 \text{ kg}) \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 2,8 \text{ m} = 766,3572 \text{ J} \approx 770 \text{ J}. \end{aligned}$$

c) Säkkiä nostetaan teholla

$$\begin{aligned} P &= Fv = (m_1 + m_2)gv \\ &= (25 \text{ kg} + 2,9 \text{ kg}) \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,32 \text{ m/s} = 87,58 \text{ W} \approx 88 \text{ W}. \end{aligned}$$

Tehtävä 10.16.

Putoamiskiihtyvyyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Lintulaudan massa $m = 1,8 \text{ kg}$

Naru kestää voiman $F_j = 17 \text{ N}$

a) Lintulauta on paikoillaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Huomioidaan suunnat, jolloin

$$F + F - G = 0.$$

Narussa vaikuttava voima on

$$F = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,8 \text{ kg}}{2} = 8,829 \text{ N} = 8,8 \text{ N}.$$

Koska $F_j > F$, niin naru kestää.

b) Lintulauta on paikoillaan, jolloin Newtonin II lain mukaan

$$F - G = 0.$$

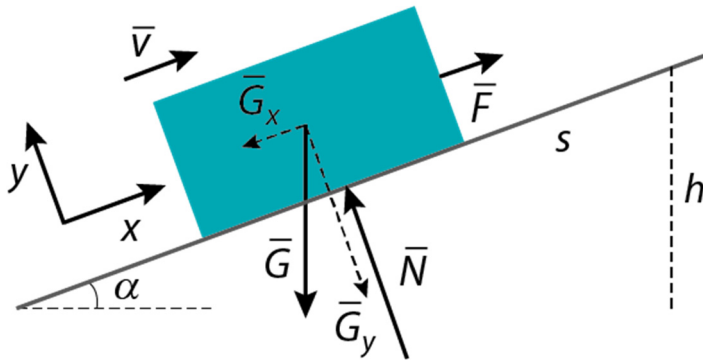
Narussa vaikuttava voima on

$$F = G = mg = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,8 \text{ kg} = 17,658 \text{ N} = 18 \text{ N}.$$

Koska $F_j < F$, niin naru ei kestä.

Tehtävä 10.17.

a) Tarkastellaan tilannetta voimakuviolla.



\vec{G} = kappaleen paino

\vec{F} = narun kappaleeseen kohdistama voima

s = vedettävän matkan pituus = kaltevan tason pituus

h = korkeus, jolle kappale vedetään

Kun kappaletta vedetään vakionopeudella pitkin kaltevaa tasoa, on Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Kun huomioidaan suunnat, saadaan

$$x\text{-suunnassa: } F - G_x = 0$$

$$y\text{-suunnassa: } N - G_y = 0.$$

Ylemmstä yhtälöstä saadaan

$$F = G_x = G \sin \alpha = G \frac{h}{s}.$$

Jos nostokorkeus h pysyy samana, niin mitä pidempi on kaltevan tason pituus s , sitä pienempi on vetämiseen tarvittava voima F .

- b) Jos vastusvoimia ei oteta huomioon, on nostamiseen tarvittava työ painovoimaa vastaan tehtyä työtä, joka ei riipu matkasta, vaan pelkästään nostokorkeudesta. Tällöin sanonta voisi olla: "Nostamisessa tehty työ ei riipu nostoreitistä, vaan ainoastaan nostokorkeudesta ja kappaleen painosta."
- c) Kun kitka huomioidaan, vaikuttaa tason ja kappaleen välillä kitkavoima. Tällöin pitää tehdä työtä myös kitkavoiman tekemän työn verran nostotyön lisäksi. Mitä pidempi on kaltevan tason pituus, sitä suurempi on kitkan tekemä työ. Sanonta ei siis pidä tällöin paikkaansa.

Tehtävä 10.18.

Kun nousee portaissa ylöspäin, tehdään painovoimaa vastaan työtä. Nousuteho pystysuunnassa on

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta mgh}{\Delta t}.$$

Elimistön toimintoihin tarvitaan energiaa, mikä lisää elimistön tehoa.

Tehtävä 10.19.

