1 LASKUTOIMITUKSIA LUVUILLA

Laskutoimitukset luvuilla

1. a) $4 - 9 = -5$

b) $12 - (-3) = 12 + 3 = 15$

c) $-15 + 6 = -9$

d) $-4 + (-4) = -4 - 4 = -8$

e) $-7 - (-7) = -7 + 7 = 0$

f) $-5 - 13 + 10 = -18 + 10 = -8$

2. a) $9 \cdot (-5) = -45$

b) $-2 \cdot (-8) = 16$

c) $\dfrac{-72}{2} = -36$

d) $\dfrac{-60}{-15} = 4$

e) $100 : (-5) = -20$

f) $13 : (-13) = -1$

3. a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $(-5)^2 = -5 \cdot (-5) = 25$

c) $-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$

d) $6^1 = 6$

e) $1^6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

f) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

4. a) $5 + 6 \cdot 3 = 5 + 18 = 23$

b) $(5 + 6) \cdot 3 = 11 \cdot 3 = 33$

c) $-2 \cdot 4^2 = -2 \cdot 16 = -32$

d) $(-2 \cdot 6)^2 = (-12)^2 = -12 \cdot (-12) = 144$

e) $(-1)^8 = \underbrace{-1 \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{8\text{ kpl}} = 1$ (parillinen määrä negatiivisia tulon tekijöitä)

f) $(-1)^{17} = \underbrace{-1\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{17\text{ kpl}} = -1$ (pariton määrä negatiivisia tulon tekijöitä)

5. a) $\dfrac{4+16}{2} = (4+16):2 = 10$

b) $\dfrac{100}{5\cdot 4} = 100:(5\cdot 4) = 5$

c) $\dfrac{8+8}{5-3} = (8+8):(5-3) = 8$

6. a) väärin b) oikein c) väärin d) väärin e) oikein f) oikein

7. a) $\dfrac{5}{10}^{(5} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{16}{20}^{(4} = \dfrac{4}{5}$

c) $\dfrac{30}{35}^{(5} = \dfrac{6}{7}$

8. a) $\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{5}{7}$

b) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{3\cdot 2}{5\cdot 3} = \dfrac{6}{15}^{(3} = \dfrac{2}{5}$

c) $\dfrac{5}{6}:\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{1} = \dfrac{5\cdot 3}{6\cdot 1} = \dfrac{15}{6}^{(3} = \dfrac{5}{2} = 2\dfrac{1}{2}$

9. a) $^{3)}\dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{9} = \dfrac{3}{9} + \dfrac{7}{9} = \dfrac{10}{9} = 1\dfrac{1}{9}$

b) $2\dfrac{1}{6} - \dfrac{5}{12} = {}^{2)}\dfrac{13}{6} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{26}{12} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{21}{12}^{(3} = \dfrac{7}{4} = 1\dfrac{3}{4}$

c) $7\cdot\dfrac{2}{19} = \dfrac{7\cdot 2}{19} = \dfrac{14}{19}$

10. a) $4 \cdot (-2) + 1 = -8 + 1 = -7$

b) $4 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{4 \cdot 1}{3} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

11. a) -6

b) $\frac{4}{3}$

c) $|-8| = 8$

12. $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} = {}^{8)}\frac{1}{9} + {}^{9)}\frac{1}{8} = \frac{8}{72} + \frac{9}{72} = \frac{17}{72}$

13. $\frac{1+3}{2-(-6)} = \frac{4}{8}^{(4} = \frac{1}{2}$

14. Lavennetaan murtoluvut samannimisiksi.

${}^{9)}\frac{4}{7} = \frac{36}{63}$ ${}^{7)}\frac{5}{9} = \frac{35}{63}$

$\frac{36}{63} > \frac{35}{63}$, joten luku $\frac{4}{7}$ on suurempi.

15. a) $4 + (-11) = 4 - 11 = -7$

b) ${}^{6)}\frac{3}{5} - {}^{5)}\frac{1}{6} = \frac{18}{30} - \frac{5}{30} = \frac{13}{30}$

c) $3 : \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 3}{1} = \frac{9}{1} = 9$

d) $7 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7 \cdot 1}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

16. a) $4 + 3 \cdot \frac{2}{5} = 4 + \frac{3 \cdot 2}{5} = 4 + \frac{6}{5} = \frac{20}{5} + \frac{6}{5} = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$

b) $(1+2) : \frac{3}{4} = 3 : \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 4}{3} = \frac{12}{3} = 4$

c) $2\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{4}+\frac{2\cdot1}{4}=\frac{9}{4}+\frac{2}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$

17. a) ${}^{9)}\frac{1}{4}-{}^{4)}\frac{5}{9}=\frac{9}{36}-\frac{20}{36}=-\frac{11}{36}$

b) $2\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{9\cdot8}{4\cdot9}=\frac{72}{36}=2$

c) $\frac{12}{13}:\frac{8}{9}=\frac{12}{13}\cdot\frac{9}{8}=\frac{12\cdot9}{13\cdot8}^{(4}=\frac{3\cdot9}{13\cdot2}=\frac{27}{26}=1\frac{1}{26}$

18. a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3\cdot3}{7\cdot7}=\frac{9}{49}$

b) $\frac{2}{3}-2\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}-\frac{2\cdot1}{12}={}^{4)}\frac{2}{3}-\frac{2}{12}=\frac{8}{12}-\frac{2}{12}=\frac{6}{12}^{(6}=\frac{1}{2}$

c) $\left(\frac{5}{6}-3\right)\cdot\frac{2}{5}=\left(\frac{5}{6}-\frac{18}{6}\right)\cdot\frac{2}{5}=-\frac{13}{6}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{13\cdot2}{6\cdot5}^{(2}=-\frac{13\cdot1}{3\cdot5}=-\frac{13}{15}$

19. Lavennetaan murtoluvut samannimisiksi.

${}^{5)}\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$ ${}^{2)}\frac{13}{15}=\frac{26}{30}$

$\frac{26}{30}>\frac{25}{30}$, joten luku $\frac{13}{15}$ on suurempi.

20. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}={}^{9)}\frac{1}{3}+{}^{3)}\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{9}{27}+\frac{3}{27}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27}$

21. a) $-3^2+3=-3\cdot3+3=-9+3=-6$

b) $-(-6)^2+(-6)=-(-6)\cdot(-6)-6=-36-6=-42$

c) Muutetaan x:n arvo ensi murtolukumuotoon.

$1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$-\left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=-\frac{4\cdot4}{3\cdot3}+\frac{4}{3}=-\frac{16}{9}+{}^{3)}\frac{4}{3}=-\frac{16}{9}+\frac{12}{9}=-\frac{4}{9}$

22. $$\frac{2\cdot\frac{6}{7}-1}{-\frac{5}{9}+1}=\frac{\frac{2\cdot 6}{7}-1}{-\frac{5}{9}+1}=\frac{\frac{12}{7}-\frac{7}{7}}{-\frac{5}{9}+\frac{9}{9}}=\frac{5}{7}:\frac{4}{9}=\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{4}=\frac{5\cdot 9}{7\cdot 4}=\frac{45}{28}=1\frac{17}{28}$$

23. a) itseisarvo $\frac{7}{8}$, vastaluku $\frac{7}{8}$ ja käänteisluku $-\frac{8}{7}$

b) itseisarvo $2\frac{1}{3}$, vastaluku $-2\frac{1}{3}$ ja käänteisluku $\frac{3}{7}$
(Käänteisluvun määrittämistä varten luku kirjoitetaan ensin murtolukumuodossa: $2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$)

24. $|6 - 2 \cdot 5| = |6 - 10| = |-4| = 4$

25. a) $8 + (-5) = 8 - 5 = 3$

b) $4\cdot\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=\frac{12}{2}=6$

c) $2-3:\frac{5}{8}=2-3\cdot\frac{8}{5}=2-\frac{3\cdot 8}{5}=\frac{10}{5}-\frac{24}{5}=-\frac{14}{5}=-2\frac{4}{5}$

d) $(2-5)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=-3\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{-3\cdot(-2)}{9}=\frac{6^{(3}}{9}=\frac{2}{3}$

26. $$\frac{5\frac{4}{9}}{6\cdot\frac{2}{5}}=\frac{\frac{49}{9}}{\frac{6\cdot 2}{5}}=\frac{49}{9}:\frac{12}{5}=\frac{49}{9}\cdot\frac{5}{12}=\frac{49\cdot 5}{9\cdot 12}=\frac{245}{108}=2\frac{29}{108}$$

Lausekkeiden sieventäminen

27. a) $4x + (-2x) = 4x - 2x = 2x$

b) $5x \cdot 8x = 40x^2$

c) $x^2 - (-4x) = x^2 + 4x$

28. a) $5a + (3a - 6) = 5a + 3a - 6 = 8a - 6$

b) $3x - (8x - 1) = 3x - 8x + 1 = -5x + 1$

c) $4(y - 9) = 4y - 36$

29. a) $(4x - 3) + (3x - 7) = 4x - 3 + 3x - 7 = 7x - 10$

b) $(2s - 1) - (5s + 3) = 2s - 1 - 5s - 3 = -3s - 4$

c) $x(x - 4) = x^2 - 4x$

30. A–2, B–3, C–1

31. a) piiri $p = 2 \cdot 3a + 2 \cdot 7b = 6a + 14b$

b) pinta-ala $A = 3a \cdot 7b = 21ab$

32. a) $4x(x - 5) = 4x^2 - 20x$

b) $(x + 1)(x - 5) = x^2 + x - 5x - 5 = x^2 - 4x - 5$

c) $10a^2 - 3a(2a + 6) = 10a^2 - 6a^2 - 18a = 4a^2 - 18a$

33. $P(2) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 3 = 4 - 16 + 3 = -9$

$P(-1) = (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 3 = 1 + 8 + 3 = 12$

34. a) $(3x)^2 = 3x \cdot 3x = 9x^2$

b) $a^4 \cdot a^5 = aaaa \cdot aaaaa = a^9$

c) $\dfrac{x^4}{x^3} = \dfrac{x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \dfrac{x}{1} = x$

Tehtävien 34 ja 35 lausekkeiden sieventämisessä voi myös käyttää potenssikaavoja sen sijaan, että purkaa potenssit tuloiksi.

35. a) $\frac{6\cancel{x}}{3\cancel{x}} = 2$

b) $\frac{5x^3}{x} = \frac{5 \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_{1}} = \frac{5x^2}{1} = 5x^2$

c) $\frac{x}{x^2} = \frac{\cancel{x}^{1}}{x \cdot \cancel{x}_{1}} = \frac{1}{x}$

36. a) $5x + (2x - 3) = 5x + 2x - 3 = 7x - 3$

b) $5x - (2x - 3) = 5x - 2x + 3 = 3x + 3$

c) $5x(2x - 3) = 10x^2 - 15x$

37. a) $x(x - 3) + 5(3x - 2) = x^2 - 3x + 15x - 10 = x^2 + 12x - 10$

b) $(x - 1)(x^2 + 3x - 2) = x^3 + 3x^2 - 2x - x^2 - 3x + 2 = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

38. a) $\frac{x}{5} + \frac{x}{5} = \frac{2x}{5}$

b) $\frac{4a+6}{2} = \frac{4a}{2} + \frac{6}{2} = 2a + 3$

c) $^{2)}\frac{2x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{4x}{6} + \frac{x}{6} = \frac{5x}{6}$

39. a) $3 \cdot \frac{x}{12} = \frac{3 \cdot x}{12} = \frac{3x}{12}^{(3} = \frac{x}{4}$

b) $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x \cdot x}{2 \cdot 5} = \frac{x^2}{10}$

c) $\frac{2a}{7} : a = \frac{2a}{7} \cdot \frac{1}{a} = \frac{2a \cdot 1}{7 \cdot a} = \frac{2\cancel{a}}{7\cancel{a}} = \frac{2}{7}$

40. a) $x^2 + 4x - 3x^2$

→ $-2x^2 + 4x$

b) $x(x + 1)(2x - 5)$

→ $2x^3 - 3x^2 - 5x$

Kertomerkkinä voidaan käyttää myös *-merkkiä.

c) $x/3 + x/9$

$\rightarrow \frac{4}{9}x$

41. a) piiri $p = 2(x + 9) + 2(7x - 2) = 2x + 18 + 14x - 4 = 16x + 14$

b) pinta-ala $A = (x + 9)(7x - 2) = 7x^2 - 2x + 63x - 18 = 7x^2 + 61x - 18$

42. a) $7x - 5x(x - 8) = 7x - 5x^2 + 40x = -5x^2 + 47x$

b) $(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$

c) $9x^2 - (2x - 1)(3x + 4) = 9x^2 - (6x^2 + 8x - 3x - 4) =$
$9x^2 - (6x^2 + 5x - 4) = 9x^2 - 6x^2 - 5x + 4 = 3x^2 - 5x + 4$

43. a) $(6x^2 + x) + (-3x + 5) = 6x^2 + x - 3x + 5 = 6x^2 - 2x + 5$

b) $(6x^2 + x) - (-3x + 5) = 6x^2 + x + 3x - 5 = 6x^2 + 4x - 5$

c) $(6x^2 + x)(-3x + 5) = -18x^3 + 30x^2 - 3x^2 + 5x = -18x^3 + 27x^2 + 5x$

44. $P(-4) = -(-4)^2 + 3 \cdot (-4) = -(-4) \cdot (-4) - 12 = -16 - 12 = -28$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{9} + \frac{9}{9} = \frac{8}{9}$$

45. a) $(-4a)^2 = -4a \cdot (-4a) = 16a^2$

b) $x^5 \cdot x^{10} = xxxxx \cdot xxxxxxxxxx = x^{15}$

c) $$\frac{y^{12}}{y^4} = \frac{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}} = \frac{y^8}{1} = y^8$$

46. a) $$\frac{7\cancel{x}}{14\cancel{x}} = \frac{7}{14}^{(7} = \frac{1}{2}$$

b) $$\frac{5a}{15a^3} = \frac{5\overset{1}{\cancel{a}}}{15 \cdot a \cdot a \cdot \underset{1}{\cancel{a}}} = \frac{5}{15a^2}^{(5} = \frac{1}{3a^2}$$

c) $$\frac{4x - 30}{2} = \frac{4x}{2} - \frac{30}{2} = 2x - 15$$

47. a) $$\frac{x}{2}^{\,2)}+\frac{x}{4}=\frac{2x}{4}+\frac{x}{4}=\frac{3x}{4}$$

b) $$\frac{9}{y}-\frac{5}{y}=\frac{4}{y}$$

c) $$\frac{7}{x}^{\,2)}-\frac{5}{2x}=\frac{14}{2x}-\frac{5}{2x}=\frac{9}{2x}$$

48. a) $$2x\cdot\frac{3x}{14}=\frac{2x\cdot 3x}{14}=\frac{6x^2}{14}^{(2}=\frac{3x^2}{7}$$

b) $$\frac{a}{6}\cdot\frac{4}{a}=\frac{a\cdot 4}{6\cdot a}=\frac{4\cancel{a}}{6\cancel{a}}=\frac{4}{6}^{(2}=\frac{2}{3}$$

c) $$\frac{x}{5}:\frac{10}{x}=\frac{x}{5}\cdot\frac{x}{10}=\frac{x\cdot x}{5\cdot 10}=\frac{x^2}{50}$$

49. a) $$\frac{6a+6b}{a+b}=\frac{6(a+b)}{a+b}^{(a+b}=6$$

b) $$\frac{4x-8}{2x-4}=\frac{4(x-2)}{2(x-2)}^{(x-2}=\frac{4}{2}=2$$

c) $$\frac{x+1}{3x^2+3x}=\frac{x+1}{3x(x+1)}^{(x+1}=\frac{1}{3x}$$

50. a) $(-2x+7)^2$

$\approx 4x^2-28x+49$

b) $20a^3/(-4a^2)$

$\rightarrow -5a$

c) $(x-1)/(-5x^2+5x)$

$$\rightarrow -\frac{1}{5x}$$

2 YHTÄLÖITÄ JA PROSENTTILASKENTAA

Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälö

51. a)

$$5x - 4 = 2x + 11$$
$$5x - 2x = 11 + 4$$
$$3x = 15 \qquad | : 3$$
$$x = 5$$

b)

$$x - 8 = 7x + 10$$
$$x - 7x = 10 + 8$$
$$-6x = 18 \qquad | : (-6)$$
$$x = -3$$

52. a)

$$x^2 + 10x + 9 = 0 \qquad a = 1,\ b = 10,\ c = 9$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2}$$
$$x = \frac{-10+8}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ tai } x = \frac{-10-8}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

b)

$$3x^2 + 2x = 1$$
$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad a = 3,\ b = 2,\ c = -1$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$
$$x = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ tai } x = \frac{-2-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

53. a)

$$8(x - 2) = 3x + 4$$
$$8x - 16 = 3x + 4$$
$$8x - 3x = 4 + 16$$
$$5x = 20 \qquad | : 5$$
$$x = 4$$

b)
$$3(2x-1)=9x-1$$
$$6x-3=9x-1$$
$$6x-9x=-1+3$$
$$-3x=2 \quad |:(-3)$$
$$x=-\frac{2}{3}$$

54. a)
$$\frac{x}{7}=\frac{9}{10}$$
Verranto ratkaistaan kertomalla ristiin.
$$10x=9\cdot 7$$
$$10x=63 \quad |:10$$
$$x=6{,}3$$

b)
$$\frac{13}{x}=\frac{5}{6}$$
$$5x=6\cdot 13$$
$$5x=78 \quad |:5$$
$$x=\frac{78}{5}=15\frac{3}{5}=15{,}6$$

55. a)
$$-x^2+2x=3$$
$$-x^2+2x-3=0 \qquad a=-1,\ b=2,\ c=-3$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)}$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{-2}$$
Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

b)
$$x(x-5)=0$$

Tapa 1 Ratkaisukaavalla
$$x^2-5x=0 \qquad a=1,\ b=-5,\ c=0$$
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{5\pm 5}{2}$$
$$x=\frac{5+5}{2}=\frac{10}{2}=5 \text{ tai } x=\frac{5-5}{2}=0$$

Tapa 2 Tulon nollasäännöllä
$x=0$ tai $x-5=0$
$$x=5$$

56.

	nolla ratkaisua	yksi ratkaisu	kaksi ratkaisua
$3x - 2 = 6x - 17$		x	
$x^2 = 36$			x
$x^2 = -1$	x		
$x^2 + 26 = x^2 + 5x$		x	

57. a)

$$4y - 2 = 1 - 3y$$
$$4y + 3y = 1 + 2$$
$$7y = 3 \qquad |:7$$
$$y = \frac{3}{7}$$

b)

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5 \qquad |\cdot 6$$
$$6\cdot\frac{x}{2} + 6\cdot\frac{x}{3} = 6\cdot 5$$
$$3x + 2x = 30$$
$$5x = 30 \qquad |:5$$
$$x = 6$$

58. a)

$$9x^2 + 1 = 6x$$
$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad a = 9,\ b = -6,\ c = 1$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 9\cdot 1}}{2\cdot 9}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

b)

$$x(x + 2) = 8$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0 \qquad a = 1,\ b = 2,\ c = -8$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$
$$x = \frac{-2+6}{2} = 2 \text{ tai } x = \frac{-2-6}{2} = -4$$

59. a) $\frac{x+3}{4}=\frac{x}{2}$ Ratkaistaan kertomalla ristiin.

$2(x + 3) = 4x$
$2x + 6 = 4x$
$-2x = -6 \quad | : (-2)$
$x = 3$

b) $4(x - 3) = 1 - (2x + 13)$
$4x - 12 = 1 - 2x - 13$
$6x = 0 \quad | : 6$
$x = 0$

60. a) $2x - 3(5x + 1) = 7$
$2x - 15x - 3 = 7$
$-13x = 10 \quad | : (-13)$
$x=-\frac{10}{13}$

b) $\frac{9}{x-2}=3 \quad | \cdot (x - 2)$
$9 = 3\,(x - 2)$
$9 = 3x - 6$
$-3x = -6 - 9$
$-3x = -15 \quad | : (-3)$
$x = 5$

61. a) $x^2 = 64$

Tapa 1

$x^2 - 64 = 0 \quad a = 1, b = 0, c = -64$

$$x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 1\cdot(-64)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{\pm 16}{2}$$

$$x=\frac{16}{2}=8 \text{ tai } x=\frac{-16}{2}=-8$$

Tapa 2

$x^2 = 64$
$x=\pm\sqrt{64}=\pm 8$
$x = 8$ tai $x = -8$

b) $\frac{s}{25} = \frac{4}{s}$ Verranto ratkaistaan kertomalla ristiin.

Tapa 1

$s^2 = 100$

$s^2 - 100 = 0$ $a = 1, b = 0, c = -100$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2 \cdot 1}$$

$$s = \frac{\pm\sqrt{400}}{2} = \frac{\pm 20}{2}$$

$$s = \frac{20}{2} = 10 \text{ tai } s = \frac{-20}{2} = -10$$

Tapa 2

$s^2 = 100$

$s = \pm\sqrt{100} = \pm 10$

$s = 10$ tai $s = -10$

62. C, H, B, I, A

63. Sijoitetaan $x = -2$.

$(-2)^3 - 5 \cdot (-2) = -8 + 10 = 2$

$x = -2$ toteuttaa yhtälön.

64. Merkitään kolmion kantaa x:llä. Kyljen pituus on $3x$.
Piirin lauseke on $3x + 3x + x$.

$3x + 3x + x = 24{,}5$

$7x = 24{,}5 \quad | : 7$

$x = 3{,}5$ (cm)

$3x = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$ (cm)

Kyljet ovat 10,5 cm pituiset ja kanta 3,5 cm pituinen.

65. Merkitään ajettuja kilometrejä x:llä.
Autovuokraamo A: $50 + 0{,}90x$
Autovuokraamo B: $1{,}70x$

$$\begin{aligned} 50 + 0{,}90x &= 1{,}70x \\ 0{,}9x - 1{,}70x &= -50 \\ -0{,}8x &= -50 \qquad | : (-0{,}8) \\ x &= 62{,}5 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Kun ajokilometrejä on yli 62,5, liikkeen A tarjous on edullisempi.

66. Tytöt tekevät töitä yhteensä 12 + 15 = 27 tuntia.

Tuntipalkka on $\frac{135}{27} = 5$.

Minttu saa palkkaa $12 \cdot 5 = 60$ (€) ja
Sahrami $15 \cdot 5 = 75$ (€).

67. Nopeus $v = \frac{s}{t}$, jossa s on kuljettu matka ja t = siihen käytetty aika.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan t laskentaohjelmalla.

$$\frac{2{,}5}{t} = 4{,}0$$
$$t = 0{,}625$$

$0{,}625 \text{ h} = 60 \cdot 0{,}625 \text{ min} = 37{,}5 \text{ min}$

68. Merkitään lyhyttä sivua x:llä. Pitkän sivun pituus on $x + 12$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$x(x + 12) = 560$

$x = 18{,}413\ldots \approx 18{,}4$ (m)
tai
$x = -30{,}413\ldots \approx -30{,}4$ (m) Negatiivinen vastaus ei käy.

Pidemmän sivun pituus on $18{,}4 + 12 = 30{,}4$ (m).

Kentän mitat ovat 18,4 m ja 30,4 m.

69. a) Sijoitetaan $x = -5$ yhtälöön $x^4 + x^3 - 400 = 0$.

$(-5)^4 + (-5)^3 - 400 = 100 \neq 0$

Luku –5 ei ole yhtälön juuri.

b) Sijoitetaan $x = \frac{1}{3}$ yhtälöön $9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$.

$$9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{9}{27} + \frac{6}{9} - 1 = 0$$

Luku $\frac{1}{3}$ on yhtälön juuri.