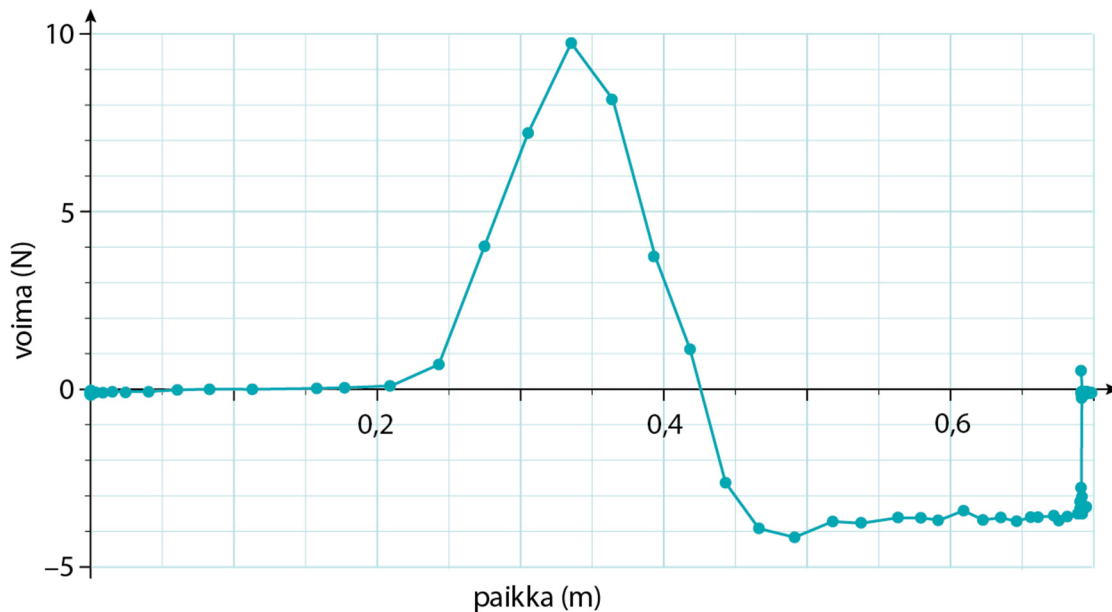
- a) Palikan painon tason suuntaisen komponentin suunta on sama kuin palikan liikkeen suunta. Palikan ja kiskon välisen kitkan suunta on palikan liikkeen suuntaan nähden vastakkainen.
- b) Koska palikka lähtee liikkeelle ja palikan nopeus kasvaa, palikan painon tason suuntainen komponentti on suurempi kuin kitka.

Voiman tekemä työ on $W = F\Delta x$. Mitä suurempi vaikuttava voima on, sitä suuremman työn se tekee. Nyt liikkeen suuntaisen voiman tekemä työ on suurempi kuin kitkan tekemä työ.

- c) Mitä jyrkemmin kisko on asetettu, sitä pienempi on tukivoima, jolla kisko tukee palikkaa. Kitkan suuruus riippuu tukivoimasta $F_{\mu} = \mu N$, joten kitka on sitä pienempi, mitä pienempi tukivoima on. Toisaalta jyrkkää tasoa pitkin palikka liukuu lyhyemmän matkan, koska lähtökorkeuden ja loppukorkeuden ero on joka liu'ussa yhtä suuri. Kitkan tekemä työ on $W = F_{\mu}\Delta x$, joten mitä jyrkempi taso on, sitä pienempi on kitkan tekemä työ.