70. a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$ $\qquad a = 8, b = -2, c = -1$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{2 \cdot 8}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{16} = \frac{2 \pm 6}{16}$$

$$x = \frac{2-6}{16} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4} \text{ tai } x = \frac{2+6}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\frac{3x}{x-1} = -18$$

$$3x = -18(x - 1)$$

$$3x = -18x + 18$$

$$21x = 18 \qquad |:21$$

$$x = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

71. a)

$$5t - (-2t + 13) = 7t - 13$$

$$5t + 2t - 13 = 7t - 13$$

$$7t - 7t = -13 + 13$$

$$0 = 0$$

Yhtälö toteutuu kaikilla t:n arvoilla.

b)
$$x^2 - (x+1)(x-4) = 0$$
$$x^2 - (x^2 + x - 4x - 4) = 0$$
$$x^2 - x^2 + 3x + 4 = 0$$
$$3x + 4 = 0$$
$$3x = -4 \quad | : 3$$
$$x = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

72. a)
$$\frac{x}{3} = 2 - \frac{x}{5} \quad | \cdot 15$$
$$5x = 30 - 3x$$
$$8x = 30 \quad | : 8$$
$$x = \frac{30}{8} = 3\frac{3}{4}$$

b)
$$(y+3)(y-3) = 4y - 15$$
$$y^2 + 3y - 3y - 9 = 4y - 15$$
$$y^2 - 4y + 6 = 0 \qquad a = 1,\ b = -4,\ c = 6$$
$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$
$$y = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

73. a)
$$(5x+1)^2 = 20x$$
$$(5x+1) \cdot (5x+1) = 20x$$
$$25x^2 + 5x + 5x + 1 - 20x = 0$$
$$25x^2 - 10x + 1 = 0 \qquad a = 25,\ b = -10,\ c = 1$$
$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1}}{2 \cdot 25}$$
$$x = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{50} = \frac{1}{5}$$

b) $x^2 + 7x - 1 = 0$ $a = 1,\ b = 7,\ c = -1$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}$$

$$x = \frac{-7 + \sqrt{53}}{2} \text{ tai } x = \frac{-7 - \sqrt{53}}{2}$$

74. a) $2x^2 - 50 = 0$ $a = 2,\ b = 0,\ c = -50$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-50)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-0 \pm 10}{4}$$

$$x = \frac{10}{4} = 5 \text{ tai } x = \frac{-10}{4} = -5$$

b)

$$\frac{x-3}{2} = \frac{5}{x}$$

$$x(x - 3) = 10$$

$x^2 - 3x - 10 = 0$ $a = 1,\ b = -3,\ c = -10$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{3+7}{2} = 5 \text{ tai } x = \frac{3-7}{2} = -2$$

75. Merkitään Tapion osuutta x:llä. Tiinan osuus on silloin $1\ 580 - x$.
Koska lasku jaetaan kuukausipalkkojen suhteessa, osien suuruudet voidaan ratkaista verrannon avulla.

$$\frac{2\ 036}{2\ 345} = \frac{x}{1\ 580 - x}$$

$$2\ 345x = 2\ 036 \cdot (1\ 580 - x)$$

$$2\ 345x = 3\ 216\ 880 - 2\ 036x$$

$$4\ 381x = 3\ 216\ 880 \qquad |: 4\ 381$$

$$x = 734{,}2798\ldots \approx 734{,}28\ (€)$$

$1\ 580 - 734{,}28 = 845{,}72$ (€)

Tapion osuus laskusta on 734,28 € ja Tiinan 845,72 €.

76. Inarin ikä nyt on x vuotta. Viidentoista vuoden kuluttua Inari on $x + 15$ vuotta. Yksitoista vuotta sitten hän oli $x - 11$ vuotta.

$x + 15 = 3(x - 11)$
$x + 15 = 3x - 33$
$x - 3x = -33 - 15$
$-2x = -48 \quad | : (-2)$
$x = 24$

Inarin ikä nyt on 24 vuotta.

77. a) $-1(4 \cdot (-1) - 2) - 3 \cdot (-1)(-1 - 1) - (-1) = 6 - 6 + 1 = 1$

b) Esimerkiksi $x^2 = 1$

c) $2(2 - 5) + 2a = 2$
$4 - 10 + 2a = 2$
$2a = 8 \quad | : 2$
$a = 4$

78. Merkitään abien määrää x:llä. Matkan kokonaishinnasta saadaan yhtälö, joka ratkaistaan laskentaohjelmalla
$20x = 22{,}50(x - 6)$
$x = 54$

$54 - 6 = 48$

Risteilylle lähti 48 abiturienttia.

79. Merkitään lukuja x:llä ja $x + 1$:lla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla
$x\,(x + 1) = 25\ 122$

$x = 158$, jolloin toinen luku on $158 + 1 = 159$
tai
$x = -159$, jolloin toinen luku on $-159 + 1 = -158$.

Luvut ovat joko 158 ja 159 tai –159 ja –158.

80. Taulun pinta-ala on $35 \cdot 60 = 2\ 100$ (cm^2).

Taulun ja kehyksen pinta-ala yhteensä on $1{,}15 \cdot 2\ 100 = 2\ 415$ (cm^2).

Merkitään kehyksen leveyttä x:llä. Kehys on taulun kaikilla sivuilla.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$(2x + 35)(2x + 60) = 2\ 415$

$x = 1{,}603\ldots \approx 1{,}6$ (cm)
tai
$x = -49{,}10\ldots$ Negatiivinen ratkaisu ei käy.

Kehyksen leveys on 1,6 cm.

81. Merkitään rannan suuntaista sivua x:llä.
Rantaa vastaan kohtisuora sivu on $\frac{155-x}{2} = 77{,}5 - 0{,}5x$ pituinen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$x\,(77{,}5 - 0{,}5x) = 2\ 500$

$x = 45{,}778\ldots \approx 46$ (m), jolloin toinen sivu on $77{,}5 - 0{,}5 \cdot 46 \approx 55$ (m)
tai
$x = 109{,}22\ldots \approx 110$ (m), jolloin toinen sivu on $77{,}5 - 0{,}5 \cdot 110 \approx 23$ (m)

Alueen mitat ovat 55 m ja 46 m tai 110 m ja 23 m, kun rantaa vasten kohtisuora sivu on mainittu ensin.

82. $x = 3$

$3a + 10 = 2 \cdot 3 - 4a$
$3a + 4a = 6 - 10$
$7a = -4 \quad |:7$
$a = -\frac{4}{7}$

83. a) $(2x - 1)(x + 3)(6x - 24) = 0$

$2x - 1 = 0$ tai $x + 3 = 0$ tai $6x - 24 = 0$
$2x = 1 \quad |:2$ $\quad x = -3$ $\quad 6x = 24 \quad |:6$
$x = 0{,}5$ $\quad x = 4$

b) $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 + 5x - 6) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 + 5x - 6 = 0 \quad a = 1, b = 5, c = -6$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ tai } x = \frac{-5-7}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

PROSENTTILASKENTA

84. A4, B1, C6, D5, E3, F2

85. a) $\frac{452{,}56}{1\,414{,}25} = 0{,}32 = 32\,\%$

b) $60\ \% = 0{,}60$

$0{,}60 \cdot 480 = 288$

$288 - 153{,}60 = 134{,}40$ (€)

86. a) $4\ 650 - 2\ 800 = 1\ 850$

$\frac{1\ 850}{4\ 650} = 0{,}3978... \approx 0{,}40 = 40\ \%$

b) Kuinka monta prosenttia pienempi on luku 500 kuin 600?

$500 - 600 = -100$

Erotusta verrataan lukuun 600.

$\frac{-100}{600} = -0{,}1666... \approx -0{,}17$

$-0{,}17 = -17\ \%$

17 prosenttia pienempi.

(Jos erotus lasketaan aina niin, että lopputuloksesta vähennetään alkuperäinen arvo, etumerkki ilmoittaa muutoksen suunnan.)

Kuinka monta prosenttia suurempi on luku 600 kuin 500?
600 – 500 = 100

Erotusta verrataan lukuun 500.
$\frac{100}{500} = 0,2$
0,2 = 20 %

20 prosenttia suurempi.

87. a) 100 % + 15 % = 115 % = 1,15

$1,15 \cdot 30 = 34,50$ (€)

b) Merkitään alkuperäistä hintaa *x*:llä.
$0,12x = 900 \quad |:0,12$
$x = 7\,500$ (€)

88. a) $\frac{5}{64} = 0,078125 \approx 0,078 = 7,8\,\%$

b) 19 % = 0,19
$0,19 \cdot 64 = 12,16 \approx 12$

89. a) 100 % + 12 % = 112 % = 1,12
$1,12 \cdot 15,80 = 17,696 \approx 17,70$ (€)

b) 100 % – 8,6 % = 91,4 % = 0,914
$0,914 \cdot 15,80 = 14,4412 \approx 14,44$ (€)

90. a) Kysytty luku on *x*.
75 % = 0,75

$0,75x = 36 \quad |:0,75$
$x = 48$

b) Merkitään alkuperäistä hintaa *h*:lla.
100 % – 15 % = 85 % = 0,85

$0,85h = 45,90 \quad |:0,85$
$h = 54$ (€)

91. a)

304 – 231 = 73

$$\frac{73}{231}=0,31601...\approx 0,32=32\ \%$$

b)

304 – 231 = 73

$$\frac{73}{304}=0,24013...\approx 0,24=24\ \%$$

92. a)

Voitto euroina on 5 – 2 = 3

$$\frac{3}{5}=0,6=60\ \%$$

b)

Voitto euroina on 10 – 3 · 2 = 4

$$\frac{4}{10}=0,4=40\ \%$$

93. a)

15 % – 10 % = 5 prosenttiyksikköä.

b)

Rasvaa ennen muutosta oli 0,15 · 2,5 = 0,375 (dl)
Rasvaa muutoksen jälkeen on 0,1 · 2,5 = 0,25 (dl).

0,25 – 0,375 = –0,125

$$\frac{-0,125}{0,375}=-0,3333...\approx -0,33$$

–0,33 = –33 %

94.

100 % + 5,8 % = 105,8 % = 1,058
100 % + 12,7 % = 112,7 % = 1,127
100 % – 3,2 % = 96,8 % = 0,968
100 % – 0,6 % = 99,4 % = 0,994
100 % + 1,8 % = 101,8 % = 1,018

1,058 · 1,127 · 0,968 · 0,994 · 1,018 · 1,24 = 1,448240… (miljoonaa euroa)

$$\frac{1,44824}{1,24}=1,1679...\approx 1,17$$

1,17 = 117 %
117 % – 100 % = 17 %
Tulos parani 17 %

95. Meetvurstia on 100a.
Meetvurstissa on rasvaa 0,36 · 100a = 36a.
Rasvaa poistetaan x.

Muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan x laskentaohjelmalla.

$$\frac{36a-x}{100a-x}=\frac{30}{100}$$

$$x=\frac{60a}{7}$$

Rasvaa pitää vähentää

$$\frac{\frac{60a}{7}}{36a}=0,2380...\approx 0,24=24\ \%$$

96. Merkitään hintaa h:lla ja myyntiä m:llä. Tuotto on hinnan ja myynnin tulo hm.
100 % + 21 % = 121 % = 1,21
100 % – 20 % = 80 % = 0,8

Uusi hinta on 1,21h ja uusi myynti 0,8m.

Uusi tuotto on 1,21h · 0,8m = 0,968hm.
0,968 = 96,8 %

Muutos 96,8 % – 100 % = –3,2 %

Myyntitulo laski 3,2 %.

97. a) 2 750 – 2 500 = 250

$$\frac{250}{2\ 500}=0,1=10\ \%$$

b) 100 % – 4,5 % = 95,5 % = 0,955

0,955 · 2 750 = 2 626,25 (€)

98. a) $117-83=34$

$$\frac{34}{117}=0,2905...\approx 0,29=29\ \%$$

29 % vähemmän

b) $133-67=66$

$$\frac{66}{67}=0,9850...\approx 99=99\ \%$$

99 % enemmän

99. a) hopeapitoisuus 830 promillea, massa 165 g
$0{,}830 \cdot 165 = 136{,}95$ (g)

b) Merkitään kokonaismassaa x:llä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$0{,}00585x = 850$
$x = 145299{,}145\ldots \approx 145\ 300$ (kg)

100. Merkitään alkuperäistä hinta a:lla.
100 % – 25 % = 75 % = 0,75, 100 % – 40 % = 60 % = 0,6

$0{,}6 \cdot 0{,}75 \cdot a = 76{,}05$
$0{,}45a = 76{,}05 \quad | : 0{,}45$
$a = 169$ (€)

101. Tilavuokrat:
$0{,}32 \cdot 120\ 000 = 38\ 400$ (€)

Tilavuokrien korotus:
$0{,}15 \cdot 38\ 400 = 5\ 760$ (€)

Muutos prosentteina:

$$\frac{5\ 760}{120\ 000}=0,048=4,8\ \%$$

102. $100\ \% + 23{,}4\ \% = 123{,}4\ \% = 1{,}234$
$100\ \% + 16{,}3\ \% = 116{,}3\ \% = 1{,}163$
$100\ \% + 4{,}5\ \% = 104{,}5\ \% = 1{,}045$

Merkitään kävijämäärää alussa a:lla.
Uusi kävijämäärä on
$1{,}234 \cdot 1{,}163 \cdot 1{,}045\, a = 1{,}49972\ldots a.$

$1{,}49972\ldots \approx 1{,}500 = 150{,}0\ \%$

Kävijämäärä kasvoi kaikkiaan 50,0 %.

103. a) Taulukkolaskentaohjelmalla tehdään alennustaulukko.

ostos (€)	**alennus (€)**	**alennusprosentti**
50	5	10 %
100	15	15 %
300	40	13 %
600	100	17 %

b) Riston alennusprosentti on
$$\frac{5}{80} = 0{,}0625 = 6{,}25\ \%.$$

Maurin alennusprosentti on
$$\frac{15}{200} = 0{,}075 = 7{,}5\ \%.$$

Maurin alennus on
$7{,}5\ \% - 6{,}25\ \% = 1{,}25$ prosenttiyksikköä suurempi.

c) $$\frac{40}{280} = 0{,}14285 \approx 14{,}3\ \%$$

104. Merkitään verotonta hintaa x:llä.
$100\ \% + 10\ \% = 110\ \% = 1{,}1$

Muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan veroton hinta x laskentaohjelmalla.
$$1{,}1x = 22{,}70$$
$$x = 20{,}6363\ldots \approx 20{,}64\ (€)$$

Veron määrä euroina on
$22{,}70 - 20{,}64 = 2{,}06$ (€).

105. a) $0{,}32 \cdot 0{,}7 = 0{,}224$ (l)

b) Boolin tilavuus yhteensä on $1{,}2 + 0{,}7 + 2{,}5 = 4{,}4$ (l).

$$\frac{0{,}224}{4{,}4} = 0{,}050909... \approx 0{,}051 = 5{,}1\ \%$$

106. Merkitään alkuperäistä matkan hintaa h:lla.
Laivamatkan hinta on $0{,}25h$ ja hotellihuoneen $0{,}75h$.
Hinnan korotuksen jälkeen laivamatkan hinta on $1{,}18 \cdot 0{,}25h$.
Uusi hotellihuoneen hinta on $k \cdot 0{,}75h$.

Kootaan tiedot taulukkoon

	laivamatka	**hotellihuone**	**yhteensä**
ennen korotusta	$0{,}25h$	$0{,}75h$	h
muutosten jälkeen	$1{,}18 \cdot 0{,}25h$	$k \cdot 0{,}75h$	h

Taulukon alemmalta riviltä saadaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 1{,}18 \cdot 0{,}25h + k \cdot 0{,}75h &= h \quad &&|: h \\ 0{,}295 + 0{,}75k &= 1 \\ 0{,}75k &= 1 - 0{,}295 \\ 0{,}75k &= 0{,}705 \quad &&|: 0{,}75 \\ k &= 0{,}94 \end{aligned}$$

$0{,}94 = 94\ \%$

$100\ \% - 94\ \% = 6{,}0\ \%$

3 TASOGEOMETRIA

Tasogeometrian perusteita

107. a) 15 000 cm = 0,15 km
b) 0,0098 dm = 0,98 mm
c) 2 500 000 mm = 2,5 km
d) 0,000076 m = 0,0076 cm

108. a) 2 300 a = 0,23 km^2
b) 0,000075 m^2 = 75 mm^2
c) 810 000 cm^2 = 81 m^2
d) 37 000 m^2 = 370 a

109. a) 170 cm = 1,7 m
b) 8,6 m < 90 dm
c) 43 a < 0,01 km^2
d) 0,00005 m^2 < 5 cm^2
e) 260 ha > 260 000 m^2
f) 0,000000039 a < 39 mm^2

110. a)
$$\frac{15,2}{17,5}=\frac{x}{10,9}$$
$$17{,}5x = 15{,}2 \cdot 10{,}9$$
$$17{,}5x = 165{,}68 \qquad |: 17{,}5$$
$$x = 9{,}467\ldots \approx 9{,}5 \text{ (cm)}$$

b)
$$\frac{41}{102}=\frac{x}{145}$$
$$102x = 41 \cdot 145$$
$$102x = 5\,945 \qquad |: 102$$
$$x = 58{,}284\ldots \approx 58 \text{ (mm)}$$

111. a)

	Mittakaava	**Tuntosarvi (cm)**
Kuva	20	1,2
Luonto	1	x

$$\frac{20}{1}=\frac{1,2}{x}$$

$20x = 1,2 \qquad |:\ 20$

$x = 0,06$ (cm)

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

0,06 cm = 0,6 mm

b)

	Mittakaava	**Silmä (mm)**
Kuva	20	y
Luonto	1	0,4

$$\frac{20}{1}=\frac{y}{0,4}$$

$y = 20 \cdot 0,4$

$y = 8,0$ (mm)

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

112. Lasketaan pinta-ala.

$32,5 \cdot 47,5 = 1\ 543,75\ (\text{m}^2)$

$1\ 543,75\ \text{m}^2 = 15,4375\ \text{a} \approx 15,4\ \text{a}$

113.

	Korkeus (m)	**Varjo (m)**
Keppi	1,2	1,9
Puu	x	4,8

$$\frac{1,2}{x}=\frac{1,9}{4,8}$$

$1,9x = 1,2 \cdot 4,8$

$1,9x = 5,76 \qquad |:1,9$

$x = 3,031\ldots \approx 3,0$ (m)

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

114. a)

	Mittakaava	**Järvi (km)**
Kartta	1	x
Luonto	100 000	1,2

$$\frac{1}{100\,000} = \frac{x}{1{,}2}$$

$100\,000x = 1{,}2 \qquad | : 100\,000$

$x = 0{,}000012$ (km)

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

0,000012 km = 1,2 cm

b)

	Mittakaava	**Välimatka (cm)**
Kartta	1	32
Luonto	100 000	y

$$\frac{1}{100\,000} = \frac{32}{y}$$

$y = 3\,200\,000$ (cm)

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

3 200 000 cm = 32 km

115. Talon omistajan mittaustuloksilla:

$3{,}65 \cdot 3{,}30 = 12{,}045 \approx 12{,}0$ (m^2)

$12{,}0\ m^2 = 120\,000\ cm^2$

Rakennusmiehen mittaustuloksilla:

$3\,674 \cdot 3\,335 = 12\,252\,790 \approx 12\,300\,000$ (mm^2)

$12\,300\,000\ mm^2 = 123\,000\ cm^2$

Lasketaan erotus pyöristämättömillä arvoilla.

$122\,527{,}90\ cm^2 - 120\,450\ cm^2 = 2\,077{,}9\ cm^2 \approx 2\,080\ cm^2$

116. a)

	Mittakaava	Mittakaavan neliö	Pinta-ala (km²)
Kartta	1	1^2	x
Luonto	50 000	$50\ 000^2$	1,1

$$\frac{1^2}{50\ 000^2} = \frac{x}{1,1}$$

$50\ 000^2 x = 1,1 \qquad |:50\ 000^2$

$$x = \frac{1,1}{50\ 000^2} = 4,4 \cdot 10^{-10}$$

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$4,4 \cdot 10^{-10}\ \text{km}^2 = 4,4\ \text{cm}^2$

b)

	Mittakaava	Mittakaavan neliö	Pinta-ala (cm²)
Kartta	1	1^2	12,5
Luonto	50 000	$50\ 000^2$	y

$$\frac{1^2}{50\ 000^2} = \frac{12,5}{y}$$

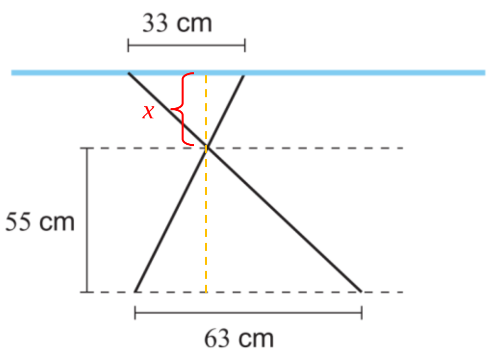
$y = 12,5 \cdot 50\ 000^2$

$y = 3,125 \cdot 10^{10}\ (\text{cm}^2)$

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$3,125 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2 = 3,125\ \text{km}^2 \approx 3,13\ \text{km}^2$

117.



Kuvassa on kaksi yhdenmuotoista kolmiota. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\frac{x}{33} = \frac{55}{63}$$

$x = 28,8095\ldots \approx 28,81$

Kokonaiskorkeus on
$55 + 28,81 = 83,81 \approx 84$ (cm).

118. a) $0{,}56 \cdot 1{,}25 = 0{,}7\ (\text{km}^2)$

$0{,}7\ \text{km}^2 = 700\ 000\ \text{m}^2$

b) $\dfrac{39 \cdot 78}{2} = 1\ 521\ (\text{cm}^2)$

$1\ 521\ \text{cm}^2 = 0{,}1521\ \text{m}^2 \approx 0{,}15\ \text{m}^2$

119. Lamppu ja Kerttu sekä lamppu ja Kertun varjo muodostavat kaksi kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoisia. Lamppu on molempien kolmioiden kärkenä. Vastaisena kateettina on toisessa kolmiossa Kerttu ja toisessa Kertun varjo.

	Kerttu / varjo	**Lampun etäisyys Kertusta / varjosta**
Pieni kolmio (Kerttu)	x	3
Iso kolmio (Kertun varjo)	2	4

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$$
$$4x = 3 \cdot 2 \quad |:4$$
$$x = \frac{6}{4} = 1{,}5\ \text{(m)}$$

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

120. Pöytäliinan ala ennen pesua $2 \cdot 4 = 8\ (\text{m}^2)$

Mitat pesun jälkeen: $0{,}95 \cdot 2 = 1{,}9$ (m) ja $0{,}95 \cdot 4 = 3{,}8$ (m)

Pöytäliinan ala pesun jälkeen: $1{,}9 \cdot 3{,}8 = 7{,}22\ (\text{m}^2)$

Muutos on
$$\frac{8-7{,}22}{8} = 0{,}0975 = 9{,}75\ \%.$$

121. Huoneen seinien pinta-ala ikkunoiden ja ovien kanssa neliömetreinä on $2 \cdot 5{,}200 \cdot 2{,}480 + 2 \cdot 4{,}650 \cdot 2{,}480 = 48{,}856$.

Pinta-ala ilman ovia ja ikkunoita on $0{,}75 \cdot 48{,}856 = 36{,}642\ (\text{m}^2)$.