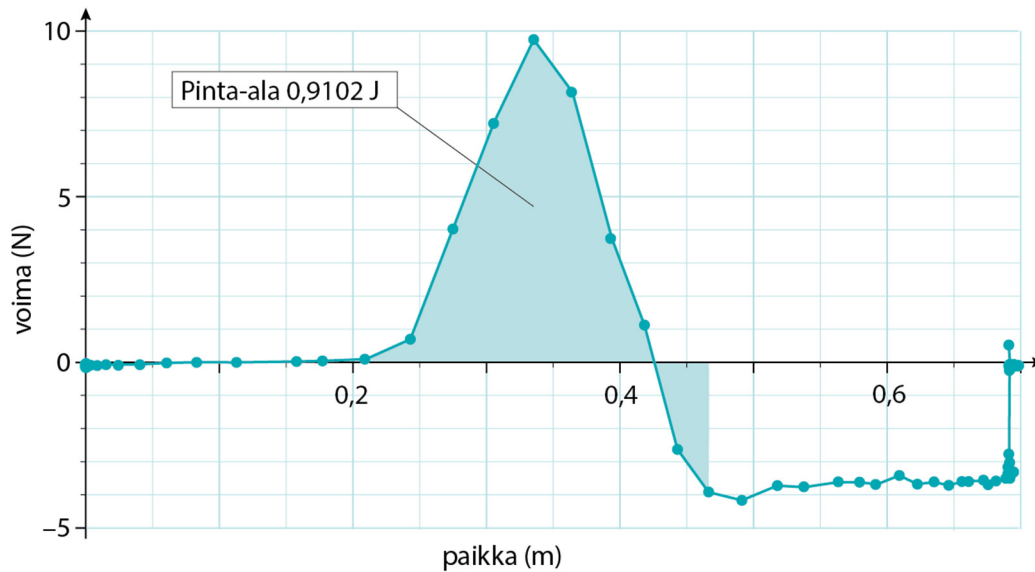
Tehtävä 10.20.

a)



b) Kokonaisvoiman tekemä työ saadaan (x, F) -koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. Alussa laatikon nopeus kasvaa, ja sen kiihtyvyys sekä siihen vaikuttava kokonaisvoima ovat positiivisia. Kun työntävä voima pienenee, kokonaisvoima muuttuu negatiiviseksi, ja laatikon liike alkaa hidastua. Kun voima ei enää muutu, käsi on irronnut laatikosta, ja laatikkoon vaikuttaa vain liikkeen suunnalle vastakkainen liukukitka.

Määritetään tämän alueen fysikaalinen pinta-ala.

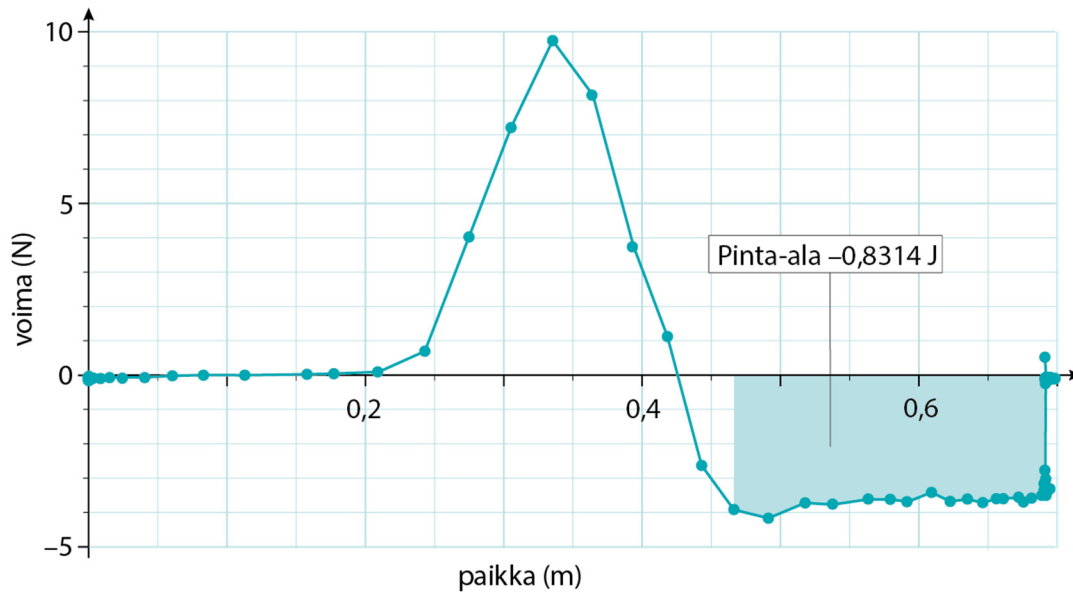


Tehty työ on $W = 0,9102 \text{ J} \approx 0,91 \text{ J}$.

Kokonaisvoima on summa kaikista laatikkoon vaikuttavista voimista. Pystysuunnassa laatikkoon vaikuttaa sen paino ja alustan tukivoima. Vaakasuunnassa laatikkoon vaikuttaa alussa käden työntävä voima ja koko liu'un ajan liukukitka.