Maalin kulutus on
$$1{,}1 \cdot 2 \cdot \frac{36{,}642}{8} = 10{,}076\ldots \approx 10{,}1 \text{ (litraa).}$$

122.

	Mittakaava	Matka
Kartta	1	1,25 cm
Luonto	n	25 km = 2 500 000 cm

$$\frac{1}{n}=\frac{1,25}{2\,500\,000}$$

$1{,}25n = 2\,500\,000 \qquad | : 1{,}25$

$$n=\frac{2\,500\,000}{1,25}=2\,000\,000$$

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

Mittakaava on 1: 2 000 000.

	Mittakaava	Mittakaavan neliö	Pinta-ala (km^2)
Kartta	1	1^2	x
Luonto	2 000 000	$2\,000\,000^2$	100

$$\frac{1^2}{2\,000\,000^2}=\frac{x}{100}$$

$2\,000\,000^2x = 100 \qquad | : 2\,000\,000^2$

$$x=\frac{100}{2000000^2}=2,5\cdot 10^{-11}$$

Verrannon voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$2{,}5 \cdot 10^{-11}$ km^2 = 0,25 cm^2

123.

	Pituus	Pinta-ala	Lankamäärä
Peitto 1	80	80^2	550
Peitto 2	x	x^2	380

$$\frac{80^2}{x^2}=\frac{550}{380}$$

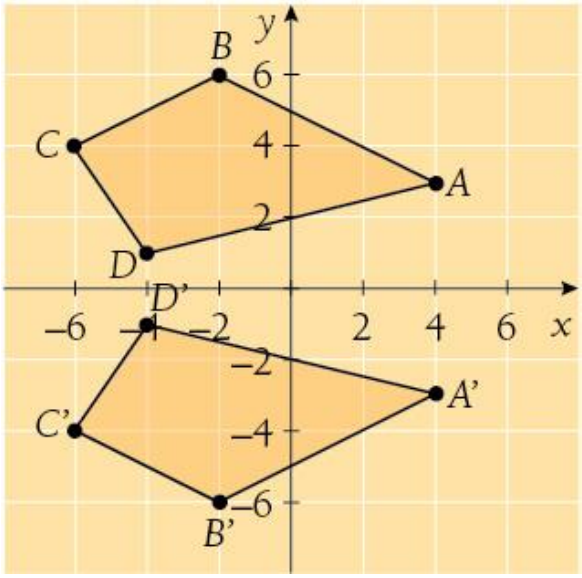
$550x^2 = 6\,400 \cdot 380$

$$x^2=\frac{6\,400\cdot 380}{550}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{6\,400\cdot 380}{550}}$$

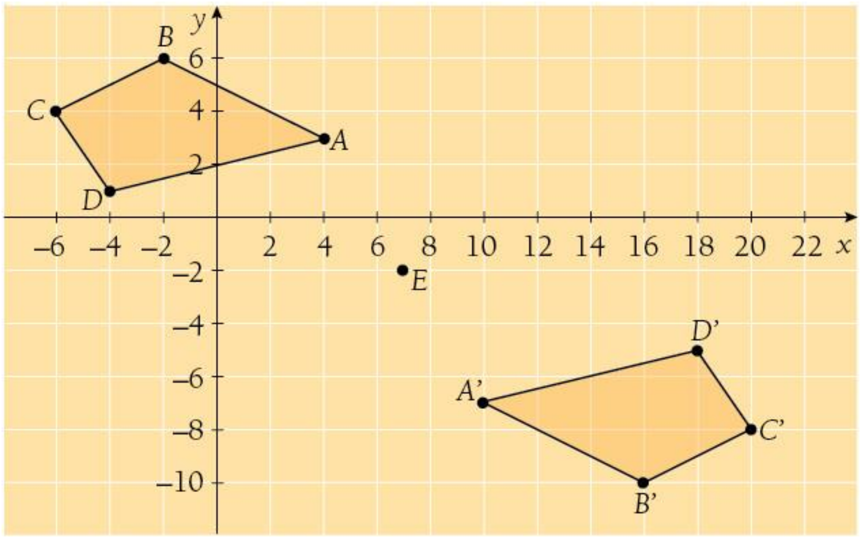
$x = 66{,}49\ldots \approx 66$ (cm) Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.

124. a)



A' = (4, –3), B' = (–2, –6), C' = (–6, –4) ja D' = (–4, –1)

b)



A' = (10, –7), B' = (16, –10), C' = (20, –8) ja D' = (18, –5)

125. Sivujen mittakaava on pinta-alan mittakaavan neliöjuuri.

Jos siis pinta-ala muuttuu suhteessa 1 : 2, niin sivut muuttuvat suhteessa 1 : $\sqrt{2}$.

Uuden kartan mittakaava on 1 : ($\sqrt{2}$ · 20 000) eli noin 1 : 28 284.

Pienennetyn kartan mittakaava on 1 : 28 300.

Suorakulmainen kolmio

126. Sivun pituus ratkaistaan Pythagoraan lauseella.

a) $49^2 + 65^2 = x^2$

$x^2 = 6\,626$

$x = \pm\sqrt{6\,626}$ Koska kyseessä on pituusmitta, negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä.

$x = 81{,}40\ldots \approx 81$ (cm)

b) $x^2 + 4{,}3^2 = 6{,}5^2$

$x^2 = 6{,}5^2 - 4{,}3^2$

$x^2 = 23{,}76$

$x = \pm\sqrt{23{,}76}$ Koska kyseessä on pituusmitta, negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä.

$x = 4{,}874\ldots \approx 4{,}9$ (cm)

127. a) $\tan 20° = \dfrac{x}{13}$

$x = \tan 20° \cdot 13$

$x = 4{,}731\ldots \approx 4{,}7$ (m)

b) $\cos 35° = \dfrac{x}{8{,}4}$

$x = \cos 35° \cdot 8{,}4$

$x = 6{,}880\ldots \approx 6{,}9$ (m)

128. a) $\sin\alpha = \dfrac{3{,}5}{7{,}5}$

$\alpha = 27{,}81\ldots° \approx 28°$

b) $\tan\alpha = \dfrac{12{,}4}{4{,}1}$

$\alpha = 71{,}70\ldots° \approx 72°$

129. a) oikein
b) oikein
c) väärin
d) väärin
e) väärin

130. Lasketaan ensin sen kulman α suuruus, joka on 7,2 cm pituista kateettia vastapäätä.

$$\sin\alpha = \frac{7,2}{9,8}$$
$$\alpha = 47,28\ldots° \approx 47°$$

Kolmion kulmien summan on 180°. Kolmas kulma β saadaan yhtälöstä

$$\beta + 47° + 90° = 180°$$
$$\beta = 43°$$

Kulmien suuruudet ovat 90°, 47° ja 43°.

131.
$$\tan 53° = \frac{1,4}{x}$$
$$\tan 53° \cdot x = 1,4 \qquad |: \tan 53°$$
$$x = \frac{1,4}{\tan 53°}$$
$$x = 1,054\ldots \approx 1,1 \text{ (cm)}$$

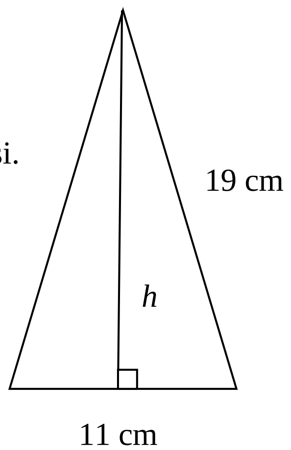
132. a) Lävistäjä jakaa suorakulmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Lävistäjän pituus lasketaan Pythagoraan lauseella.

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$$2,7^2 + 7,5^2 = x^2$$
$$x^2 = 63,54$$
$$x = \pm\sqrt{63,64}$$ Koska kyseessä on pituus, negatiivinen vastaus ei käy.
$$x = 7,971\ \ldots \approx 8,0 \text{ (cm)}$$

b) Piirretään mallikuva.



Korkeusjana jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.
Suorakulmaisen kolmion kanta on
11 cm : 2 = 5,5 cm.

Korkeus lasketaan Pythagoraan lauseen avulla.
Yhtälö ratkaistaan laskentaohjelmalla.

$$5,5^2 + h^2 = 19^2$$

$h = 18,1865\ldots \approx 18,19$ (cm)
tai
$h = -18,1865\ldots \approx -18,19$ (cm) Negatiivinen ratkaisu ei käy.

$$A = \frac{11 \cdot 18,19}{2} = 100,045 \approx 100 \text{ (cm}^2\text{)}$$

133. a)
$$\cos 60° = \frac{x}{4,5}$$
$$x = 4,5 \cdot \cos 60°$$
$$x = 2,3 \text{ (m)}$$

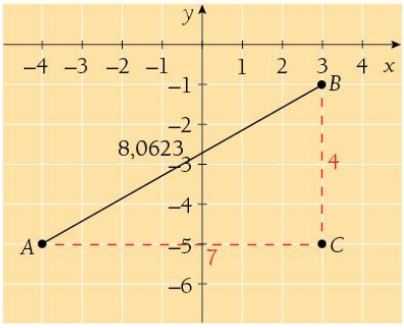
Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

b)

$$\sin 39° = \frac{7,3}{x}$$
$$\sin 39° \cdot x = 7,3$$
$$x = \frac{7,3}{\sin 39°}$$
$$x = 11,59\ldots \approx 12 \text{ (m)}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

134. a)



b)

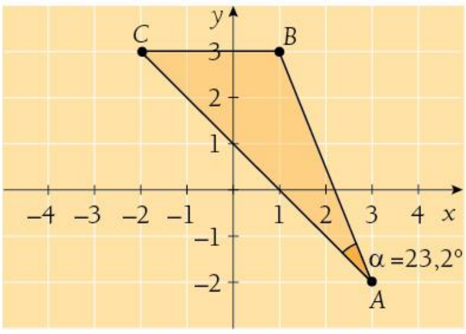
$x^2 = 7^2 + 4^2$
$x^2 = 65$
$x = \pm\sqrt{65}$ Koska kyseessä on pituusmitta, negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä.

135. Rinteen pituus x saadaan Pythagoraan lauseen avulla.
$x^2 = 25^2 + 55^2$

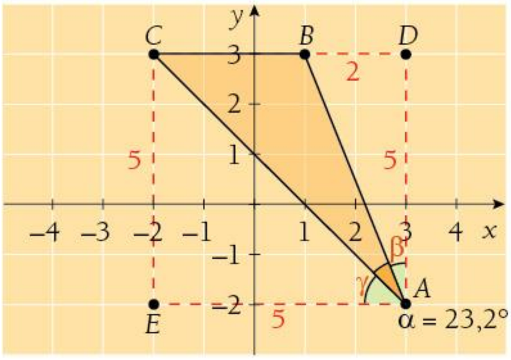
Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
$x = 60,4152\ldots \approx 60$ (cm)
tai
$x = –60,4152\ldots \approx –60$ (cm) Negatiivinen ratkaisu ei käy.

Keskinopeus on
$$v = \frac{60,42}{15} = 4,028 \approx 4,0 \text{ (m/s)}.$$

136. a)



b)



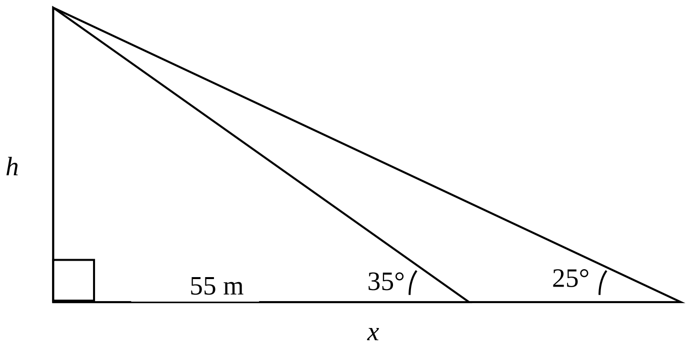
Kulman A suuruus saadaan laskettua,
kun 90° kulmasta vähennetään kulmien β ja □ suuruudet.

$$\tan \beta = \frac{2}{5}$$
$$\beta = 21{,}8014\ldots°$$

$$\tan \gamma = \frac{5}{5}$$
□ = 45°

Kulman A suuruus on
90° – 21,80° – 45° = 23,20° ≈ 23,2°.

137. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Lasketaan pienemmästä kolmiosta tornin korkeus h.

$$\tan 35° = \frac{h}{55}$$
$$h = 55 \cdot \tan 35°$$
$$h = 38{,}5114\ldots \approx 38{,}51 \text{ (m)}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

Suuremmasta kolmiosta saadaan Matiaksen ja tornin välinen etäisyys x.

$$\tan 25° = \frac{38,51}{x}$$

$\tan 25° \cdot x = 38,51 \qquad | : \tan 25°$

$$x = \frac{38,51}{\tan 25°}$$

$x = 82,5849\ \ldots \approx 82,58$ (m)

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$82,58 - 55 = 27,58 \approx 28$ (m)

138. a) Kateetin BC pituus on saadaan Pythagoraan lauseella. Ratkaistaan sivun x pituus laskentaohjelmalla.

$x^2 + 4,4^2 = 8,1^2$

$x = \pm 6,8007... \approx \pm 6,8$ Koska kyseessä on pituusmitta, negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä.

$x = 6,8$ (cm)

b) Kulma C:

$$\sin \gamma = \frac{4,4}{8,1}$$

□ = 32,902…° ≈ 32,9°

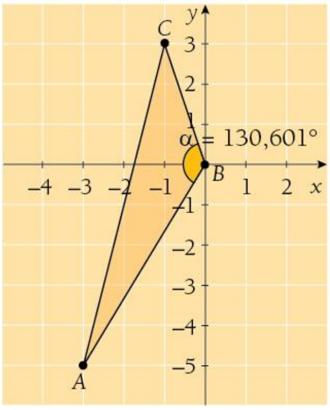
Kulma A:

$\alpha = 90° - 32,9° = 57,1°$

c) Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{4,4 \cdot 6,8}{2} = 14,96 \approx 15,0.$$

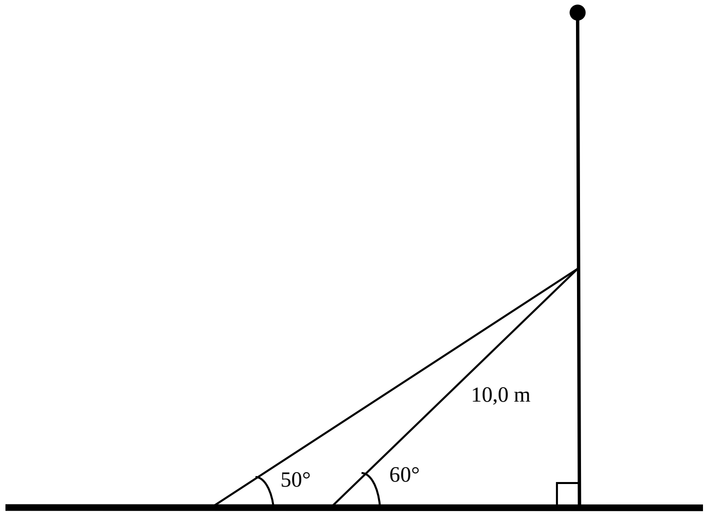
139.



a) Laskentaohjelmalla saadaan, että sivun AB pituus on 5,831.

b) Laskentaohjelmalla saadaan, että kulma ABC = 130,601°

140. Piirretään tilanteesta mallikuva. Kuvassa on yhden suunnan vanha ja uusi vaijeri.



Lasketaan kiinnityskohdan korkeus h alkuperäisen vaijerin muodostaman kolmion avulla.

$$\sin 60° = \frac{h}{10,0}$$

$h = \sin 60° \cdot 10,0$
$h = 8,660254\ldots \approx 8,6603$ (m)

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

Uuden vaijerin pituus x saadaan toisesta kolmiosta.

$$\sin 50° = \frac{8,6603}{x}$$

$\sin 50° \cdot x = 8,6603 \qquad |: \sin 50°$

$$x = \frac{8,6603}{\sin 50°}$$

$x = 11,305\ldots \approx 11,3$ (m)

141. Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö:

$x^2 + (2x - 1)^2 = 17^2$
$x^2 + (2x - 1)(2x - 1) = 289$
$x^2 + 4x^2 - 2x - 2x + 1 = 289$
$5x^2 - 4x - 288 = 0$

Ratkaistaan ratkaisukaavalla: $a = 5$, $b = -4$, $c = -288$.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-288)}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{5\ 776}}{10} = \frac{4 \pm 76}{10}$$

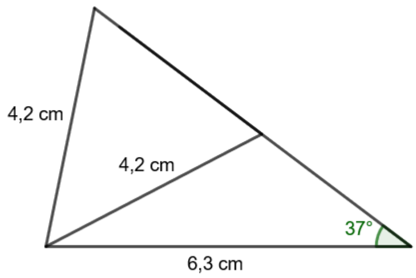
$$x = \frac{4+76}{10} = 8 \text{ tai } x = \frac{4-76}{10} = -7,2$$

Negatiivinen vastaus ei käy.

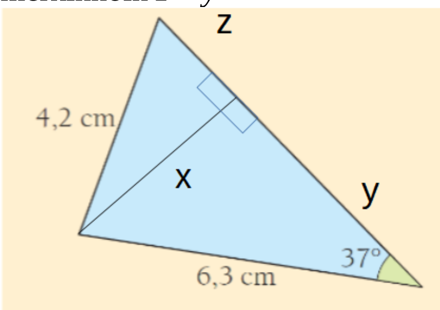
$2 \cdot 8 - 1 = 15$
Sivujen pituudet ovat 8, 15 ja 17.

142.

Tehtävänannosta puuttuu tieto siitä, että laskettava sivu on kolmion pisin sivu. Ilman tätä tietoa tehtävälle löytyisi toinenkin ratkaisu (alla olevan kuvan pienempi kolmio). Tämän toisen ratkaisun huomaaminen on kuitenkin lyhyen matematiikan oppimäärän ylittävä taito.



Oletetaan ratkaisussa, että kysytty sivu on kolmion pisin sivu kuvan mukaisesti. Jaetaan kolmio kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Kysytyn sivun pituus on kuvan merkinnöin $z + y$



$$\sin 37^\circ = \frac{x}{6,3}$$

$x = 6,3 \cdot \sin 37° = 3,79143\ldots \approx 3,791$

$$\cos 37^\circ = \frac{y}{6,3}$$

$y = 6,3 \cdot \cos 37° = 5,03140\ldots \approx 5,031$
Pythagoraan lause:
$z^2 + 3,791^2 = 4,2^2$
Laskentaohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan $z = 1,80784\ldots$ tai
$z = -1,80784\ldots$
Negatiivinen ratkaisu ei käy, joten $z \approx 1,808$.
Kolmannen sivun pituus on
$z + y = 1,808 + 5,031 = 6,839 \approx 6,8$

Kolmannen sivun pituus on 6,8 cm.

143. Etu- ja takaseinän korkeuden ero on 2,6 – 2,1 = 0,5 (m).

Lasketaan katon kaltevuuskulma.

$$\tan\alpha = \frac{0,5}{2}$$
$$\alpha = 14,0362\ \ldots°$$

Katon reunan vaakasuora leveys on
0,45 + 2,0 + 0,45 = 2,9 (m).

Lasketaan katon lappeen pituus *x*.

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

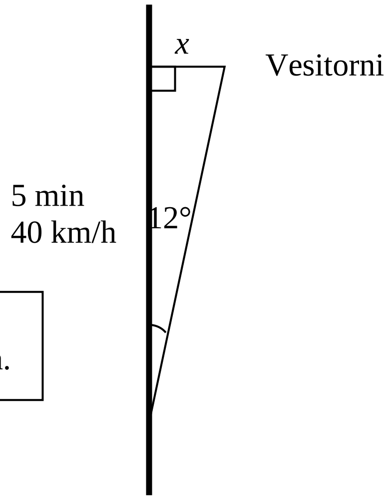
$$\cos 14,04° = \frac{2,9}{x}$$
$$\cos 14,04° \cdot x = 2,9$$
$$x = \frac{2,9}{\cos 14,04°} =$$
$$x = 2,9893\ldots\ \text{(m)}$$

Lappeen leveys on
0,45 + 3,0 + 0,45 = 3,9 (m).

Pinta-ala on
$A = 3,9 \cdot 2,989 = 11,65\ \ldots \approx 12\ (\text{m}^2)$.

144. Piirretään tilanteesta mallikuva.
Lasketaan 5 minuutin aikana kuljettu matka.

$$5\text{ min} = \frac{5}{60}\text{h} = \frac{1}{12}\text{ h}$$
$$\frac{1}{12}\text{ h} \cdot 40\text{ km/h} = 3\frac{1}{3}\text{ km}$$



Lasketaan, kuinka kaukana vesitorni on tiestä.

$$\tan 12° = \frac{x}{3\frac{1}{3}}$$
$$x = \tan 12° \cdot 3\frac{1}{3}$$
$$x = 0,7085\ldots \approx 0,71\text{ (km)}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

0,71 km = 710 m

145. Vasemmanpuoleisen neliön sivun pituus on

$$s_v = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Neliön pinta-ala on $2{,}5^2 = 6{,}25$.

Oikeanpuoleisen neliön sivun pituutta merkitään x:llä.
Hypotenuusan pituus on $3x$.

$$(3x)^2 = 5^2 + 5^2$$
$$9x^2 = 50$$
$$x^2 = \frac{50}{9}$$
$$x = \sqrt{\frac{50}{9}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} = 2{,}3570... \approx 2{,}36$$

Oikeanpuoleisen neliön sivun pituus $2{,}36 < 2{,}5$ eli oikeanpuoleisen neliön pinta-ala on myös pienempi.

146. a)

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

b) Piirretään kolmio ja sille kulman A puolittaja. Haetaan laskentaohjelmalla sivun BC ja kulmanpuolittajan leikkauspiste D. Saadaan, että $D(1{,}59;\ 1{,}83)$.

Kuvioita

147. a) C b) B c) A d) C e) B

148. $A = \pi \cdot 6{,}85^2 = 147{,}41 \ldots \approx 147$ (cm^2)
$p = 2 \cdot \pi \cdot 6{,}85 = 43{,}039 \ldots \approx 43{,}0$ (cm)

149. a) $b = \frac{300°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3{,}7 = 19{,}37... \approx 19$ (cm)

b) $A_S = \frac{300°}{360°} \cdot \pi \cdot 3{,}7^2 = 35{,}84... \approx 36$ (cm^2)

150. a) $36 \cdot 26 = 936 \approx 940$ (cm^2)

b) $\frac{1{,}8 + 3{,}5}{2} \cdot 2{,}6 = 6{,}89 \approx 6{,}9$ (cm^2)

151. Jaetaan säännölliset monikulmiot tasakylkisiksi kolmioiksi niin, että kolmioiden kärjet ovat monikulmion keskipisteessä.

a) Kuusikulmio muodostuu kuudesta tasakylkisestä kolmiosta. Tasakylkisen kolmion huippukulma on $\frac{360°}{6} = 60°$.

Kantakulmat α ovat suuruudeltaan $\alpha = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Kuusikulmion kulman suuruus on $2 \cdot 60° = 120°$.

b) Viisikulmio muodostuu viidestä tasakylkisestä kolmiosta. Tasakylkisen kolmion huippukulma on $\frac{360°}{5} = 72°$.

Kantakulmat α ovat suuruudeltaan $\alpha = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$.

Viisikulmion kulman suuruus on $2 \cdot 54° = 108°$.

152. a) $p = \pi \cdot 42 = 131{,}9 \ldots \approx 130$ (cm)

b) $\pi d = 156 \quad | : \pi$
$d = \frac{156}{\pi} = 49{,}656... \approx 49{,}7$ (cm)

153. a) $A_S = \frac{15°}{360°} \cdot \pi \cdot 5{,}0^2 = 3{,}272... \approx 3{,}3$ (m^2)

b) $\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 14^2 = 32$

Laskemalla:

$\frac{\alpha}{360°} \cdot 196\pi = 32 \qquad | \cdot 360°$

$\alpha \cdot 196\pi = 32 \cdot 360° \qquad | : 196\pi$

$\alpha = \frac{32 \cdot 360°}{196\pi} = 18{,}70\ldots° \approx 19°$

Laskentaohjelmalla:

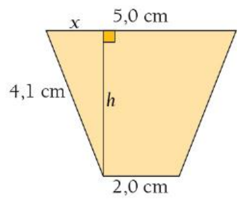
$\frac{\alpha}{360°} \cdot 196\pi = 32$

□ = 18,70…° ≈ 19°

154. a) Kulmasta piirretty korkeusjana erottaa puolisuunnikkaasta suorakulmaisen kolmion.

Kolmion toisen kateetin *x* pituus on

$\frac{5{,}0 - 2{,}0}{2} = 1{,}5 \text{ (cm)}$.



Korkeus *h* voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

$h^2 + 1{,}5^2 = 4{,}1^2$

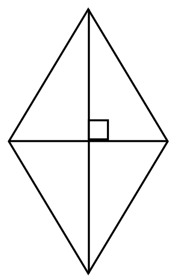
Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

h = 3,8157… □ 3,8 (cm) tai

h = –3,8157… □ –3,8 (cm) Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on $A = \frac{5{,}0 + 2{,}0}{2} \cdot 3{,}816 = 13{,}35\ldots \approx 13 \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Lävistäjät puolittavat toisensa ja leikkaavat suorassa kulmassa.
Neljäkäs jakaantuu neljäksi yhteneväksi kolmioksi.
Kunkin kolmion kateettien pituudet ovat 1,75 cm ja 1,05 cm.



Kolmion pinta-ala on

$A_K = \frac{1{,}75 \cdot 1{,}05}{2} = 0{,}91875 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Neljäkkään pinta-ala on

A = 4 · 0,91875 = 3,675 ≈ 3,7 (cm^2).

155. Koska neliön ala on yksi ja yhden apuneliön ala on $\frac{1}{16}$.

Kuviosta näkee suoraan, että

$a(A) = a(B) = \frac{1}{4}$

$a(C) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

$a(D) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$a(E) = a(C) = \frac{1}{16}$

$a(F) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$a(G) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$.

156.

$A = ah$

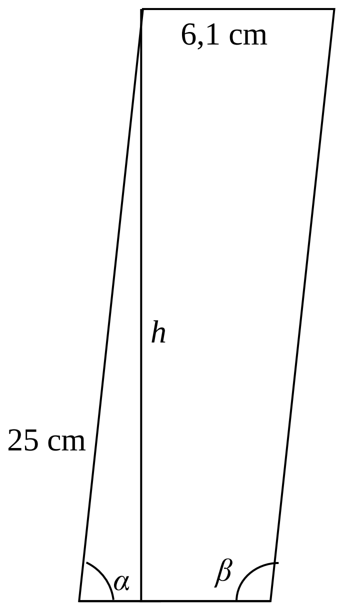
$6{,}1h = 124 \quad |:6{,}1$

$h = 20{,}327\ldots \approx 20{,}3$ (cm)

$\sin\alpha = \frac{20{,}33}{25}$

$\alpha = 54{,}40\ldots° \approx 54°$

$\beta = 180° - 54° = 126°$



157. a) Merkitään kuvaruudun leveyttä $16a$:lla ja korkeutta $9a$:lla.
Lävistäjä $d = 40$ tuumaa eli $40 \cdot 2{,}54$ cm $= 101{,}6$ cm.

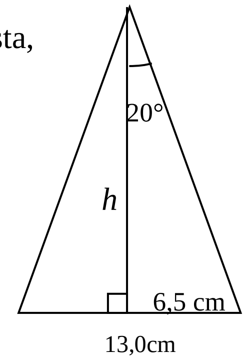
Pythagoraan lause:
$(16a)^2 + (9a)^2 = 101{,}6^2$

Laskentaohjelmalla:
$(16a)^2 + (9a)^2 = 101.6^2$
RatkaiseNumeeriseti: $\{a = -5.5345, a = 5.5345\}$

Kuvaruudun leveys on $16a = 16 \cdot 5{,}5345$ cm $= 88{,}5520$ cm $\approx 88{,}6$ cm ja korkeus $9a = 9 \cdot 5{,}5345$ cm $= 49{,}8195$ cm $\approx 49{,}8$ cm.

b) Kuvaruudun pinta-ala on
$A = 16a \cdot 9a = 144a^2 \approx 4\,411$ (cm^2).

158. Säännöllinen 9-kulmio koostuu yhdeksästä tasakylkisestä kolmiosta, joiden huippukulma on $\frac{360°}{9} = 40°$.



Muodostetaan kolmion korkeudelle yhtälö ja ratkaistaan se.

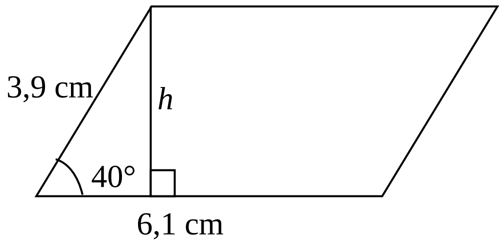
$$\tan 20° = \frac{6{,}5}{h}$$

$$\tan 20° \cdot h = 6{,}5$$

$$h = \frac{6{,}5}{\tan 20°} = 17{,}85860\ldots \approx 17{,}859 \text{ (cm)}$$

$$A = 9 \cdot \frac{13{,}0 \cdot 17{,}859}{2} = 1\,044{,}7515 \approx 1\,040 \text{ (cm}^2\text{)}$$

159. Suunnikkaan korkeus h saadaan suorakulmaisen kolmion avulla, jonka toinen kateetti on korkeusjana.



$$\sin 40° = \frac{h}{3{,}9}$$

$$h = \sin 40° \cdot 3{,}9 = 2{,}50687\ldots \approx 2{,}507 \text{ (cm)}$$

Pinta-ala on $A = 2{,}507 \cdot 6{,}1 = 15{,}2927 \approx 15$ (cm^2).

Suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180°.
180° – 40° = 140°.

Kulmien suuruudet ovat 40°, 140°, 40° ja 140°.

160. $$A_S = \frac{15°}{360°} \cdot \pi r^2 = 35$$

Laskemalla:

$$\frac{15°}{360°} \cdot \pi r^2 = 35 \qquad | \cdot 360°$$

$$15° \cdot \pi r^2 = 35 \cdot 360° \qquad | : (15° \cdot \pi)$$

$$r^2 = \frac{35 \cdot 360°}{\pi \cdot 15°}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{35 \cdot 360°}{\pi \cdot 15°}}$$ Negatiivinen vastaus ei käy.

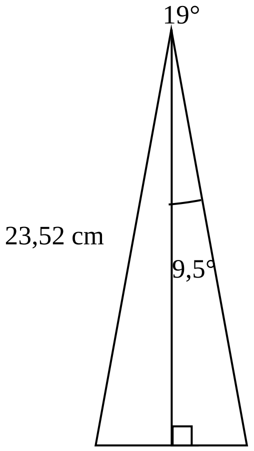
$$r = 16{,}35\ldots \approx 16 \text{ (cm)}$$

Laskentaohjelmalla:

$$\frac{15°}{360°} \cdot \pi r^2 = 35$$

$r = 16{,}35\ldots \approx 16$ (cm) tai
$r = -16{,}35\ldots \approx -16$ (cm) Negatiivinen vastaus ei käy.

161. Ympyrän säde saadaan kaaren pituuden yhtälöstä.



Laskemalla:

$$\frac{29°}{360°}\cdot 2\pi r = 7{,}8 \qquad | \cdot 360°$$

$$29° \cdot 2\pi r = 7{,}8 \cdot 360° \qquad | : (19° \cdot 2\pi)$$

$$r = \frac{7{,}8 \cdot 360°}{29° \cdot 2\pi} = 15{,}4105\ \ldots \approx 15{,}41\ \text{(cm)}$$

Laskentaohjelmalla:

$$\frac{29°}{360°}\cdot 2\pi r = 7{,}8$$

$r = 15{,}4105\ \ldots \approx 15{,}41$ (cm)

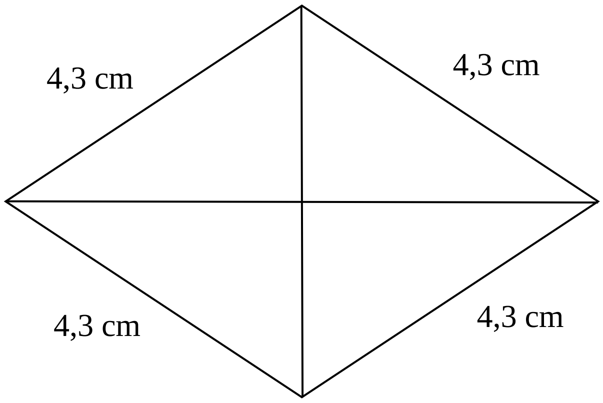
Kaksi sädettä ja jänne muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka huippukulma on 19°. Kolmio voidaan jakaa kahdeksi yhteneväksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Suorakulmaisen kolmion kanta on puolet jänteestä ja huippukulma puolet keskuskulmasta.

$$\sin 14{,}5° = \frac{x}{15{,}41}$$

$$x = \sin 14{,}5° \cdot 15{,}41 = 3{,}85835\ldots \approx 3{,}858\ \text{(cm)}$$

Jänteen pituus on $2 \cdot 3{,}858 = 7{,}716$ (cm)

162. Piirretään kuva laskentaohjelmalla ja katsotaan mitta kuvasta.



Neljäkkään sivun pituus on 4,3 cm.

163. a) Merkitään neliön sivun pituutta a:lla.
Neliön piiri $p = 4a$ *ja neliön pinta-ala on* $A_{neliö} = a^2$.
Merkitään ympyrän sädettä r:llä. Ympyrän kehän pituus on 2□r ja pinta-ala on $A_{ymyrä}$ = □r^2.

Nyt $4a$ = 2□r ja ratkaistaan a.

$$a = \frac{\pi r}{2}$$

Lasketaan alojen suhde.

$$\frac{A_{neliö}}{A_{ympyrä}} = \frac{a^2}{\pi r^2} = \frac{\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$$

Neliön ala on siis 100 % – 78,54 % = 21,46 % pienempi.

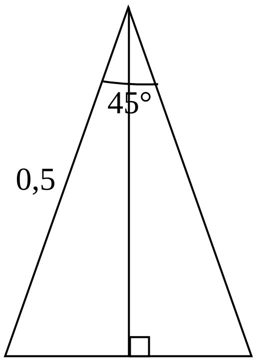
b)

$$\frac{A_{ympyrä}}{A_{neliö}} = \frac{4}{\pi} \approx 1,2732$$

Ympyrän ala on siis 127,3 % – 100 % = 27,3 % suurempi.

164. Ympyrän säde on 0,5.
Ympyrän kehän pituus on $2\pi \cdot 0,5 = \pi$ ($\approx 3,14$).
Kahdeksankulmion halkaisija on 1.
Kahdeksankulmio voidaan jakaa kahdeksaksi yhteneväksi tasakylkiseksi kolmioksi.

Kolmion huippukulma on $\frac{360°}{8} = 45°$ ja kylki 0,5.



Kannan pituus saadaan yhtälöstä

$$\sin 22,5° = \frac{x}{0,5}.$$

$$x = \sin 22,5° \cdot 0,5$$

Kanta on
$2 \cdot \sin 22,5° \cdot 0,5 = \sin 22,5°$.

Kahdeksankulmion piirin pituus viiden desimaalin tarkkuudella on
$8 \cdot \sin 22,5° = 3,0614674\ldots \approx 3,06147$.

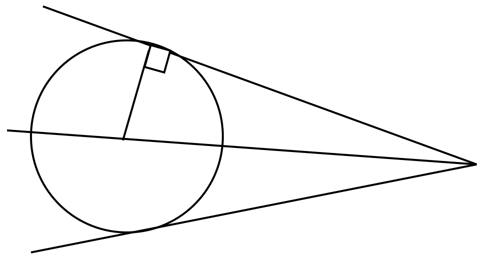
$$\frac{3,06147}{\pi} = 0,97449... \approx 0,974$$

100 % – 97,4 % = 2,6 %

165. Maan säde on $R = \dfrac{40\ 000}{2\pi} = 6\ 366{,}19... \approx 6\ 370$ (km).

Katseen suunta Maapallon pintaa pitkin kulkee ympyrän tangenttia pitkin.
Tangentti ja ympyrän säde ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
Tangentin osa hypotenuusana ja säde toisena kateettina muodostavat
suorakulmaisen kolmion, jonka toinen terävä kulma on $\dfrac{25°}{2} = 12{,}5°$.

Toinen kateetti muodostuu Maan säteestä *R* ja etäisyydestä satelliitista
Maan pinnalle *x*.



$$\sin 12{,}5° = \frac{R}{R+x}$$

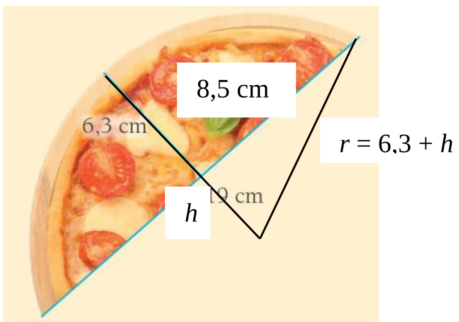
$$\sin 12{,}5°\,(R+x) = R$$

$$\sin 12{,}5° \cdot R + \sin 12{,}5° \cdot x = R$$

$$\sin 12{,}5° \cdot x = R - \sin 12{,}5° \cdot R$$

$$x = \frac{R - \sin 12{,}5° R}{\sin 12{,}5°} = 23\ 060,\ \ldots \approx 23\ 000 \text{ (km)}$$

166.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$(6{,}3 + h)^2 = 9{,}5^2 + h^2$
$h = 4{,}0127$

Halkaisija on
$2 \cdot (6{,}3 + 4{,}0127) = 20{,}6254$ □ 21 (cm).

167. a) Jos kuusikulmion kaksi viereistä kärkeä yhdistetään keskipisteeseen, syntyy tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on *r*. Tästä näkyy, että leveys $x = 2r$.

b) Yhdistämällä kolme vierekkäistä kärkeä keskipisteeseen, saadaan kaksi tasasivuista kolmiota, joissa sivun pituus on *r*. Kuusikulmion korkeus *y* on näiden kolmioiden korkeuksien summa.

$$y = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

c) Kuusikulmio jakautuu kärjistä keskipisteeseen piirretyillä janoilla kuuteen tasasivuiseen kolmioon, joiden pinta-alojen summa on

$$6\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}.$$

Kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}-\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi r^2}{4}=r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Koontitehtäviä luvuista 1–3

168. a) C b) B c) C d) B e) C f) A

169. a)

$14x – 50 = 3(x + 20)$
$14x – 50 = 3x + 60$
$11x = 110 \quad | : 11$
$x = 10$

b) $(–5)^2 – 3 \cdot (–5) – 4 = 25 + 15 – 4 = 36$

c)

$$^{3)}\frac{3}{x}+\frac{5}{3x}=\frac{9}{3x}+\frac{5}{3x}=\frac{14}{3x}$$

170. a) $89 – 69 = 20$

$$\frac{20}{89}=0,2247\ldots\approx 0,22=22\,\%$$

b)

$$\frac{11\cdot(-3)-(-5,5)}{11-(-3)\cdot(-5,5)}=\frac{-33+5,5}{11-16,5}=\frac{-27,5}{-5,5}=5$$

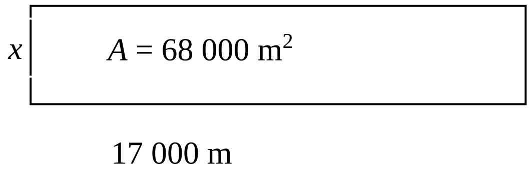
c)

$2x^2 + 7 = 15x$
$2x^2 – 15x + 7 = 0 \qquad a = 2,\ b = –15,\ c = 7$

$$x=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 2\cdot 7}}{2\cdot 2}=\frac{15\pm\sqrt{169}}{4}=\frac{15\pm 13}{4}$$

$$x=\frac{15+13}{4}=7 \text{ tai } x=\frac{15-13}{4}=\frac{1}{2}$$

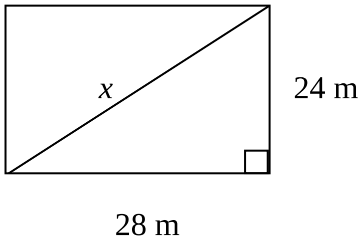
171. a) Muutetaan mittojen yksiköt vastaamaan toisiaan.
17 km = 17 000 m
6,8 ha = 680 a = 68 000 m^2



$17\,000x = 68\,000 \quad | : 17\,000$
$x = 4$ (m)

4 m = 4 000 mm

b) Lävistäjän x pituus lasketaan Pythagoraan lauseen avulla.



$x^2 = 24^2 + 28^2$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
$x = –36,87…$□ $–37$ (m) Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.
tai
$x = 36,87…$□ 37 (m)

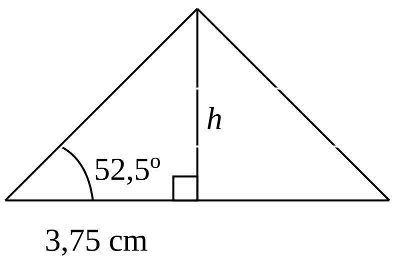
172. Laskemalla:
$2x – 10° + (x + 10°) + (x + 10°) = 180°$
$2x – 10° + x + 10° + x + 10° = 180°$
$4x + 10° = 180°$
$4x = 170° \quad | : 4$
$x = 42,5°$

Laskentaohjelmalla:
$2x – 10° + (x + 10°) + (x + 10°) = 180°$
$x = 42,5°$

Kulmien suuruudet ovat
$2x – 10° = 2 \cdot 42,5° – 10° = 75°$

$x + 10° = 42,5° + 10° = 52,5°$.

Kolmio on tasakylkinen.



Kannan puolikas on $\frac{7,5}{2} = 3,75$ (cm).

Korkeus lasketaan tangentin avulla.
$\tan 52,5° = \frac{h}{3,75} \quad | \cdot 3,75$
$h = 3,75 \cdot \tan 52,5°$
$h = 4,88709…$ □ $4,887$ (cm)

Kolmion pinta-ala on $\frac{7,5 \cdot 4,887}{2} = 18,32625 \approx 18$ (cm^2).

173. Kuvion pinta-ala on 13,18577 ja kulman suuruus 152,30769°.

174. Merkitään opiskelijoiden määrää x:llä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+57=x$$

$$x = 180$$

Lukiossa on 180 opiskelijaa.

175. a) Laskentaohjelma:
Piirretään kuvio ja määritetään siitä huippukulman suuruus.
Se on 26°.

Laskemalla:
Merkitään huippukulman puolikasta a:lla. Kannan puolikas on 20 m ja

$\sin □ = \frac{20}{90}$.

□ □ 12,84°, joten huippukulma on 2□ □ 26°.

b) Laskentaohjelma:
Piirretään kuvio ja määritetään sitä kolmion pinta-ala.
Se on 1 755 m^2.

Laskemalla:

Merkitään kolmion korkeutta h:lla. Tällöin $\cos □ = \frac{h}{90}$.

h = 90cos□ □ 87,75

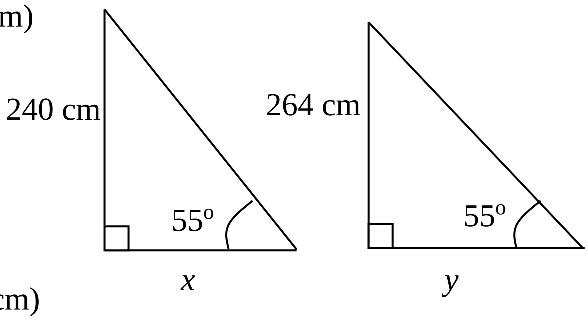
Pinta-ala on $\frac{40h}{2} = 20h \approx 1\,755\ (\text{m}^2)$

176. Varjon pituus alussa:

$$\tan 55° = \frac{240}{x} \qquad | \cdot x$$

$$x \cdot \tan 55° = 240 \qquad | : \tan 55°$$

$$x = \frac{240}{\tan 55°} = 168{,}0498... \approx 168{,}05\,(\text{cm})$$



Varjon pituus lopussa:

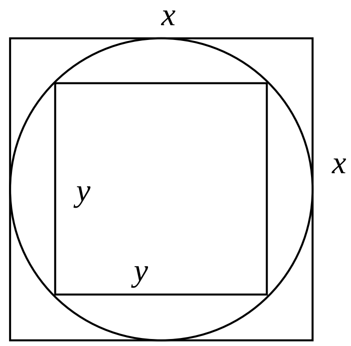
$$\tan 55° = \frac{264}{y} \qquad | \cdot y$$

$$y \cdot \tan 55° = 264 \qquad | : \tan 55°$$

$$y = \frac{264}{\tan 55°} = 184{,}8547... \approx 184{,}85\ (\text{cm})$$

Varjon pituuden muutos: $y – x$ = 184,85 – 168,05 = 16,80 □ 17 (cm)

177. Neliön sivun pituus:
$x^2 = 16{,}0$
$x = \pm\sqrt{16{,}0}$ Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.
$x = 4{,}0$ (cm)



Ympyrän halkaisija on sama kuin neliön sivun pituus.
Ympyrän säde: $r = \dfrac{4{,}0}{2} = 2{,}0$ (cm)

Ympyrän pinta-ala:
$A = □r^2 = □ \cdot 2{,}0^2 = 12{,}566\ldots □\ 12{,}6$ (cm^2)

Pienemmän neliön sivun pituus saadaan Pythagoraan lauseella.
$y^2 + y^2 = 4{,}0^2$

Ratkaistaan y laskentaohjelmalla.
$y = -2{,}82842\ldots □ -2{,}828$ (cm) Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.
tai
$y = 2{,}82842\ldots □\ 2{,}828$ (cm)

Neliön ala: $A = 2{,}828^2 = 7{,}997584\ □\ 8{,}0$ (cm^2)

178.

Tilanne	**Litrahinta (€)**	**Päivämyynti (l)**	**Päivämyynnin tulot (€)**
Alussa	h	m	hm
Lopussa	$1{,}050h$	$x \cdot m$	$0{,}972hm$

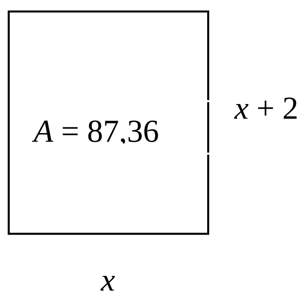
Ratkaistaan yhtälön avulla kerroin x.
$1{,}050h \cdot x \cdot m = 0{,}972hm \quad | : hm$
$1{,}050x = 0{,}972 \quad | : 1{,}050$
$x = 0{,}925714\ldots □\ 0{,}9257$

Hinnankorotuksen jälkeinen päivämyynti $0{,}9257m$ on 92,57 % aiemmasta päivämyynnistä m.

Myynti pieneni 100 % – 92,57 % = 7,43 % □ 7,4 %.