Laatikkoa työntävän voiman tekemä työ on positiivinen ja kitkan tekemä työ on negatiivinen. Kokonaisvoiman tekemä työ on näiden töiden summa.

c) Kun laatikko on irronnut kädestä, laatikkoon vaikuttaa liikkeen suunnassa vain liukukitka (ilmanvastus voidaan olettaa merkityksettömäksi). Kitkan tekemä työ saadaan kuvaajan ja vaaka-akselin rajoittaman alueen fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään pinta-ala.



Kitkan tekemä työ, kun laatikko on irronnut kädestä
 $W = -0,8314 \text{ J} \approx -0,83 \text{ J}$.

Tehtävä 10.21.

Pulkan nopeus $v = 0,65 \text{ m/s}$

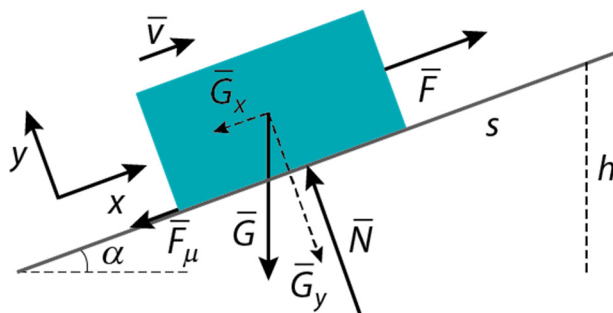
Kaltevan tason kulma $\alpha = 11^\circ$

Pulkkailijan massa $m = 15 \text{ kg}$

Liukukitkakerroin $\mu = 0,056$

Mäen korkeus $h = 3,5 \text{ m}$

a) Piirretään tilanteesta voimakuvio.



\vec{G} = kappaleen paino

\vec{F} = narun kappaleeseen kohdistama voima

\vec{F}_μ = pulkan ja mäen välinen liukukitka

Kun pulkkailijaa vedetään vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Kun huomioidaan suunnat, saadaan

$$x\text{-suunnassa: } F - G_x - F_\mu = 0$$

$$y\text{-suunnassa: } N - G_y = 0.$$

Esitetään voimien komponenttien kulmien avulla ja tarkastellaan vetävää voimaa.

$$x\text{-suunnassa: } F = G \sin \alpha + F_\mu$$

$$y\text{-suunnassa: } N = G \cos \alpha.$$

Kitkalle $F_\mu = \mu N$ ja $G = mg$. Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään, jolloin vetäväksi voimaksi saadaan

$$F = G \sin \alpha + \mu G \cos \alpha$$

$$= mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha$$

$$= mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$= 15 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (\sin 11^\circ + 0,056 \cdot \cos 11^\circ)$$

$$= 36,1665 \text{ N} \approx 36 \text{ N}.$$

b) Vetävän voiman tekemä työ on

$$\begin{aligned}W &= Fs = F \frac{h}{\sin\alpha} \\ &= \frac{mgh(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha} \\ &= \frac{15\text{ kg} \cdot 9,81\text{ m/s}^2 \cdot 3,5\text{ m} \cdot (\sin 11^\circ + 0,056 \cdot \cos 11^\circ)}{\sin 11^\circ} \\ &= 663,4011\text{ J} \approx 660\text{ J}.\end{aligned}$$

Syvennä

Tehtävä 10.22.

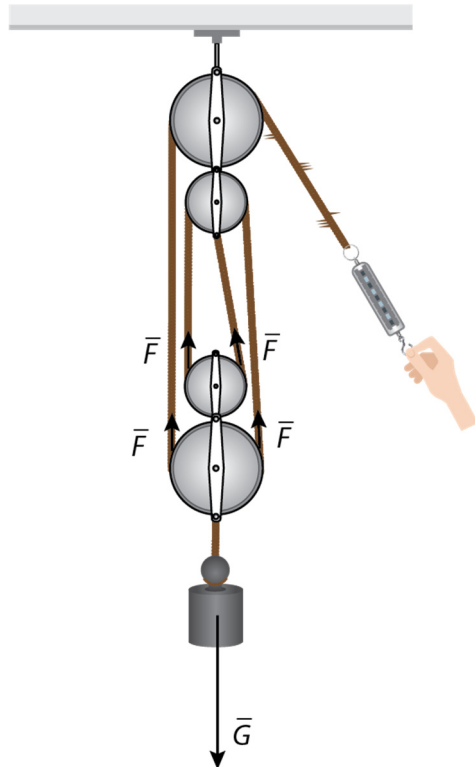
a) Punnuksen massa $m = 1,0 \text{ kg}$

Punnuksen siirtymä $h = 10 \text{ cm}$

Punnuksen paino jakautuu kuvan mukaisesti neljälle köydelle. Jousivaaka kannattelee systeemiä voimalla, joka on neljäsosa punnuksen painosta.