179. Merkitään leveyttä x:llä. Korkeus on $x + 2$. Muodostetaan yhtälö suorakulmion korkeudelle ja ratkaistaan x laskentaohjelmalla.
$x(x + 2) = 87{,}36$
$x = 8{,}4$ tai $x = -10{,}4$ Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.

Leveys on 8,4 m ja korkeus 8,4 m + 2 m = 10,4 m.



4 LISÄÄ YHTÄLÖITÄ

Kahden muuttujan yhtälö

180. a) $k=\dfrac{22-2}{11-1}=\dfrac{20}{10}=2$

b) $k=\dfrac{3-3}{-11-(-1)}=\dfrac{0}{-10}=0$

181. a) $x=0,\ y=6$
$6=-4\cdot 0+6$
$6=6$ tosi
Piste on suoralla.

b) $x=-4,\ y=6$
$6=-4\cdot(-4)+6$
$6=22$ epätosi
Piste ei ole suoralla.

c) $x=1,\ y=2$
$2=-4\cdot 1+6$
$2=2$ tosi
Piste on suoralla.

182. a)

$$\begin{cases}3x-y=1\\ x+y=3\end{cases}$$

$$4x=4 \quad |:4$$
$$x=1$$

$$1+y=3$$
$$y=2$$

$$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y = 2x + 8 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

$x + (2x + 8) = –4$
$x + 2x + 8 = –4$
$3x = –12 \quad | : 3$
$x = –4$

$y = 2 \cdot (–4) + 8 = 0$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

183. a) Suoran ja y-akselin leikkaupisteessä $x = 0$. Pisteen y-koordinaatti on suoran yhtälön vakiotermi –1. Oikea vastaus on B.

b) Muokataan suoran yhtälöä.
$5x + y – 3 = 0$
$y = –5x + 3$

Suoran kulmakerroin on –5, joten suora on laskeva. Oikea vastaus on B.

c) Suoran kulmakerroin on 2, ja suora leikkaa y-akselin, kun $y = –6$. Oikea vastaus on A.

184. Suorien leikkauspiste saadaan selville ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

$–3x + 9 = 2x – 6$
$–5x = –15 \quad | : (–5)$
$x = 3$

$y = 2 \cdot 3 – 6 = 0$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

185. Käytetään suoran yhtälön kaavaa $y - y_0 = k(x - x_0)$

a) $k = 5$ ja piste (6, 3)

$y - 3 = 5(x - 6)$

$y - 3 = 5x - 30$

$y = 5x - 27$

b) $k = -3$ ja piste (9, –1)

$y - (-1) = -3(x - 9)$

$y + 1 = -3x + 27$

$y = -3x + 26$

186. a)

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - y = 4 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -x + y = -4 \end{cases}$$

$3y = 3 \quad | : 3$

$y = 1$

$x - 1 = 4$

$x = 5$

b)

$$\begin{cases} 7x + 2y = 16 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$7x + 2(x - 1) = 16$

$7x + 2x - 2 = 16$

$9x = 18 \quad | : 9$

$x = 2$

187. a) $y = -4x + 12$

Kulmakerroin on $k = -4$.

b) $y = -4x + 12$

Suora leikkaa y–akselin pisteessä (0, 12).

c) x–akselilla $y = 0$

$0 = -4x + 12$

$4x = 12 \quad | : 4$

$x = 3$

Suora leikkaa x–akselin pisteessä (3, 0).

188. Kulmakerroin on

$$k=\frac{3-8}{3-(-7)}=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}.$$

Suoran yhtälö on

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-3)$$
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+3$$
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}.$$

Sijoitetaan suoran yhtälöön $x = 123$ ja $y = –57$ ja tutkitaan, toteutuuko yhtälö.

$$-57=-\frac{1}{2}\cdot 123+\frac{9}{2}$$
$$-57=-57$$

Yhtälö on tosi, joten piste (123, –57) on suoralla.

189. a)

$$\begin{cases}x+2y=5\\3x-y=1 & |\cdot 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y=5\\6x-2y=2\end{cases}$$
$$7x\quad =7 \quad |:7$$
$$x=1$$

$$3\cdot 1-y=1$$
$$-y=1-3$$
$$-y=-2 \quad |:(-1)$$
$$y=2$$

b)

$$\begin{cases}3r-4s=-8 & |\cdot 3\\2r+3s=57 & |\cdot 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}9r-12s=-24\\8r+12s=228\end{cases}$$
$$17r\quad =204 \quad |:17$$
$$r=12$$

$2 \cdot 12 + 3s = 57$

$3s = 57 - 24$

$3s = 33 \quad | : 3$

$s = 11$

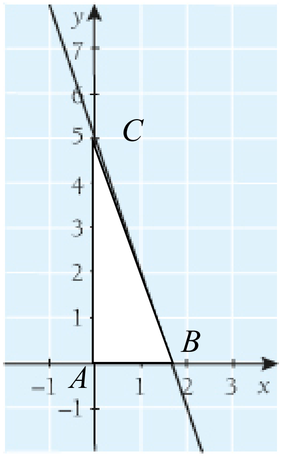
190. Merkitään yksiköiden määrää x:llä ja pariairokaksikoiden määrää y:llä. Veneiden lukumäärä on $x + y = 14$. Airojen lukumäärä on $2x + 4y = 36$. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 2x + 4y = 36 \end{cases}$$

$x = 10$ ja $y = 4$

Yksikköjä on kymmenen ja pariairokaksikoita neljä.

191. a) Piirretään kolmio esimerkiksi geometriaohjelmalla ja määritetään sen pinta-ala ohjelman mittaustoiminnolla.



Pinta-alan kaksidesimaalinen likiarvo on 4,17.

b) Suora $y = -3x + 5$ leikkaa y-akselin kohdassa $y = 5$.
x-akselin leikkauspiste saadaan yhtälöstä

$0 = -3x + 5$.

$3x = 5 \quad | : 3$

$$x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{5 \cdot \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}.$$

192. Merkitään aikuisten lippujen lukumäärää x:llä ja lasten y:llä.
Lippujen määrästä saadaan yhtälö $x + y = 167$.
Myyntituloista saadaan yhtälö $8x + 5y = 1\ 105$.
Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\begin{cases} x + y = 167 \\ 8x + 5y = 1\ 105 \end{cases}$$

$x = 90$ ja $y = 77$

Aikuisten lippuja myytiin 90 ja lasten 77 kappaletta.

193. Vaiheiden järjestys
$8x + 2y + 5 = 0$
$2y = –8x – 5$ G
$y = –4x – 2,5$ C

Tästä nähdään suoran kulmakerroin.
$k = –4$ D
Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit suoran yhtälön kaavaan ja muokataan saatua yhtälöä.
$y – 3 = –4(x – 1)$ A
$y – 3 = –4x + 4$ E
$y = –4x + 7$ B
Kohta F ei kuulu ratkaisuun.

Oikea rivi on G, C, D, A, E, B.

194. Yhtälöstä $2x - 3 = 3x - 2$ saadaan leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$2x - 3 = 3x - 2$$
$$2x - 3x = -2 + 3$$
$$-x = 1 \qquad | : (-1)$$
$$x = -1$$

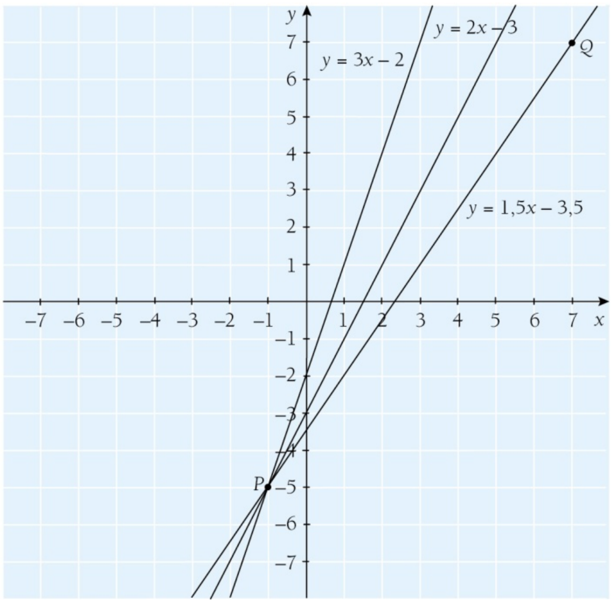
Vastaava y-koordinaatti on $y = 2(-1) - 3 = -5$.
Suoran s kulmakerroin

$$k = \frac{7-(-5)}{7-(-1)} = \frac{7+5}{7+1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5\,.$$

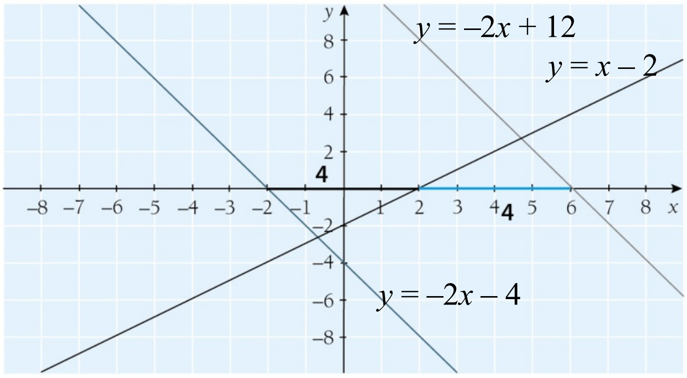
Suoran s yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$(x_0, y_0) = (7, 7)$$
$$y - 7 = 1,5 \cdot (x - 7)$$
$$y - 7 = 1,5x - 10,5$$
$$y = 1,5x - 10,5 + 7$$
$$y = 1,5x - 3,5$$

Piste P on $(-1, -5)$ ja suoran s yhtälö on $y = 1,5x - 3,5$.



195. Piirretään tilanteesta kuva esimerkiksi geometriaohjelmalla, ja muutetaan liukusäätimen avulla vakion b arvoa yhtälössä $y = –2x + b$.



Kuvan mukaan ratkaisuja näyttäisi olevan kaksi, $b = 12$ ja $b = –4$. Perustellaan tämä laskuilla.
Suora $y = x – 2$ leikkaa x–akselin pisteessä, jonka y-koordinaatti on nolla.

$$0 = x - 2$$
$$-x = -2$$
$$x = 2.$$

Suoran $y = –2x + b$ täytyy leikata x-akseli joko pisteessä (6, 0) tai (–2, 0).

Kun leikkauspiste on (6, 0), saadaan yhtälö

$$0 = -2 \cdot 6 + b$$
$$12 = b$$
$$b = 12$$

Kun leikkauspiste on (–2, 0), saadaan yhtälö

$$0 = -2 \cdot (-2) + b$$
$$-4 = b$$
$$b = -4.$$

Siis $b = 12$ tai $b = –4$.

196.
$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 5x+3 \end{cases}$$

$2x + 1 = 5x + 3$
$2x - 5x = 3 - 1$
$-3x = 2 \quad | : (-3)$
$x = -\frac{2}{3}$

$y = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{3}$

Leikkauspiste on $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

197. a) Suoran kulmakerroin $k = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$.

Suoran s yhtälö on
$y - y_0 = k\,(x - x_0)$
$(x_0, y_0) = (1, 2)$
$y - 2 = \frac{1}{3} \cdot (x - 1)$
$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 2$
$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

b) Sijoitetaan pisteen x-koordinaatti yhtälöön. Mikäli y:n arvoksi tulee 40, piste on suoralla.

$y = \frac{1}{3} \cdot 120 + \frac{5}{3} = 41\frac{2}{3}$

Piste (120, 40) ei ole suoralla $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

198. a)

$$\begin{cases} x+y=1 & |\cdot 3 \\ 2x-3y=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+3y=3 \\ 2x-3y=37 \end{cases}$$

$$5x \qquad = 40 \quad |:5$$

$$x = 8$$

$$8+y = 1$$

$$y = 1-8 = -7$$

b)

$$\begin{cases} 2x+5y=26 \\ y=3x-5 \end{cases}$$

$$2x + 5(3x-5) = 26$$

$$2x + 15x - 25 = 26$$

$$17x = 26 + 25$$

$$17x = 51 \qquad |:3$$

$$x = 3$$

$$y = 3 \cdot 3 - 5$$

$$y = 4$$

199.

$$x + 7y - 6 = 0$$

$$7y = -x + 6 \qquad |:7$$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$$

a) Kulmakerroin on $k = -\frac{1}{7}$.

b) Suora leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, \frac{6}{7}\right)$.

c) Suora leikkaa x-akselin, kun $y = 0$. Sijoitetaan tämä yhtälön alkuperäiseen muotoon.

$$x + 7 \cdot 0 - 6 = 0$$

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Suoran ja x-akselin leikkauspiste on (6, 0).

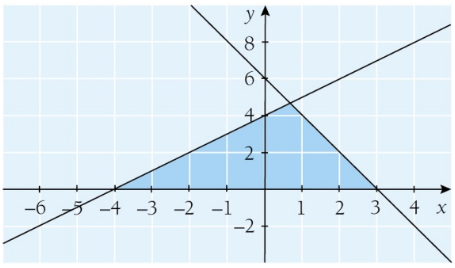
200. Merkitään maalin A määrää x:llä ja maalin B määrää y:llä, kun yksikkönä on litra.
Keltaiselle pigmentille saadaan yhtälö $80x + 120y = 3\ 200$.
Siniselle pigmentille saadaan yhtälö $110x + 90y = 3\ 500$.
Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\begin{cases} 80x + 120y = 3200 \\ 110x + 90y = 3500 \end{cases}$$

$x = 22$ ja $y = 12$

Maalia A valmistettiin 22 litraa ja maalia B 12 litraa.

201. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Kolmion korkeus saadaan leikkauspisteen y–koordinaatista.

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

$$x + 4 = -2x + 6$$
$$3x = 2 \quad |:3$$
$$x = \frac{2}{3}$$
$$y = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3}$$

Kolmion kanta on suorien ja x-akselin leikkauspisteiden välinen etäisyys.

$$0 = x + 4$$
$$-x = 4$$
$$x = -4$$

$$0 = -2x + 6$$
$$2x = 6 \quad |:2$$
$$x = 3$$

Kolmion kanta on $4 + 3 = 7$.

Pinta-ala on $A = \dfrac{7 \cdot 4\frac{2}{3}}{2} = 16\frac{1}{3}$.

202. Merkitään appelsiini-ananasjuoman määrää x:llä
ja ananas-appelsiinijuoman määrää y:llä, kun yksikkönä on litra.
Ananasmehutiivisteen määrästä saadaan yhtälö $50{,}0x + 20{,}0y = 10\ 000$.
Appelsiinimehutiivisteen määrästä saadaan yhtälö $30{,}0x + 100{,}0y = 30\ 000$.
Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\begin{cases} 50{,}0x + 20{,}0y = 10\ 000 \\ 30{,}0x + 100{,}0y = 30\ 000 \end{cases}$$

$x = 90{,}90909\ldots \approx 90{,}9$ ja $y = 272{,}7275 \approx 273$

Ananas-appelsiinimehua valmistetaan 90,9 litraa ja appelsiini-ananasmehua 273 litraa.

203. Suoran ja paraabelin leikkauspiste saadaan selville yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$

$2x - 4 = -x^2 + 3x - 2$

$x^2 - x - 2 = 0 \qquad a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

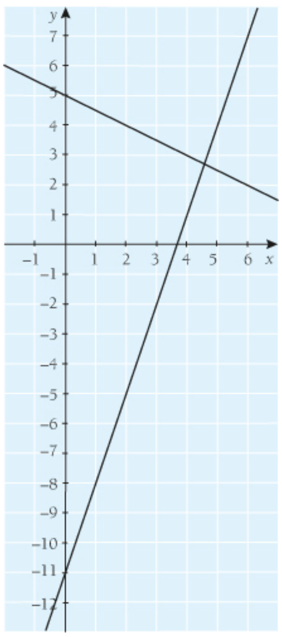
$x = -1$ tai $x = 2$

$y = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$ tai
$y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$
Leikkauspisteet ovat $(-1, -6)$ ja $(2, 0)$.

204. Kohtisuoran kulmakerroin k saadaan yhtälöstä

$$k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$k = 2$$



Kohtisuoran yhtälö on
$y - (-3) = 2(x - 4)$
$y + 3 = 2x - 8$
$y = 2x - 11$

205. Suorat, jotka eivät leikkaa toisiaan, ovat yhdensuuntaiset.
Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, $k = 2$.

Pisteiden avulla laskettuna kulmakerroin on $k = \frac{2-(-2)}{-2-a}$.

$$\frac{2-(-2)}{-2-a} = 2 \qquad | \cdot (-2-a)$$
$$2 + 2 = 2\,(-2-a)$$
$$4 = -4 - 2a$$
$$2a = -8$$
$$a = -4$$

206. $A = (-1, 1)$, $B = (8, 4)$

Janan AB keskipisteen koordinaatit:

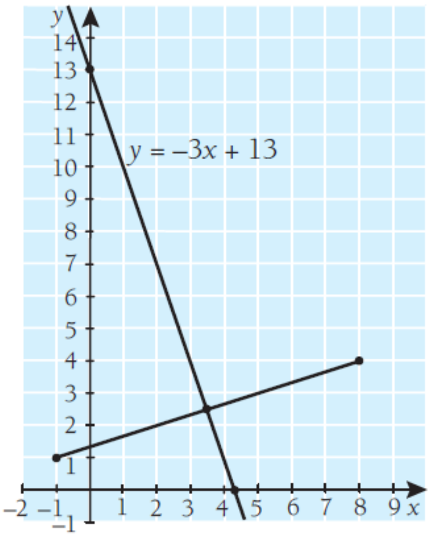
$$x = \frac{-1+8}{2} = \frac{7}{2}$$
$$y = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

Janan AB kulmakerroin:

$$k_{AB} = \frac{4-1}{8+1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3} \cdot k = -1$$
$$k = -3$$

Suoran yhtälö on

$$y - \frac{5}{2} = -3(x - \frac{7}{2})$$
$$y = -3x + \frac{21}{2} + \frac{5}{2}$$
$$y = -3x + 13$$



Lasketaan, missä pisteessä suora leikkaa x-akselin.

$y = 0$

$$-3x + 13 = 0$$
$$-3x = -13$$
$$x = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$$

Lasketaan, missä pisteessä suora leikkaa y-akselin.

$x = 0$

$y = -3 \cdot 0 + 13 = 13$

Suoran yhtälö on $y = -3x + 13$. Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(4\frac{1}{3}, 0)$ ja y-akselin pisteessä (0, 13).

207. Piirretään ympyrä esimerkiksi geometriaohjelmalla.
Ohjelma antaa ympyrän yhtälöksi $x^2 + y^2 = 20$.
Merkitään tutkittava piste C kuvaan muuttamalla sen koordinaatit murtolukumuotoon.

$$C = \left(-1\frac{1}{9}, 4\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{10}{9}, \frac{13}{3}\right)$$

Kuvan perusteella näyttäisi siltä, että piste C on ainakin hyvin lähellä ympyrän kehää. Varmuus asiaan saadaan sijoittamalla pisteen koordinaattien tarkat arvot ympyrän yhtälöön.

$x^2 + y^2 = 20$ sijoitetaan $x = -\frac{10}{9}$ ja $y = \frac{13}{3}$

$$\left(-\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{13}{3}\right)^2 = 20$$

$$\frac{1621}{81} = 20$$

$$20{,}0123... = 20$$

Yhtälö on epätosi, joten piste ei ole ympyrän kehällä.

208. a) esimerkiksi $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 3x \end{cases}$, jonka ainoa ratkaisu on $x = 0$ ja $y = 0$

b) esimerkiksi $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$, kahden ensimmäisen yhtälön muodostaman yhtälöparin ratkaisu on $x = 0$ ja $y = 0$, mutta lukupari ei toteuta kolmatta yhtälöä

c) Yhtälöt kuvaavat suoria. Kohdassa a suorilla on yhteinen leikkauspiste, joka on (0, 0). Kohdassa b suorilla $y = x$ ja $y = 2x$ on eri leikkauspiste (0, 0) kuin suorilla $y = 2x$ ja $y = x + 1$, joiden leikkauspiste on (1, 2). Suorat $y = x$ ja $y = x + 1$ ovat yhdensuuntaiset, joten ne eivät leikkaa lainkaan.

Kohdan b esimerkki voi olla myös sellainen, jossa suorilla on kolme erillistä leikkauspistettä tai sellainen, jossa kaikki suorat ovat yhdensuuntaisia eikä leikkauspisteitä ole lainkaan.

Potensseihin liittyvät yhtälöt

209. a) $x^{13} \cdot x^4 = x^{13+4} = x^{17}$

b) $\dfrac{y^{16}}{y^{13}} = y^{16-13} = y^3$

c) $4^2 + 4^1 + 4^0 + 4^{-1} = 16+4+1+\dfrac{1}{4} = 21\dfrac{1}{4}$

210. a) $\sqrt[4]{81} = 3$

b) $\log_2 8 = 3$

211. a) $x^5 = -59\ 049$

$x = \sqrt[5]{-59\,049}$

$x = -9$

b) $y^8 = 6\ 561$

$y = \pm\sqrt[8]{6\,561}$

$y = \pm 3$

$y = 3$ tai $y = -3$

212. a) $3^x = 19\ 683$

$x = \log_3 19\ 683$

$x = \dfrac{\lg 19\,683}{\lg 3}$

$x = 9$

b) $1{,}03^x = 2{,}5$

$x = \log_{1{,}03} 2{,}5$

$x = \dfrac{\lg 2{,}5}{\lg 1{,}03}$

$x = 30{,}998... \approx 31{,}0$

213. a) $\dfrac{s^{40} \cdot s^6}{s^{32}} = \dfrac{s^{40+6}}{s^{32}} = s^{46-32} = s^{14}$

b) $(6a^4)^2 = 6^2\, a^{4 \cdot 2} = 36a^8$

214. a) $\sqrt[9]{50}=1,5445...\approx 1,54$

b) $\log_3 22=\dfrac{\lg 22}{\lg 3}=2,8135...\approx 2,81$

215. a) $a^{17}=1\ 700$

$a=\sqrt[17]{1700}=1,54891...\approx 1,549$

b) $5b^{30}=15\ 000 \quad |:5$

$b^{30}=3\ 000$

$b=\pm\sqrt[30]{3000}=\pm 1,30588...\approx \pm 1,306$

$b=1,306$ tai $b=-1,306$

216. a) $1,08^x\cdot 50=350 \quad |:50$

$1,08^x=7$

$x=\log_{1,08} 7$

$x=\dfrac{\lg 7}{\lg 1,08}=25,284...\approx 25,3$

b) $0,89^x\cdot 180=100 \quad |:180$

$0,89^x=\dfrac{5}{9}$

$x=\log_{0,89}\dfrac{5}{9}$

$x=\dfrac{\lg\frac{5}{9}}{\lg 0,89}=5,0439...\approx 5,04$

217. a) $5^{3x+2}=25^{x-1} \qquad 25=5^2$

$5^{3x+2}=(5^2)^{x-1}$

$5^{3x+2}=5^{2(x-1)}$

$3x+2=2(x-1)$

$3x+2=2x-2$

$3x-2x=-2-2$

$x=-4$

b) $9^{4x+8}=1$

$9^{4x+8}=9^0$

$4x+8=0$

$4x=-8 \quad |:\lg 4$

$x=-2$

218. Merkitään vuotuista muutoskerrointa k:lla.

$2009 - 2003 = 6$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$k^6 \cdot 194{,}26 = 249$

$k = 1{,}04224... \approx 1{,}042$ tai $k = -1{,}04224... \approx -1{,}042$

Negatiivinen ratkaisu ei käy.

$1{,}042 = 104{,}2\ \%$

Vuotuinen hinnankorotus $104{,}2\ \% - 100\ \% = 4{,}2\ \%$

219. Päästöjen määrää alussa on a.

Merkitään päästöjen vähentymistä vastaavaa kerrointa k:lla.

$100\ \% - 40\ \% = 60\ \% = 0{,}6$

$k^{10}\, a = 0{,}6a \quad | : a$

$k^{10} = 0{,}6$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.

$k = 0{,}95020... \approx 0{,}950$ tai

$k = -0{,}95020... \approx -0{,}950$ Negatiivinen ratkaisu ei käy.

$0{,}950 = 95{,}0\ \%$

Vuotuinen vähennys $100\ \% - 95{,}0\ \% = 5{,}0\ \%$

220. a) Merkitään vuosien määrää x:llä.

$100\ \% + 3\ \% = 103\ \% = 1{,}03$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$1{,}03^x \cdot 3\,000 = 5\,000$

$x = 17{,}281... \approx 17{,}3$

18 vuodessa.

b) Merkitään aineen määrää alussa on a:lla ja vuosien määrää x:llä.

1 % alkuperäisestä on $0{,}01a$.

$100\ \% - 11{,}8\ \% = 88{,}2\ \% = 0{,}882$

$0{,}882^x \cdot a = 0{,}01a \quad | : a$

$0{,}882^x = 0{,}01$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.

$x = 36{,}676... \approx 36{,}7$

36,7 vuodessa

221. a)

$$4 \cdot 2^x + 14 = 526$$
$$4 \cdot 2^x = 512 \quad | : 4$$
$$2^x = 128$$
$$x = \log_2 128$$
$$x = \frac{\lg 128}{\lg 2}$$
$$x = 7$$

b)

$$\log_{10} x = 5$$
$$x = 10^5$$
$$x = 100\ 000$$

222. a)

$$x^n \cdot x^n \cdot x^{n+2} = x^{n+n+n+2} = x^{3n+2}$$

b)

$$\left(\frac{a^m \cdot a^{4-m}}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^{m+4-m}}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^4}{a}\right)^2 = \left(a^{4-1}\right)^2 = \left(a^3\right)^2 = a^{3\cdot 2} = a^6$$

223. a)

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$$

b)

Tapa 1: päättelemällä

$$\log_6 36 + \log_5 \frac{1}{25} = 2 + (-2) = 0$$

Tapa 2: peruslaskimella

$$\log_6 36 + \log_5 \frac{1}{25} = \frac{\lg 36}{\lg 6} + \frac{\lg \frac{1}{25}}{\lg 5} = 0$$

c)

$$0{,}2^{200} \cdot 5^{203} = 0{,}2^{200} \cdot 5^{200+3} = 0{,}2^{200} \cdot 5^{200} \cdot 5^3 = (0{,}2 \cdot 5)^{200} \cdot 5^3 =$$
$$1^{200} \cdot 125 = 1 \cdot 125 = 125$$

224. a)

$$7^x = 16\ 807$$
$$x = \log_7 16\ 807$$
$$x = \frac{\lg\ 16\ 807}{\lg 7}$$
$$x = 5$$

b)

$$x^8 = 65\ 536$$
$$x = \pm\sqrt[8]{65\ 536} = \pm 4$$
$$x = 4 \text{ tai } x = -4$$

225. a)

$$3x^9 - 96 = 0$$
$$3x^9 = 96 \quad | : 3$$
$$x^9 = 32$$
$$x = \sqrt[9]{32} = 1,4697... \approx 1,47$$

b)

$$0,97^x \cdot 230 = 41 \quad | : 230$$
$$0,97^x = \frac{41}{230}$$
$$x = \log_{0,97} \frac{41}{230}$$
$$x = \frac{\lg \frac{41}{230}}{\lg 0,97} = 56,616... \approx 56,6$$

226. Merkitään vuotuista väestönkasvua vastaavaa kerrointa k:lla.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$k^{20} \cdot 5\,400\,000 = 13\,900\,000$

$k = 1{,}04840... \approx 1{,}048$ tai
$k = -1{,}04840... \approx -1{,}048$ Negatiivinen ratkaisu ei käy.

1,048 = 104,8 %

Vuotuinen kasvu: 104,8 % – 100 % = 4,8 %

227. Merkitään vuosien määrää x:llä.
100 % + 0,95 % = 100,95 % = 1,0095

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$1{,}0095^x \cdot 250 = 300$
$x = 19{,}282... \approx 19{,}3$

20 vuoden kuluttua.

228. a)

$$6^{x^2+2x}=1$$
$$6^{x^2+2x}=6^0$$
$x^2 + 2x = 0$ $\qquad a = 1,\ b = 2,\ c = 0$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2}}{2}$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-2\pm2}{2}$$
$$x=\frac{-2+2}{2}=0\ \text{tai}\ x=\frac{-2+2}{2}=0$$

b)

$x^6 = -729$
$$x=\pm\sqrt[6]{-729}$$

Negatiivisella luvulla ei ole kuudetta juurta. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

229. Merkitään radioaktiivisen aineen määrää alussa a:lla.
Ainetta vähenee vuosittain 0,043 % eli sitä jää jäljelle 100 % – 0,043 % = 99,957 %.

$0{,}99957^x \cdot a = 0{,}5a \qquad | : a$
$0{,}99957^x = 0{,}5$ $\qquad$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 1\ 611{,}623... \approx 1\ 600$

Puoliintumisaika on 1 600 vuotta.

230. a)

$\log_3 x = 6$
$x = 3^6$
$x = 729$

b)

$x^3(x^4 - 1) = 0$ $\qquad$ tulon nollasäännöllä
$x^3 = 0$ tai $\qquad x^4 - 1 = 0$
$x = 0$ tai $\qquad x^4 = 1$
$$x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm1$$
$x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$

c)

$\log_x 28\ 561 = 4$
$x^4 = 28\ 561$
$$x=\pm\sqrt[4]{28\ 561}=\pm13$$

Logaritmin kantaluku ei voi olla negatiivinen, joten $x = 13$.

231. $1{,}44M = \log_{10} E - 5{,}24$

Sendain järistyksen energia: E_s

Koben järistyksen energia: E_k

a) $1{,}44 \cdot 9{,}0 = \log_{10} E_s - 5{,}24$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.

$E_s = 10^{18,20} = 1{,}5848\ldots \cdot 10^{18} \approx 1{,}6 \cdot 10^{18}$

b) $1{,}44 \cdot 6{,}8 = \log_{10} E_k - 5{,}24$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.

$E_s = 10^{15,032} = 1{,}076\ldots \cdot 10^{15}$

$$\frac{E_s}{E_k} = \frac{10^{18,20}}{10^{15,032}} = 10^{18,20-15,032} = 10^{3,168} = 1472{,}312...$$

Tai:

$$\frac{1{,}5848...\cdot 10^{18}}{1{,}076...\cdot 10^{15}} = 1472{,}3...$$

Energia oli noin 1500-kertainen.

232. Kirjoitetaan molemmat luvut logaritmin avulla kymmenen potenssina.

$$25^{24\,000} = \left(10^{\lg 25}\right)^{24\,000} = 10^{\lg 25 \cdot 24\,000}$$

$$24^{25\,000} = \left(10^{\lg 24}\right)^{25\,000} = 10^{\lg 24 \cdot 25\,000}$$

Luvuista se, jolla on suurempi eksponentti, on suurempi.

$\lg 25 \cdot 24\,000 = 33\,550{,}56\ldots$

$\lg 24 \cdot 25\,000 = 34\,505{,}28\ldots$

Koska $\lg 25 \cdot 24\,000 < \lg 24 \cdot 25\,000$ on $24^{25\,000} > 25^{24\,000}$.

Funktio

233. a) $f(5) = 8 \cdot 5 - 1 = 39$

b) $f(-4) = 8 \cdot (-4) - 1 = -33$

234. a) Selvitetään kysytty arvo yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} -6x + 24 &= 54 && | -24 \\ -6x &= 30 && | : (-6) \\ x &= -5 \end{aligned}$$

b) Nollakohdassa $g(x) = 0$. Selvitetään kysytty arvo yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} -6x + 24 &= 0 && | -24 \\ -6x &= -24 && | : (-6) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

235. a) $f(4) = 3$
b) $x = 1$
c) $x = 3$

236. a) väärin
b) oikein
c) oikein
d) väärin
e) oikein
f) väärin

237. a) laskeva suora
b) ylöspäin aukeava paraabeli
c) alaspäin aukeava paraabeli

238. a) $f(4) = 4^2 + 7 \cdot 4 - 3 = 16 + 28 - 3 = 41$

b) $f(-1) = (-1)^2 + 7 \cdot (-1) - 3 = 1 - 7 - 3 = -9$

239. Nollakohdassa $g(x) = 0$. Selvitetään kysytty arvo yhtälön avulla.

$x^2 - x - 12 = 0$ $\qquad$ $a = 1$, $b = -1$ ja $c = -12$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{1+7}{2} = 4 \text{ tai } x = \frac{1-7}{2} = -3$$

Nollakohdat ovat $x = 4$ ja $x = -3$.

240. a) Nollakohdat $x = -$ ja $x = 2$, arvo $f(0) = -4$.

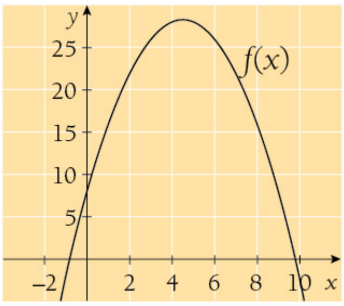
b) Kun $x \approx -1{,}6$ tai $x \approx 2{,}6$.

241. a) nouseva suora

b) alaspäin aukeava paraabeli

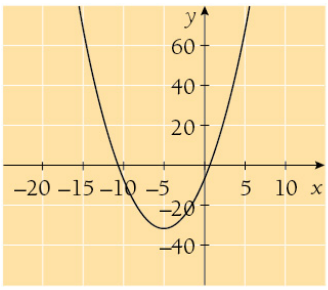
c) ei mikään näistä

242.



Nollakohdat ovat $x \approx -0{,}82$ ja $x \approx 9{,}82$.

243.



Huippu pisteessä $(-5, -32)$.

244. Ratkaistaan kysytty arvo yhtälön avulla.

$g(-3) = 8$

$2 \cdot (-3) + b = 8$

$-6 + b = 8 \quad | + 6$

$b = 14$

245. Nollakohdassa $f(x) = 0$. Selvitetään kysytty arvo yhtälön avulla.

$x^3 + 8 = 0 \quad | - 8$

$x^3 = -8$

$x = -2$

246. a) $f(3) = 10^3 = 1\ 000$

b) Ratkaistaan yhtälö.

$10^x = 1\ 000\ 000$

$x = 6$

247. Esim. $f(x) = x^2 - 7x + 4$.

248. a) $f(-4) = -(-4)^2 + 5 \cdot (-4) + 8 = -16 - 20 + 8 = -28$

b) Selvitetään kysytyt arvot yhtälön avulla.

$-x^2 + 5x + 8 = 2 \quad || -2$

$-x^2 + 5x + 6 = 0 \qquad a = -1,\ b = 5$ ja $c = 6$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2}$$

$$x = \frac{-5+7}{-2} = -1 \text{ tai } x = \frac{-5-7}{-2} = 6$$

249. 1–b, 2–D, 3–F

250. a) Piirretään funktioiden kuvaajat. Kuvasta nähdään, että funktiot saavat saman arvon, kun $x \approx -1{,}3$ tai $x = 1$.

b) Ratkaistaan yhtälö.

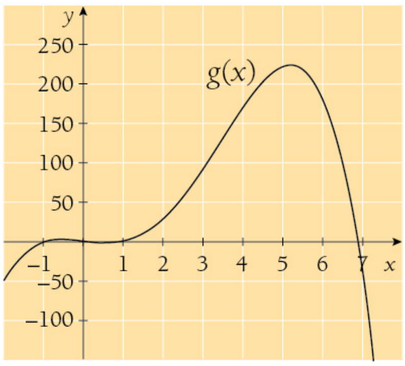
$$f(x) = g(x)$$
$$3x - 1 = 3x^2 + 4x - 5 \quad | -3x$$
$$-1 = 3x^2 + x - 5 \quad | +1$$
$$0 = 3x^2 + x - 4 \qquad a = 3,\ b = 1 \text{ ja } c = -4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{-1+7}{6} = 1 \text{ tai } x = \frac{-1-7}{6} = -1\frac{1}{3}$$

c) Negatiivinen ratkaisu saadaan a-kohdassa vain likiarvona, b-kohdassa tarkkana arvona.

251.



Suurin arvo on 222,896 ja nollakohdat $x \approx 0{,}173$, $x \approx 0{,}894$ ja $x \approx 6{,}876$.

252. a) Ratkaistaan kysytty arvo a yhtälön avulla.

$$f(2) = 11$$
$$a \cdot 2^4 - 2^3 - 5 = 11$$
$$16a - 13 = 11 \quad | +13$$
$$16a = 24 \quad | :16$$
$$a = \frac{3}{2}$$

b) Nollakohdassa $g(x) = 0$. Selvitetään kysytty arvo yhtälön avulla.
$g(x) = 0$, $x = -2$

$$(-2)^3 - 3 \cdot a \cdot (-2) - a^2 = 0$$
$$-8 + 6a - a^2 = 0 \qquad a = -1,\ b = 6 \text{ ja } c = -8$$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-8)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2}$$
$$a = \frac{-6+2}{-2} = 2 \text{ tai } a = \frac{-6-2}{-2} = 4$$

253. a) $x^4 - 625 = 0 \quad | + 625$
$x^4 = 625$
$x = 5$ tai $x = -5$

b) $3^{6x} - 81 = 0 \quad | + 81$
$3^{6x} = 81$
$3^{6x} = 3^4$
$6x = 4 \quad | : 6$
$$x = \frac{2}{3}$$

c) $(x^2 - 9)(x + 4) = 0$
Tulon nollasäännön mukaan yhtälö pätee, kun $x^2 - 9 = 0$ tai $x + 4 = 0$.

$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$
$x^2 = 9$
$x = 3$ tai $x = -3$

$x + 4 = 0 \quad | - 4$
$x = -4$

254. a) $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \qquad a = 1,\ b = -\frac{5}{2}$ ja $c = 1$

$$t = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$$
$$t = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 2 \text{ tai } t = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Kuvasta nähdään, että $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Sijoitetaan yhtälöön:

$$\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 - \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1=0$$

$$\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1=0$$

$$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+1-\frac{5}{4}x-\frac{5}{2}+1=0$$

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$$

$a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$ ja $c=-\frac{1}{2}$

$$x=\frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}{2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$x=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=2 \text{ tai } x=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=-1$$

255. Kuvaajassa samaa x:n arvoa vastaa kaksi eri y:n arvoa. Funktion säännön, jolla x:n arvosta saadaan y:n arvo, täytyy olla yksiselitteinen: kutakin x:n arvoa saa vastata vain yksi y:n arvo.

256. Kun $0 < a < 1$, kuvaaja on laskeva ja kun $a > 1$, kuvaaja on nouseva. Funktio on määritelty, kun $x > 0$, $a > 0$ ja $a \neq 1$. Ohjelma saattaa piirtää kuvaajan myös arvolla $a = 0$.

5 MATEMAATTISIA MALLEJA

Verrannollisuus ja lineaarinen malli

257. a)

x	***y***
1	25
2	2 · 25 = 50
200 : 25 = 8	200

b)

x	*y*
1	200
2	200 : 2 = 100
200 : 20 = 10	20

258. a) 65 litraa

b) noin kello 21.30

c) Veden kulutus tunnissa litroina on $\frac{80-10}{23-18}=\frac{70}{5}=14$.

259. a)

$$\frac{84}{x}=\frac{140}{240}$$

$140x = 84 \cdot 240$

$140x = 20\,160 \qquad | : 140$

$x = 144$

b)

$$\frac{84}{x}=\frac{240}{140}$$

$240x = 84 \cdot 140$

$240x = 11\,760 \qquad | : 240$

$x = 49$

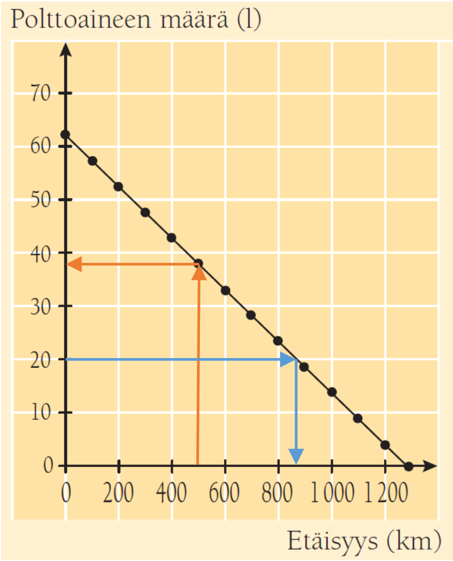
260. $y = 2x$, $y = -x + 1$, $y = -\frac{1}{2}$

261. a) $f(0) = 5 \cdot 0 + 75 = 75$ (€)

b) Kuukaudessa säästetty raha saadaan kulmakertoimen avulla. Se on 5 €.

c) $f(7) = 5 \cdot 7 + 75 = 110$ (€)

262.



a) Kun autolla oli ajettu 500 km, tankissa oli 38 litraa polttoainetta.

b) 880 km jälkeen tankissa on polttoainetta alle 20 litraa.

263. **Tapa 1** Vakionopeudella liikuttaessa aika ja matka ovat suoraan verrannollisia.

$$\frac{3,2}{21} = \frac{8,5}{x}$$

$3,2x = 21 \cdot 8,5 \qquad | : 3,2$

$$x = \frac{21 \cdot 8,5}{3,2} = 55,78... \approx 56 \text{ (min)}$$

Tapa 2

21 min = $\frac{21}{60}$ h

Nopeus alkumatkalla on $v = \dfrac{3,2}{(21:60)} = 9,1428...(\text{km/h})$.

Aikaa koko matkaan kuluu $t = \dfrac{8,5}{9,1428...} = 0,9296...(\text{h})$.

$0,9296\ldots \text{ h} = 55,78 \ldots \text{ min} \approx 56 \text{ min}$

264. a) $x = 250$

$f(250) = 1{,}5 \cdot 250 - 35 = 340$ (€)

b) $1{,}5x - 35 = 1\,000$

$1{,}5x = 1\,035 \quad | : 1{,}5$

$x = 690$ (näyttelyvierasta)

c) Myynti ei voi olla negatiivinen

$1{,}5x - 35 = 0$

$1{,}5x = 35$

$$x = t = \frac{35}{1{,}5} = 23{,}33... \approx 23$$

Jos kävijöiden määrä on 23 tai vähemmän, myynnistä tulisi negatiivinen.

265. a) Aika ja talkoolaisten määrä ovat kääntäen verrannolliset.

Aika (min)	Talkoolaiset
45	10
x	8

$$\frac{45}{x} = \frac{8}{10}$$

$8x = 450 \quad | : 8$

$x = 56{,}52 \approx 56$ (min)

Kahdeksalta talkoolaiselta olisi mennyt 56 min.

b) Aika ja talkoolaisten määrä ovat kääntäen verrannolliset.

Aika (min)	Talkoolaiset
45	10
30	y

$$\frac{45}{30} = \frac{y}{10}$$

$30y = 450 \quad | : 30$

$y = 15$

$15 - 10 = 5$

Talkoolaisia tarvitaan viisi lisää.

266. Kun lämpötila nousee asteella, pukeutumiseen kuluva aika muuttuu tunneissa.

$$k=\frac{7-11}{-5-(-13)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}.$$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$$y-7=-\frac{1}{2}(x-(-5))$$

$$y-7=-\frac{1}{2}x-2,5$$

$$y=-\frac{1}{2}x+4,5$$

a) $x=-25$

$$y=-\frac{1}{2}\cdot(-25)+4,5=17\ \text{(min)}$$

Pukeutuminen kestää 17 min.

b) $y=10$

$$10=-\frac{1}{2}x+4,5$$

$$\frac{1}{2}x=-10+4,5$$

$$\frac{1}{2}x=-5,5 \qquad |\cdot 2$$

$$x=-11\ (°\text{C})$$

Lämpötilassa –11 °C pukeutuminen kestää 10 minuuttia.

267. $k=-1,5$

$$f(x)=-1,5x+186$$

$$-1,5x+186=150$$

$$-1,5x=-36 \qquad |:(-1,5)$$

$$x=24$$

24 viikon kuluttua

268. a)

Jarrutusmatka (m)	Nopeuden neliö (km/h)^2
11	40^2
x	80^2

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä jarrutusmatka x.

$$\frac{11}{x}=\frac{1\,600}{6\,400}$$

$1600x = 11 \cdot 6400$

$$x=\frac{11\cdot 6\,400}{1\,600}$$

$x = 44$ (m)

b)

Jarrutusmatka (m)	Nopeuden neliö (km/h)^2
11	40^2
21,3	y^2

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä nopeus y.

$$\frac{11}{21,3}=\frac{1\,600}{y^2}$$

$11y^2 = 21,3 \cdot 1600$

$$y^2=\frac{21,3\cdot 1\,600}{11}$$

$y=\pm\sqrt{\frac{21,3\cdot 1\,600}{11}}=\pm 55,66...$ Negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä ja se hylätään.

$y \approx 56$ (km/h)

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskentaohjelman avulla.

269. a) Riippuvuutta kuvaavan suoran kulmakerroin on

$$k=\frac{420-160}{20000-7000}=\frac{260}{13000}=0,02\,.$$

Suoran yhtälö on

$y - 160 = 0,02(x - 7\,000)$

$y - 160 = 0,02x - 140$

$y = 0,02x + 20$

b) $x = 32\,000$

$y = 0{,}02 \cdot 32\,000 + 20$
$y = 660$ (kupillista kahvia)

c) $y = 200$

$$200 = 0{,}02x + 20$$
$$-0{,}02x = 20 - 200$$
$$-0{,}02x = -180 \quad | : (-0{,}02)$$
$$x = 9\,000 \text{ (kävijää)}$$

270. a) Siirretään aineisto laskentaohjelman taulukkonäkymään. Sijoitetaan arvoja vastaavat pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan siihen suora. Ohjelma antaa suoran yhtälöksi $y = 7\,249{,}8636x - 14\,524\,851$.

Lineaarinen malli on $y = 7\,250x - 14\,520\,000$.

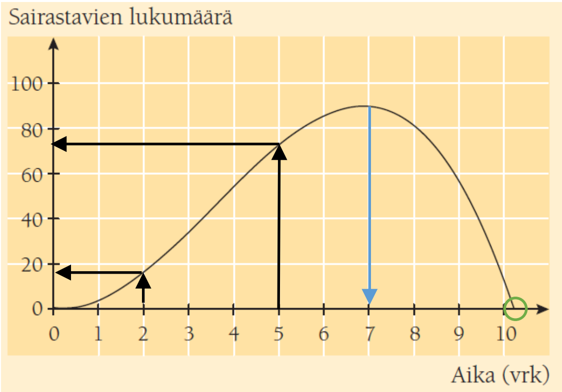
b) $y = 7\,249{,}8636 \cdot 2028 - 14\,524\,851 = 177\,872{,}3808 \approx 178\,000$

Vuonna 2028 yöpymisiä on 178 000.

c) $7\,249{,}8636x - 14\,524\,851 = 150\,000$
$x = 2024{,}155\ldots \approx 2024$

Vuonna 2024 yöpymisten määrä ylittää vuoden 2017 Helsingin hotellihuonekapasiteetin.