$$F = \frac{G}{4} = \frac{mg}{4} = \frac{1,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4} = 2,4525 \text{ N} \approx 2,5 \text{ N}$$

Jousivaa'an lukema on sama kuin köyden jännitysvoima eli 2,5 N.



\bar{G} = punnuksen paino

\bar{F} = köyden jännitysvoima

b) Nostamisessa tehty työ on

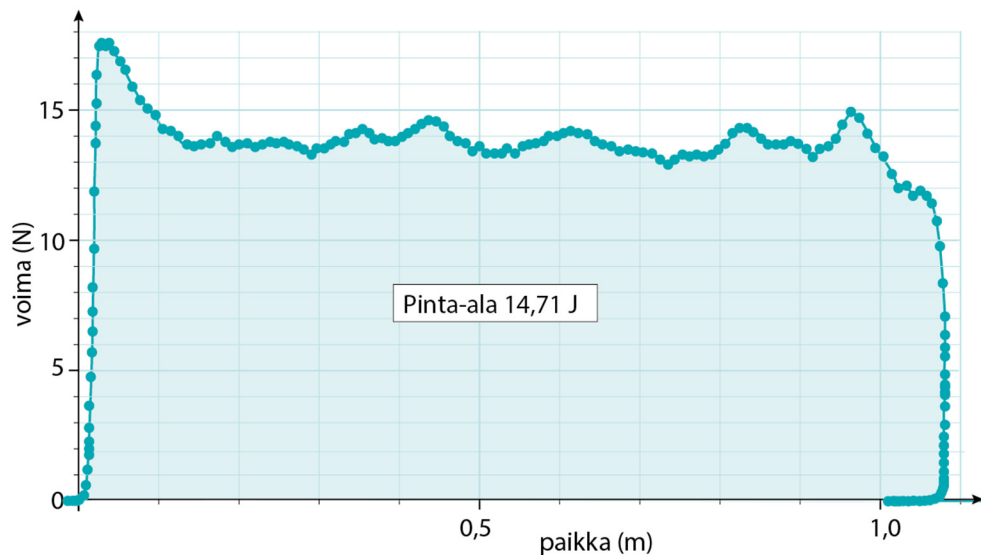
$W = Gh = Fs$, jossa s on langan vedon pituus

$$s = \frac{Gh}{F} = \frac{Gh}{\frac{G}{4}} = 4h = 4 \cdot 10 \text{ cm} = 40 \text{ cm}.$$

Tehtävä 10.23.

- a) Voiman tekemä työ saadaan, kun määritetään (x, F) -koordinaatistossa olevan kuvaajan ja akselin rajoittaman alueen fysikaalinen pinta-ala. (1 p)

Esitetään voima-anturin kappaleeseen kohdistama voima paikan suhteen eli kuvataan mittaustulokset (x, F) -koordinaatistossa. Määritetään kuvaajan ja akselin rajaaman alueen fysikaalinen pinta-ala.

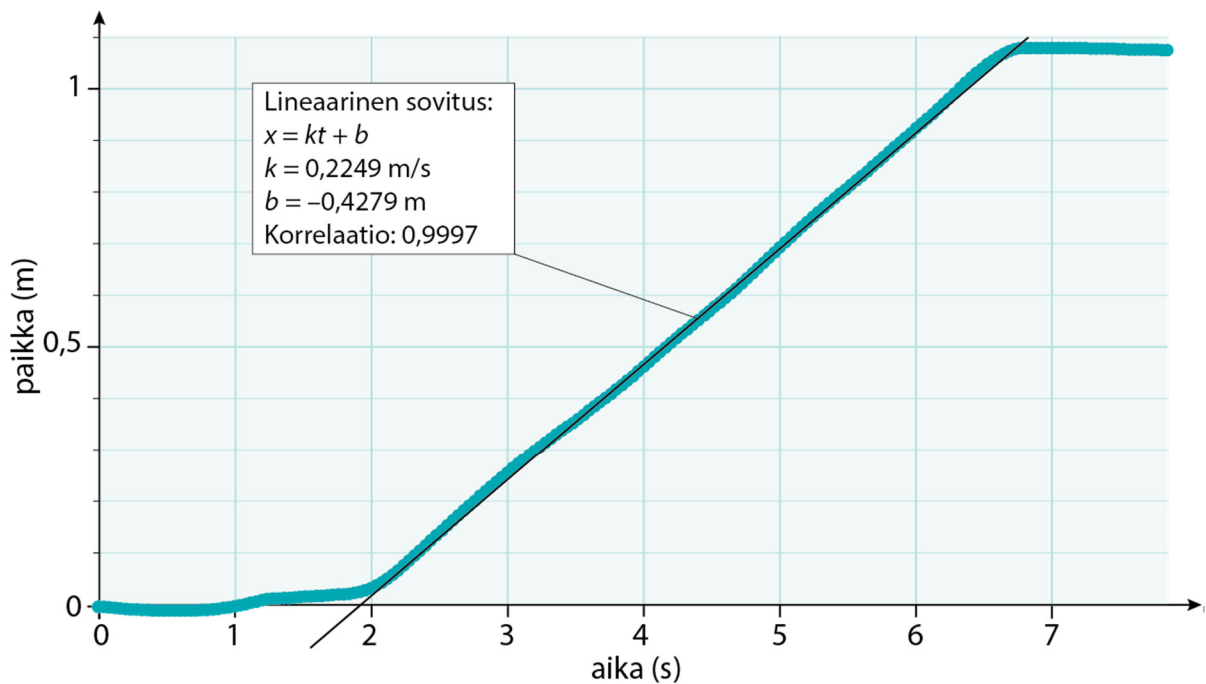


(kuvaajan akselit oikein päin 1 p,
mittauspisteet näkyvät kuvaajassa 1 p,
pinta-alan määrittäminen 1 p)

Voiman tekemä työ $W = 14,71 \text{ J} \approx 15 \text{ J}$. (1 p)

b) Kappaleen liikuttelemiseen tarvittava teho saadaan yhtälöllä $P = Fv$. (1 p)

Laaditaan mittaustuloksista kuvaaja (t, x) -koordinaatistoon. Kappale liikkuu vakionopeudella, kun kuvaaja on nouseva suora. Tutkitaan, millä aikavälillä kappale liikkui vakionopeudella ja määritetään sitten kappaleen nopeus (t, x) -koordinaatistossa kulkevan suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.



(kuvaaja 2 p, sovitus kuvaajan tasaisesti nousevaan osaan 1 p)

Kappaleen nopeus on $v = 0,2249 \text{ m/s}$.

Määritetään (x, F) -koordinaatistoon laaditusta kuvaajasta voimien keskiarvo tasaisen liikkeen ajalta. (1 p). Voiman keskiarvo eli vetovoima tasaisen liikkeen aikana on keskimäärin $F = 13,81 \text{ N}$. (1 p)

TAI

Valitaan (x, F) -koordinaatistoon laaditusta kuvaajasta voiman tasaisen liikkeen ajalta. Voiman arvo vetovoima tasaisen liikkeen aikana on $F = 13,81 \text{ N}$. (1 p)

Vetämiseen tarvittava teho

$$P = Fv = 13,81 \text{ N} \cdot 0,2249 \text{ m/s} = 3,105869 \text{ W} \approx 3,1 \text{ W}.$$

(1 p)

- c) Jos kappaletta olisi vedetty kallistettua pöytää pitkin ylöspäin, työ olisi ollut suurempi kuin vaakasuoran pöydän tapauksessa. (1 p)

Vetämiseen olisi tarvittu enemmän voimaa, sillä kappaleeseen olisi tällöin kohdistunut kitkan lisäksi myös kappaleen paino (1 p)

Koska matka olisi ollut yhtä pitkä sekä vaakasuoralla että kallistetulla pöydällä, myös vetävän voiman tekemä työ $W = F\Delta x$ olisi ollut myös suurempi. (1 p)