271.



a) Sairastuneiden määrä oli suurimmillaan noin 7 vuorokauden kuluttua ja epidemia päättyi reilun 10 vuorokauden kuluttua.

b) Sairastavien määrän muutos oli likimain lineaarinen 2–5 vuorokauden kohdalla. Sairastavien määrä muuttui tällä välillä n. 18 sairastavaa lisää vuorokautta kohti.

272. **Tapa 1** Nopeus ja aika ovat kääntäen verrannollisia.

$$\frac{37,895}{39,000}=\frac{x}{382,2}$$

$39{,}000x = 37{,}895 \cdot 382{,}2 \quad | : 39{,}000$

$$x=\frac{37,895\cdot 382,2}{39,000}$$

$$x = 371,371 \approx 371,4 \text{ (km/h)}$$

Tapa 2

$37{,}895 \text{ s} = \dfrac{37,895}{3\ 600} \text{ h}$

Kierroksen pituus on $382{,}2 \cdot \dfrac{37,895}{3\ 600} = 4{,}0231854\ldots \approx 4{,}02319$ (km).

Kun aika on $39{,}000 \text{ s} = \dfrac{39,000}{3\ 600}$ h, nopeus on

$$v=\frac{4,02319}{(39,000:3600)}=371,371\ldots \approx 371,4 \text{ (km/h)}.$$

273. a) $\dfrac{1,40-0,95}{9}=0,05 \text{ (m}^3\text{)}$

$y - 1{,}40 = -0{,}05\,(x - (-9))$
$y - 1{,}40 = -0{,}05x - 0{,}45$
$y = -0{,}05x + 0{,}95$

Malli voidaan muodostaa myös laskentaohjelmalla.

b) $x = -11{,}7$

$y = -0{,}05 \cdot (-11{,}7) + 0{,}95 = 1{,}535 \approx 1{,}5 \text{ (m}^3\text{)}$

c) Malli antaa järjettömiä tuloksia, kun puunkulutus y on negatiivista.

$-0{,}05x + 0{,}95 = 0$
$-0{,}05x = -0{,}95$

$$x=\frac{-0,95}{-0,05}=19$$

Malli antaa järjettömiä tuloksia, kun $x = 19$ tai suurempi

274. a) Laaditaan nopeudesta ja liike-energiasta taulukko.

nopeus (m/s)	**nopeuden neliö**	**liike-energia (kJ)**
10	10^2	2,5
25	25^2	x

$$\frac{10^2}{25^2} = \frac{2,5}{x}$$

$10^2 \cdot x = 25^2 \cdot 2,5 \qquad | : 10^2$

$$x = \frac{25^2 \cdot 2,5}{10^2} = 15,625 \approx 16 \text{ (kJ)}$$

Liike-energia on 16 kJ.

275. a) Kulmakerroin $k = \dfrac{12,40 - 11,60}{5,5 - 4,9} = 1,3333....$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$y - 12,40 = 1,33(x - 5,5)$

$y - 12,40 = 1,33x - 7,33$

$y = 1,33x + 5,07$

b) Perusmaksu on 5,10 € ja kilometrimaksu 1,33 €.

c) $1,33x + 5,07 = 35$

$1,33x = 29,93 \qquad | : 1,33$

$x = 22,503\ldots \approx 22,5 \text{ (km)}$

276. **Tapa 1**

paino (N)	**etäisyys (km)**	**etäisyyden neliö**
9 810	6 370	$6\ 370^4$
9 790	X	x^2

$$\frac{9\ 810}{9\ 790} = \frac{x^2}{6\ 370^2}$$

$9\ 790x^2 = 9\ 810 \cdot 6\ 370^2 \qquad | : 9790$

$$x^2 = \frac{9\ 810 \cdot 6\ 370^2}{9\ 790}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9\ 810 \cdot 6\ 370^2}{9\ 790}} = \pm\ 6\ 376,503... \approx \pm\ 6\ 376,5 \text{ (km)}$$

Negatiivinen ratkaisu tässä tilanteessa ei ole mahdollinen

6 376,5 km – 6 370 km = 6,5 km

Tapa 2

paino (N)	etäisyys (km)	etäisyyden neliö
9 810	6 370	$6\ 370^4$
9 790	X	x^2

$$\frac{9\ 810}{9\ 790}=\frac{x^2}{6\ 370^2}$$

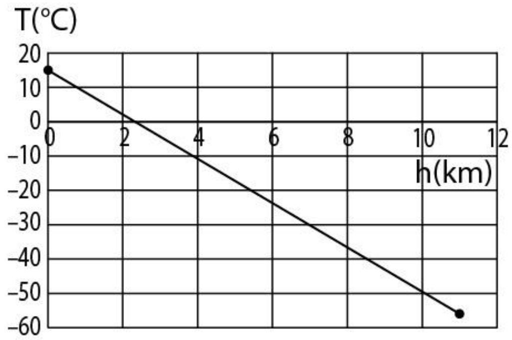
Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
x = ± 6 376,503... ≈ ± 6 376,5 (km)
Negatiivinen ratkaisu tässä tilanteessa ei ole mahdollinen

6 376,5 km – 6 370 km = 6,5 km

277. a) $\frac{15+56}{11}=6,4545...\approx 6,5$ (astetta)

b) Määritetään lauseke taulukkolaskentaohjelman avulla.
$y = –6,5\ x + 15$

Piirretään kuvaaja.



278. a) Siirretään taulukon tiedot taulukkolaskentaohjelmaan ja muodostetaan ohjelman avulla mallia kuvaava yhtälö.
Yhtälö on $y = –0,086x + 184,38$.

b) –0,086 · 2030 + 184,38 = 9,8 (%)

c) $–0,086x + 184,38 = 8$

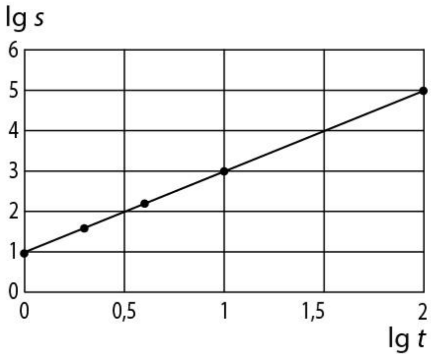
$$x=\frac{8-184,38}{-0,086}=2\ 050,93$$

Viljelykelpoisen maan osuun laskee alle 8 % vuoden 2050 aikana.

279. a)

t	**lg *t***	**lg *s***
1	0	1
2	0,30103	1,60206
4	0,60206	2,20412
10	1	3
100	2	5

b)



Kuvaajasta tulee suora. Ajan logaritmin ja paikan logaritmin välillä on lineaarinen riippuvuus. Suoran kulmakerroin on 2 ja suora leikkaa y-akselin kohdassa $y = 1$. Nämä ovat myös matkan lausekkeen $s = 10t^2$ eksponentti ja kertoimen logaritmi lg 10 = 1.

Eksponentiaalinen malli ja muita malleja

280. a)

Aika (h)	***a***
1	2
2	$3 \cdot 2 = 6$
3	$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$
5	$3^4 \cdot 2 = 162$

b)

Aika (d)	***b***
1	4 000
2	4 000 : 2 = 2 000
3	4 000 : 2 : 2 = 1 000
6	4 000 : 2^5 = 125

281. a) $f(0) = 1{,}5^0 \cdot 50 = 50$ (Voi päätellä myös funktion lausekkeesta.)

b) Määrä tulee vuodessa 1,5-kertaiseksi, joten se lisääntyy vuodessa 150 % – 100 % = 50 %.

c) Vuoden 2018 loppu ja vuoden 2019 alku ovat samassa ajankohdassa.
2019 – 2010 = 9

$f(9) = 1{,}5^9 \cdot 50 = 1\,922{,}16\ldots \approx 1\,900$

282. a) Funktio $i(x)$, koska pankkitilin rahamäärän kasvu on eksponentiaalista, ja 5 prosentin kasvua vastaava muutoskerroin on 1,05.

b) Funktio $j(x)$, koska pituuskasvu on lineaarista.

283. a) $f(15) = 55 - 4{,}9 \cdot 1{,}5^2 = 43{,}975 \approx 44$ (m)

b) Avaimet lähtevät putoamaan, kun $x = 0$.
$55 - 4{,}9 \cdot 0 = 55$ (m)

284. Vuosi 1950: 1950 – 1970 = –20

$f(-20) = 0{,}97^{-20} \cdot 150\,000 = 275\,893{,}57\ldots \approx 280\,000$

Vuosi 2020: 2020 – 1970 = 50

$f(50) = 0{,}97^{50} \cdot 150\,000 = 32\,709{,}80\ldots \approx 33\,000$

285. a) Väkiluku muuttuu 1,027-kertaiseksi vuosittain.

1,027 = 102,7 %

Väestönkasvu on 102,7 % - 100 % = 2,7 %.

b) Ratkaistaan yhtälö $1{,}027^x \cdot 158\,580\,000 = 250\,000\,000$.

$$1{,}027^x = \frac{250\,000\,000}{158\,580\,000}$$

$$x = \log_{1{,}027} \frac{250\,000\,000}{158\,580\,000}$$

$$x = 17{,}085\ldots$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskentaohjelman avulla.

Väkiluku ylittää 250 000 000 reilun 17 vuoden kuluttua, jolloin on vuosi 2027.

286. Ensimmäinen rivi: D, A ja B

Toinen rivi: D, C ja E

287. a) Määrä pienenee 12,5 prosenttiin kolmessa peräkkäisessä puoliintumisessa.

Tämä kestää $3 \cdot 8 = 24$ (d).

b) Merkitään k:lla vuorokauden muutoskerrointa ja a:lla jodin alkuperäistä määrää.

$k^8 \cdot a = 0{,}5a \quad | : a$

$k^8 = 0{,}5$

$k = \pm\sqrt[8]{0{,}5}$ Negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä.

$k = 0{,}91700\ldots \approx 0{,}917$

Määrä muuttuu vuorokaudessa 0,917-kertaiseksi eli on 91,7 % aiemmasta.

Jodista hajoaa vuorokaudessa 100 % – 91,7 % = 8,3 %.

288. 2008 – 1990 = 18

100 % + 39 % = 139 % = 1,39

Päästöt kasvavat 18 vuodessa 1,39-kertaisiski.

Merkitään vuotuista kasvukerrointa *k*:lla.

$k^{18} = 1{,}39$

$k = \pm\sqrt[18]{1{,}39}$ Negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä ja se hylätään.

$\left(\sqrt[18]{1{,}39}\right)^{25} = 1{,}57990\ldots \approx 1{,}58$

1,58 = 158 %

Kasvua on 58 %.

289. a) Suodattimen läpäisee hiukkasista 100 % – 20 % = 80 %.

Merkitään hiukkasten alkuperäistä määrää *a*:lla. 3,0 cm:n kerroksen voidaan ajatella muodostuvan kolmesta 1,0 cm:n paksuisesta ilmansuodattimesta. Läpi pääsevien hiukkasten määrä: $0{,}80^3 \cdot a = 0{,}512a$

3,0 cm:n kerros poistaa hiukkasista 100 % –51,2 % = 48,8 % ≈ 49 %.

Jos suodattimen paksuus on *x* cm, sen läpi pääsevien hiukkasten määrä on $0{,}80^x \cdot a$

Paksuus 6 mm = 0,6 cm. Läpi pääsevien hiukkasten määrä:

$0{,}80^{0{,}6} \cdot a = 0{,}8746\ldots\, a \approx 0{,}87a$

6 mm:n kerros poistaa hiukkasista 100 % – 87 % = 13 %.

b) Läpi saa päästä 100 % – 99 % = 1 %.

$0{,}80^x \cdot a = 0{,}01a \quad | : a$

$0{,}80^x = 0{,}01$

Tapa 1

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

x = 20,637... ≈ 20,6

Tapa 2

Ratkaistaan yhtälö logaritmin avulla.

$x = \log_{0{,}80} 0{,}01 = 20{,}637\ldots \approx 20{,}6$

Suodattimen paksuuden tulee olla 21 cm.

290. a) Lineaarisessa mallissa kanien määrä lisääntyy joka vuosi yhtä monella yksilöllä. Vuotuinen muutos on 350 – 310 = 40.

Kanien määrä 20 vuoden kuluttua:
$350 + 20 \cdot 40 = 1\,150 \approx 1\,150$

b) Eksponentiaalisessa mallissa kanien määrä lisääntyy joka vuosi yhtä monella prosentilla. Vuotuista prosentuaalista kasvua kuvaava muutoskerroin:

$$\frac{350}{310} = 1{,}1290322... \approx 1{,}12903$$

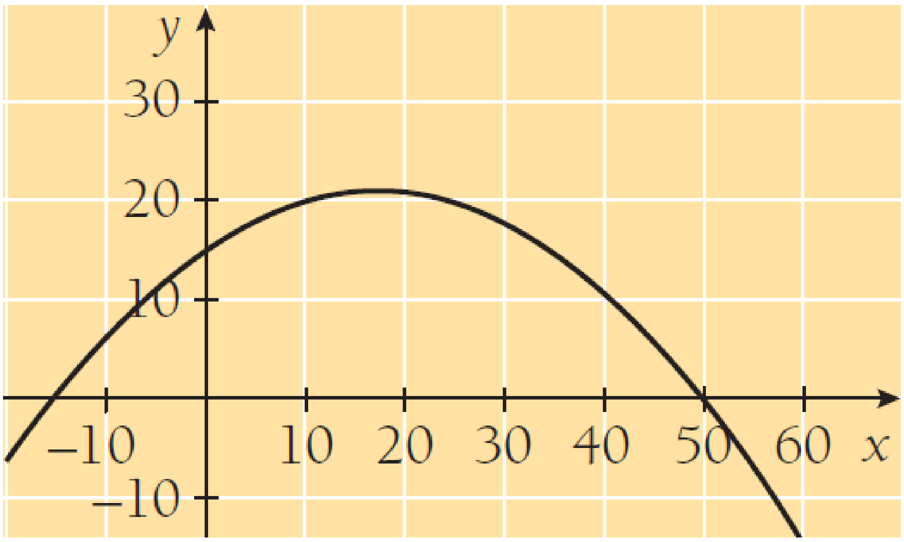
Kanien määrä 20 vuoden kuluttua:
$1{,}12903^{20} \cdot 350 = 3964{,}40\ldots \approx 3\,960.$

291. a) $15 + 0{,}7 \cdot 10 - 0{,}02 \cdot 10^2 = 20$ (m)

b) $15 + 0{,}7x - 0{,}02x^2 = 0$

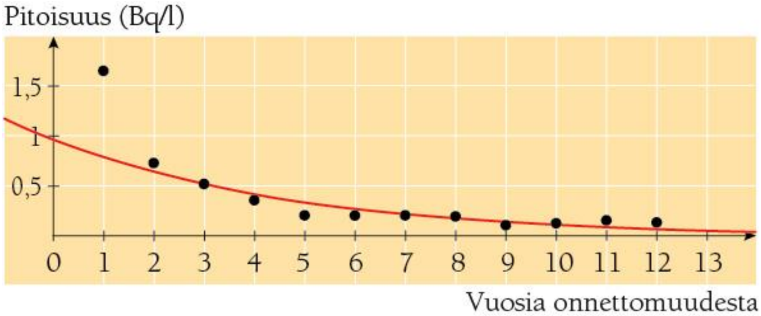
Yhtälö voidaan ratkaista laskentaohjelmalla.
$x = -15$ tai $x = 50$ Negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä ja se hylätään.

c)



Kuvaajasta nähdään, että kivi on korkeimmillaan noin 21 metrin korkeudella.

292. a)

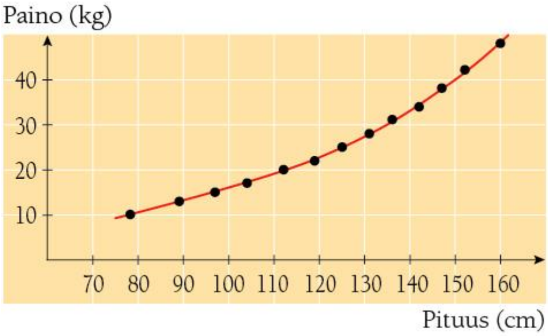


$f(x) = 0{,}96871 \cdot 0{,}81934^x$

b) $2010 – 1986 = 24$

$f(24) = 0{,}96871 \cdot 0{,}81934^{24} = 0{,}0081158... \approx 0{,}00812.$

293. a) Syötetään aineisto taulukkolaskentaohjelmaan ja muodostetaan sillä kolmannen asteen polynominen malli kuvaamaan pituuden ja painon välistä riippuvuutta.



$f(x) = 0{,}00003x^3 – 0{,}00724x^2 + 0{,}79544\, x – 22{,}84507$

b) Taulukkolaskentaohjelmalla mallin mukainen paino 180 cm pitkälle pojalle on noin 70 kg.

c) Taulukkolaskentaohjelmalla mallin mukaan 172 cm pitkä poika painaa 60 kg.
HUOM. Jos käytetään a-kohdan funktiota vastauksessa annetuilla tarkkuuksilla, b- ja c-kohtien vastaukset poikkeavat reilusti annetusta.

294. a) Lääkeaineen määrä on aina 100 % – 7,5 % = 92,5 % tunnin takaisesta.

Määrän ilmaiseva funktio on $f(t) = 0{,}925^t \cdot 200$.

b) $f(3) = 0{,}925^3 \cdot 200 = 158{,}29\ldots \approx 160$ (mg)

c) $0{,}925^t \cdot 200 = 0{,}5 \cdot 200$
$0{,}925^t \cdot 200 = 100 \qquad | : 200$
$0{,}925^t = 0{,}5$

Tapa 1
Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
$t = 8{,}890\ldots \approx 8{,}9$

Tapa 2
Ratkaistaan yhtälö logaritmin avulla.
$t = \log_{0{,}925}0{,}5 = 8{,}890... \approx 8{,}9$

Lääkeaineen määrä pienenee puoleen noin 9 tunnissa.

295. Merkitään vuotuista muutoskerrointa k:lla.
Vuosien määrä on 2009 – 2000 = 9.

$k^9 \cdot 360\,000 = 510\,000 \quad | : 360\,000$

$$k^9 = \frac{510\,000}{360\,000}$$

$$k = \sqrt[9]{\frac{510\,000}{360\,000}} = 1{,}0394593... \approx 1{,}03946$$

Merkitään x:llä vuodesta 2000 kuluneiden vuosien määrää.
$1{,}03946^x \cdot 360\,000 = 1\,000\,000$

$$1{,}03946^x = \frac{1\,000\,000}{360\,000}$$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla
$x = 26{,}398... \approx 26{,}4$

Liikevaihto ylittää miljoonan euron rajan 27 vuoden kuluttua eli vuonna 2027.

296. Merkitään vuosien määrää x:llä.
Pirjon talletuksen arvo: $1{,}0045^x \cdot 6\,000$ (€)
Pekan talletuksen arvo: $1{,}018^x \cdot 5\,500$ (€)

$1{,}0045^x \cdot 6\,000 = 1{,}018^x \cdot 5\,500$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
$x = 6{,}518... \approx 6{,}5$

Pekan tilillä on enemmän rahaa 7 vuoden kuluttua.

297. a)

$N(0) = 2\ 300$

$N(40) = 2\ 300 \cdot e^{40a} = 2\ 600\ 000\ 000\ 000$

$$e^{40a} = \frac{2\ 600\ 000\ 000\ 000}{2\ 300}$$

$$40a = \ln\frac{2\ 600\ 000\ 000\ 000}{2\ 300} = 13{,}9381\ldots$$

$$a = 0{,}3484\ldots \approx 0{,}35$$

b)

Tutkitaan, kuinka monin kertaiseksi määrä muuttuu kahdessa vuodessa.
Sijoitetaan $t = 2$.
$e^{2\cdot 0{,}35} = 2{,}013\ldots \approx 2$

Mooren laki pitää siis paikkansa.

298. a)

Muodostetaan lineaarisen mallin mukainen yhtälö.

Merkitään $x_1 = 1$ (tammikuu) ja $x_2 = 3$ (maaliskuu).
Vastaavasti $y_1 = 1\ 250$ ja $y_2 = 835$.

$$k = \frac{835 - 1\ 250}{3-1} = -207{,}5$$

$$y - 1\ 250 = -207{,}5(x - 1)$$
$$y - 1\ 250 = -207{,}5x + 207{,}5$$
$$y = -207{,}5x + 1\ 457{,}5$$

Sijoitetaan $x = 6$ (kesäkuu).
$y = -207{,}5 \cdot 6 + 1\ 457{,}5 = 212{,}5 \approx 213$

b)

Eksponentiaalisen mallin mukainen yhtälö:
$1\ 250 \cdot q^{3-1} = 835$

Ratkaistaan q laskentaohjelmalla.

$$q = \pm\sqrt{\frac{835}{1\ 250}} = \pm 0{,}817312\ldots$$

Negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä.

Määrä kesäkuussa on
$1\ 250 \cdot q^6 = 372{,}59\ldots \approx 373$

299. a) Kyse on eksponentiaalisesta kasvusta.

Ratkaistaan yhden tunnin aikaa vastaava muutoskerroin.

$k^8 \cdot 40 = 2 \cdot 40$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla
$k \approx 1{,}0905077$ tai $k \approx -1{,}0905077$ Negatiivinen ratkaisu ei käy

CRP voi nousta kuudessa tunnissa enintään arvoon

$1{,}0905077^6 \cdot 40 = 67{,}271... \approx 67{,}3.$

b) Kyse on eksponentiaalisesta vähenemisestä.

Ratkaistaan yhden tunnin aikaa vastaava muutoskerroin puoliintumisajan avulla.

$k^{19} \cdot 100 = \frac{100}{2}$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla
$k \approx 0{,}964176$

Ratkaistaan kulunut aika yhtälön avulla.

$0{,}964176^x \cdot 100 = 10$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla
$x = 63{,}116... \approx 63$

$63 = 24 + 24 + 15$

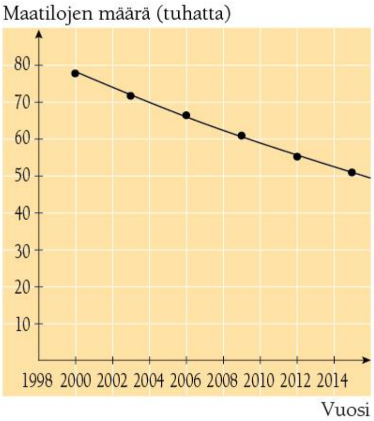
Maanantaista kello 12:00 kahden vuorokauden ja 15 tunnin kuluttua on torstai kello 3:00.

300. a) Esimerkiksi
- radioaktiivinen hajoaminen, aineen määrä vähenee prosentuaalisesti yhtä paljon aikayksikössä
- lääkeaineen hajoaminen elimistöstä, , aineen määrä vähenee prosentuaalisesti yhtä paljon aikayksikössä
- bakteerien määrän lisääntyminen laboratoriossa, bakteerien määrä kasvaa prosentuaalisesti yhtä paljon aikayksikössä

b) Esimerkiksi
- puun pituuskasvu, kasvukauden aikana kasvu on likimain tasaista

- lämpötilan vaihtelu Suomessa, lyhyellä aikavälillä (muutama tunti) lämpötilan vaihtelu voi olla lineaarista, muutamien vuosien aikavälillä lämpötila välillä laskee ja välillä nousee, useiden vuosien aikavälillä lämpötila on noussut ei kuitenkaan eksponentiaalisesti

301. a) Laaditaan eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelman avulla.



Syötetään arvot laskentaohjelmaan ja sovitetaan pisteisiin eksponentiaalista kasvua kuvaava käyrä.

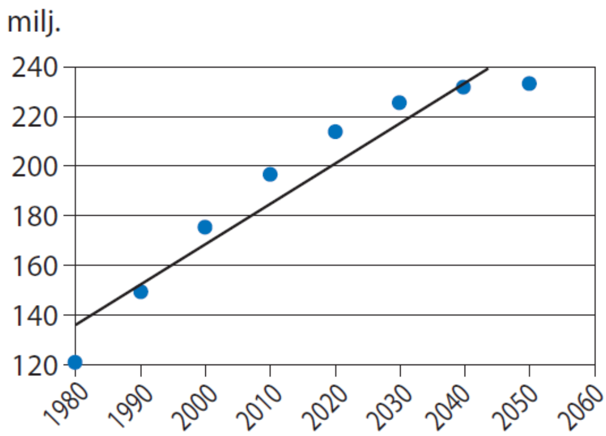
Regressiokäyrän yhtälö on $f(x) = 5{,}7771 \cdot 10^{29} \cdot 0{,}97178^{x}$.

Määritetään laskentaohjelmalla ennuste vuodelle 2015.
$f(2025) = 38\ 323 \approx 38\ 000$

b) Ratkaistaan laskentaohjelmalla yhtälö:
$5{,}7771 \cdot 10^{29} \cdot 0{,}97178^{x} = 35\ 000.$
$x = 2028{,}4 \approx 2028$

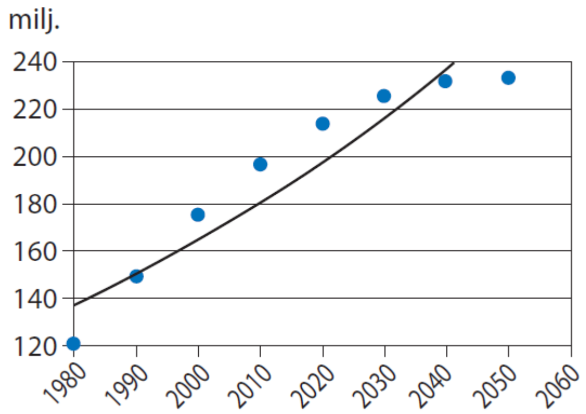
302. a) Laaditaan taulukkolaskentaohjelman avulla kuvaajat lineaariselle, eksponentiaaliselle ja toisen asteen polynomiselle mallille.

Lineaarinen malli:



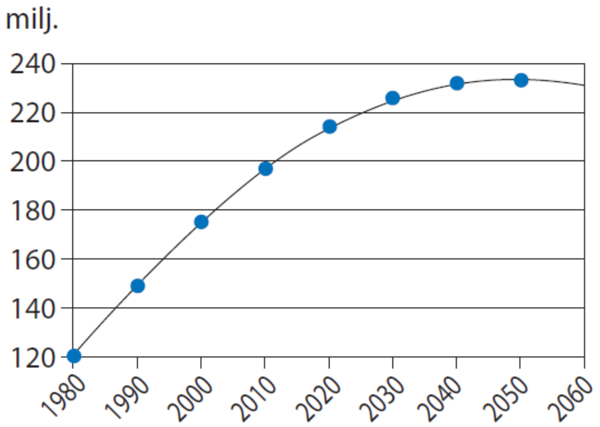
Lineaarisen mallin yhtälö on $y = 2\ 104\ 600x - 4\ 039\ 500\ 000$.

Eksponentiaalinen malli:



Eksponentiaalisen mallin yhtälö on $y = 0{,}0035683 \cdot 1{,}0124^x$.

Toisen asteen polynominen malli:



Toisen asteen polynomisen mallin yhtälö on
$y = –21\ 145x^2 + 86\ 897\ 000x – 89\ 037\ 000\ 000$.

Toisen asteen polyminen malli kuvaa ennustetta parhaiten koska aineistoa kuvaavat pisteet ja trendikäyrä vastaavat toisiaan parhaiten tässä mallissa. Pitemmällä aikavälillä se ei kuitenkaan toimi. Jossain vaiheessa malli käy antamaan negatiivisia ennusteita väestön määrälle.

b) Käytetään toisen asteen polynomista mallia. Määritetään ennusteet väkiluvuille vuonna 2070 ja 2090.

Vuonna 2070 enuste väkiluvulle on 223 170 000
Vuonna 2090 ennuste väkiluvulle on 194 003 000.

c) Kuvaajan perusteella väkiluku kääntyy laskuun n. vuonna 2050.

Lukujonoja ja summia

303. $a_1 = 5 + \frac{6}{1} = 11$, $a_2 = 5 + \frac{6}{2} = 8$ ja $a_8 = 5 + \frac{6}{8} = 5,75$

304. a) Peräkkäisten jäsenten erotus: $d = 29 - 20 = 9$
Viidestoista jäsen: $a_{15} = 20 + (15 - 1) \cdot 9 = 20 + 14 \cdot 9 = 146$

b) Peräkkäisten jäsenten suhde: $q = \frac{400}{800} = 0,5$
Kymmenes jäsen: $a_{10} = 800 \cdot 0,5^{10-1} = 800 \cdot 0,5^9 = 1,5625$

305. a) $S_{12} = 12 \cdot \frac{5+49}{2} = 324$

b) Peräkkäisten jäsenten suhde on $q = \frac{30}{15} = 2$.
$S_{16} = \frac{15\left(1-2^{16}\right)}{1-2} = 983\,025$

306. a) V
b) O
c) O
d) O
e) O
f) V

307. a) Peräkkäisten jäsenten erotus: $d = 14 - 7 = 7$
Viides jäsen: $a_5 = 7 + (5 - 1) \cdot 7 = 7 + 4 \cdot 7 = 35$

b) Peräkkäisten jäsenten suhde: $q = \frac{14}{7} = 2$
Viides jäsen: $a_5 = 7 \cdot 2^{5-1} = 7 \cdot 2^4 = 112$

308. a) $b_{100} = \frac{2 \cdot 100 + 1}{5} = 40,2$

b) Ratkaistaan yhtälö $\frac{2n+1}{5} = 8,2$.

$\frac{2n+1}{5} = 8,2 \quad | \cdot 5$
$2n + 1 = 41$
$2n = 40 \quad | : 2$
$n = 20$

Saatu n:n arvo käy jonon jäsenen järjestysluvuksi. Luku 8,2 on jonon 20. jäsen.

309. a) $a_5 = a_1 + (5 – 1) \cdot d$
$46 = 98 + 4d$
$4d = –52 \quad | : 4$
$d = –13$

b) $a_{15} = 98 + (5 – 1) \cdot (–13) = 98 + 14 \cdot (–13) = –84$

310.
$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$
$384 = 6 \cdot q^3 \quad | : 6$
$q^3 = 64$
$q = \sqrt[3]{64} = 4$ Yhtälö voidaan ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$a_6 = 6 \cdot 4^{6-1} = 6 \cdot 4^5 = 6\,144$

311.
$a_2 = 3a_1 – 5 = 3 \cdot 2 – 5 = 1$
$a_3 = 3a_2 – 5 = 3 \cdot 1 – 5 = –2$
$a_4 = 3a_3 – 5 = 3 \cdot (–2) – 5 = –11$

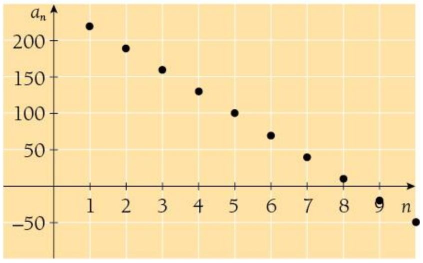
312. a) Peräkkäisten jäsenten erotus: $d = 38 – 30 = 8$
Viimeinen yhteenlaskettava: $a_{15} = 30 + (15 – 1) \cdot 8 = 30 + 14 \cdot 8 = 142$

$S_{15} = 15 \cdot \frac{30 + 142}{2} = 1\,290$

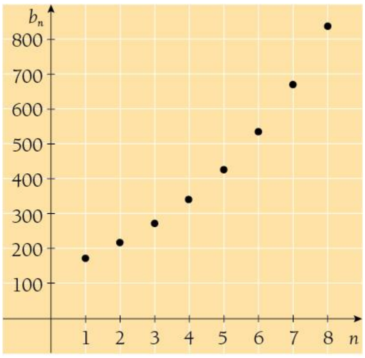
b) Peräkkäisten jäsenten suhde: $q = \frac{6}{2} = 3$

$S_{12} = \frac{2\left(1 - 3^{12}\right)}{1 - 3} = 531\,440$

313. a)



b)



314. Peräkkäisten jäsenten erotus: $d = 8 - 5 = 3$

Yleinen jäsen: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$

$$3n + 2 = 1\,000$$
$$3n = 998 \quad |:3$$
$$n = \frac{998}{3} = 332{,}666... \approx 332{,}7$$

Jonon jäsenet suurenevat koko ajan, joten lukua 1 000 pienempiä jonon jäseniä on 332.

315. Neljällä jaolliset positiiviset kokonaisluvut muodostavat aritmeettisen lukujonon 4, 8, 12, …

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$.

Viimeinen yhteenlaskettava: $a_{100} = 4 + (100 - 1) \cdot 4 = 4 + 99 \cdot 4 = 400$

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{4 + 400}{2} = 20\ 200$$

316. Lähetyskierrosten viestimäärät muodostavat geometrisen jonon, jossa ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja peräkkäisten jäsenten suhde $q = 2$.

Viestin vastaanottaneiden henkilöiden määrä on lukujonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{20} = \frac{2\left(1-2^{20}\right)}{1-2} = 2\ 097\ 150$$

317. a)

$$d = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$$

$$a_{100} = 2 + 99 \cdot \frac{2}{5} = \frac{208}{5}$$

$$S_{100} = \frac{2 + \frac{208}{5}}{2} \cdot 100 = 2\ 180$$

b)

$$q = \frac{\frac{13}{5}}{2} = \frac{6}{5}$$

$$S_{100} = \frac{2\left(1-\frac{6}{5}^{100}\right)}{1-\frac{6}{5}} = 828\ 179\ 735{,}2 \approx 828\ 000\ 000$$

318. Ratkaistaan molemmat kohdat yhtälön avulla.

a)

$$n^2 - n = 2\ 862$$

$$n^2 - n - 2\ 862 = 0$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskentaohjelmalla

$a = 1$, $b = -1$ ja $c = -2\ 862$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2\ 862)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{11\ 449}}{2} = \frac{1 \pm 107}{2}$$

$$n = \frac{1+107}{2} = 54 \quad \text{tai} \quad n = \frac{1-107}{2} = -53$$

Ratkaisuista vain $n = 54$ käy jonon jäsenen järjestysluvuksi.

Luku 2 862 on jonon 54. jäsen.

b) $\frac{2n+30}{n+1}=7$ $\quad | \cdot (n+1)$ Yhtälö voidaan ratkaista myös laskentaohjelmalla

$2n + 30 = 7(n + 1)$
$2n + 30 = 7n + 7$
$-5n = -23 \quad | : (-5)$
$n = 4{,}6$

Ratkaisuksi saatu n:n arvo ei käy jonon jäsenen järjestysluvuksi.

Luku 7 ei ole jonon jäsen.

319. a) Lasketaan annettujen peräkkäisten jäsenten erotukset.
$a_2 - a_1 = 23 - 11 = 12$
ja
$a_3 - a_2 = 36 - 23 = 13$

Koska erotukset eivät ole samat, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

b) Lasketaan annettujen peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{3}:1=\frac{2}{3}$$
ja
$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{12^{(6}}{18}=\frac{2}{3}$$

Koska suhteet ovat samat, lukujono voi olla geometrinen.

320. a) Peräkkäisten jäsenten erotus: $d = 13 - 21 = -8$

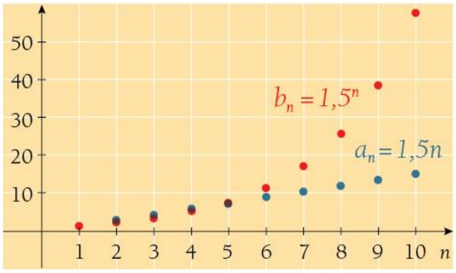
Viimeinen yhteenlaskettava: $a_{16} = 21 + (16 - 1) \cdot (-8) = 21 + 15 \cdot (-8) = -99$

$$S_{16}=16\cdot\frac{21+(-99)}{2}=-624$$

b) Peräkkäisten jäsenten suhde: $q=\frac{-6}{3}=-2$

$$S_{16}=\frac{3\left(1-(-2)^{16}\right)}{1-(-2)}=-65\,535$$

321.



322. a) Peräkkäisten jäsenten erotus: $d = 19 – 14 = 5$

Yleinen jäsen: $a_n = 14 + (n – 1) \cdot 5 = 14 + 5n – 5 = 5n + 9$

$5n + 9 = 100\,000$
$5n = 99\,991 \quad |:5$
$n = 19\,998{,}2$

Jonon jäsenet suurenevat koko ajan. Lukua 100 000 pienempiä jäseniä on 19 998.

b) Peräkkäisten jäsenten suhde: $q = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Yleinen jäsen: $a_n = 5 \cdot 1{,}2^{n-1}$

$5 \cdot 1{,}2^{n-1} = 100\,000$ Ratkaistaan yhteälö laskentaohjelmalla.
$n = 55{,}318... \approx 55{,}3$

Jonon jäsenet suurenevat koko ajan. Lukua 100 000 pienempiä jäseniä on 55.

323. $a_1 = 100$
$a_2 = 4$
$a_3 = \frac{4}{100} \cdot (–1)^3 = –0{,}04$
$a_4 = \frac{–0{,}04}{4} \cdot (–1)^4 = –0{,}01$
$a_5 = \frac{–0{,}01}{–0{,}04} \cdot (–1)^5 = –0{,}25$
$a_6 = \frac{–0{,}025}{–0{,}01} \cdot (–1)^6 = 25$

324. Ratkaistaan yhtälön avulla peräkkäisten jäsenten suhde q.

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1}$

$12 = 3 \cdot q^2 \quad |:3$ Yhtälö voidaan ratkaista laskentaohjelmalla

$q^2 = 4$

$q = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Mahdollisia q:n arvoja on kaksi, joista kumpikin johtaa eri lukujonoon.

Kun $q = 2$, kuudes jäsen on $a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 96$.

Kun $q = –2$, kuudes jäsen on $a_6 = 3 \cdot (–2)^{6-1} = 3 \cdot (–2)^5 = –96$

Kuudes jäsen on siis joko 96 tai –96.

325. a) Auton arvo alenee eksponentiaalisen mallin mukaan/geometrisen jonon mukaisesti,

b) $q = \dfrac{32\ 000}{40\ 000} = 0{,}8$

$a_n = 40\ 000 \cdot 0{,}8^n$

c) $40\ 000 \cdot 0{,}8^n = 2\ 000$

$0{,}8^n = \dfrac{2\ 000}{40\ 000}$

$n = \log_{0{,}8} 0{,}05 = 13{,}425..$

Arvo on alentunut alle 2 000 euroon 14 vuodessa.

326. Pallo kulkee pudotuskorkeutta 1,5 m vastaavan matkan kerran ja muut matkat kahteen kertaan.

Muodostetaan korkeuksista lukujono niin, että ensimmäinen jäsen on ensimmäisen pompun korkeus $a_1 = 0{,}75 \cdot 1{,}5 = 1{,}125$ (m).

Jono on geometrinen, ja sen suhdeluku on $q = 0{,}75$.

Ensimmäisen ja kymmenennen lattiaan osumisen välissä on yhdeksän eri korkeutta. Niiden summa:

$$S_9 = \frac{1{,}125(1-0{,}75^9)}{1-0{,}75} = 4{,}16211... \approx 4{,}162 \text{ (m)}$$

Kysytty matka:

$1{,}5 + 2 \cdot 4{,}162 = 9{,}824 \approx 9{,}8$ (m)

327. Lukujonon 15. termi saadaan lisäämällä kuudenteen termiin peräkkäisten jäsenten erotus d yhdeksän kertaa. Ratkaistaan d yhtälön avulla.

$a_{15} = a_6 + 9d$
$177 = 60 + 9d$
$117 = 9d \quad | : 9$
$d = 13$

Ensimmäinen termi:
$a_6 = a_1 + (6 - 1)d$
$60 = a_1 + 5 \cdot 13$
$60 = a_1 + 65$
$a_1 = -5$

Yleinen termi:
$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 13 = -5 + 13n - 13 = 13n - 18$

328. a) Päivittäiset sivumäärät muodostavat geometrisen lukujonon, jonka ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ja peräkkäisten jäsenten suhde $q = 1{,}05$.

Iidan n:ssä päivässä lukema sivumäärä on geometrinen summa

$$S_n = \frac{2\left(1 - 1{,}05^n\right)}{1 - 1{,}05}.$$

Ratkaistaan päivien lukumäärä laskentaohjelman avulla.

$$\frac{2\left(1 - 1{,}05^n\right)}{1 - 1{,}05} = 5 \cdot 568$$

$n = 87{,}654... \approx 87{,}7$

Iida lukee kirjan viiteen kertaan läpi 88 päivässä.

b) Neljässä viikossa on $4 \cdot 7 = 28$ päivää. Ratkaistaan geometrisen summan kaavasta ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 laskentaohjelmalla.

$$\frac{a_1\left(1 - 1{,}05^{28}\right)}{1 - 1{,}05} = 5 \cdot 568$$

$a_1 = 48{,}627... \approx 48{,}6$

Iidan tulee lukea ensimmäisenä päivänä 49 sivua.

329. Sijoitetaan annetut arvot aritmeettisen summan kaavaan ja ratkaistaan yhtälön avulla viimeinen yhteenlaskettava.

$$16\ 300 = 40\cdot\frac{76+a_{40}}{2} \quad |\cdot 2$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskentaohjelmalla.

$$32\ 600 = 40(76+a_{40})$$
$$32\ 600 = 3\ 040 + 40a_{40}$$
$$29\ 560 = 40a_{40} \quad |\cdot 40$$
$$a_{40} = 739$$

Selvitetään lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus d.

$$a_{40} = a_1 + (40-1)\cdot d$$
$$739 = 76 + 39d$$
$$663 = 39d \quad |:39$$
$$d = 17$$

Lukujonon toinen jäsen on $a_2 = a_1 + 17 = 76 + 17 = 93$.

330. Merkitään kerrosten määrää n:llä. Laatikkojen yhteismäärä $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ on aritmeettinen summa, jolle saadaan lauseke $S_n = n\cdot\frac{1+n}{2}$.

Ratkaistaan kerrosten määrä n yhtälön avulla.

$$n\cdot\frac{1+n}{2} = 1\ 000 \quad |\cdot 2$$
$$n(1+n) = 2\ 000$$
$$n + n^2 = 2\ 000$$
$$n^2 + n - 2\ 000 = 0 \qquad a = 1,\ b = 1 \text{ ja } c = -2\ 000$$

$$n = \frac{-1\pm\sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2\ 000)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{8\ 001}}{2}$$

$$n = \frac{-1+\sqrt{8\ 001}}{2} = 44{,}224\ldots \approx 44{,}2$$

tai

$$n = \frac{-1-\sqrt{8\ 001}}{2} = -45{,}224\ldots \approx -45{,}2$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskentaohjelmalla

Vain positiivinen ratkaisu käy. Koska se ei ole kokonaisluku, laatikkoja jää yli. Alimpaan kerrokseen tulee 44 laatikkoa.

Laatikkojen yhteismäärä: $S_{44} = 44\cdot\frac{1+44}{2} = 990$

Laatikkoja jää yli 1 000 – 990 = 10.

331. a) $\sum_{n=1}^{21} n$

b) $\sum_{n=1}^{11} 2n$

c) $\sum_{n=1}^{16} 2n-1$

332. Käytetään ratkaisussa taulukkolaskentaohjelmaa.

Syötetään toiseen sarakkeeseen laskukaava, joka viittaa edellisen rivin tulokseen x_{n-1}.

n	x_n	x_{n+1}
1	1,0000000	3,6666667
2	3,6666667	2,6675849
3	2,6675849	2,1999746
4	2,1999746	2,0864988
5	2,0864988	2,0801035
6	2,0801035	2,0800838
7	2,0800838	2,0800838
8	2,0800838	2,0800838
9	2,0800838	

Nähdään, että n:n arvosta 7 alkaen x_n on seitsemän desimaalin tarkuudella sama kuin x_{n+1}.

333. Aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n:
$d = 8 – 5 = 3$
$a_n = 5 + (n – 1) \cdot 3 = 3n + 2$

Geometrisen jonon yleinen jäsen b_n:
$q = \dfrac{99}{1\,000} = 0{,}99$
$b_n = 1000 \cdot 0{,}99^{n-1}$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$3n + 2 = 1000 \cdot 0{,}99^{n-1}$
$n = 110{,}37\ldots$

Lasketaan molempien jonojen 110 jäsenen suuruus.
$a_{110} = 3 \cdot 110 + 2 = 332$
$b_{110} = 1000 \cdot 0{,}99^{109} =334{,}37\ldots$

a_{110} on vielä pienempi kuin b_{110}.

6 AVARUUSGEOMETRIA

334. a) 3,6 l = 36 dl
b) 7,1 l = 7,1 dm^3
c) 8 300 cm^3 = 8,3 dm^3
d) 1 500 ml = 1,5 l
e) 4,0 l = 400 cl
f) 75 cm^3 = 0,075 dm^3 = 0,000075 m^3

335. Lasketaan laatikon tilavuus.
$V = 34 \cdot 22 \cdot 8 = 5\,984 \approx 6\,000$ (cm^3)

6 000 cm^3 = 6,000 dm^3 = 6,000 l
6,000 l ≈ 6,0 l

336. Lieriön tilavuus on $V = A_p \cdot h$, missä A_p on lieriön pohjan ala ja h lieriön korkeus.
$V = 44 \cdot 23 = 1\,012$ (cm^3)

1 012 cm^3 = 1,012 dm^3 = 1,012 l

C on oikea tilavuus.

337. a) Pallon tilavuus on $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, missä r on pallon säde.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 8{,}2^3}{3} = 2\ 309{,}56... \approx 2\ 300\ (\mathrm{cm}^3)$$

Pallon tilavuus on 2 300 cm^3.

b) Pallon pinta-ala on $A = 4\pi r^2$, missä r on pallon säde.
$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 8{,}2^2 = 844{,}96... \approx 840$ (cm^2)

Pallon pinta-ala on 840 cm^2.

338. Suoran ympyräkartion vaipan ala on $A_v = \pi rs$, missä r on kartion pohjaympyrän säde ja s on kartion sivujanan pituus.

$A_v = \pi rs = \pi \cdot 19 \cdot 26 = 1551{,}94... \approx 1\,600$ (cm^2)

C on varjostimen oikea pinta-ala.

339. Järjestä kappaleet tilavuuden mukaiseen järjestykseen pienimmästä tilavuudesta suurimpaan tilavuuteen.

A Kuution särmän pituus on 6,1 cm.
$V = (6{,}1\text{ cm})^3 = 226{,}981\text{cm}^3 \approx 230\text{ cm}^3$

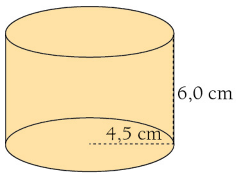
B Pallon säde on 3,7 cm.
$$V = \frac{4\pi \cdot 3{,}7^3}{3} = 212{,}17... \approx 210\ (\text{cm}^3)$$

C Ympyrälieriön korkeus on 8,1 cm ja pohjan säde 3,2 cm.
$V = \pi \cdot 3{,}2^2 \cdot 8{,}1 = 260{,}57\ldots \approx 260\ (\text{cm}^3)$

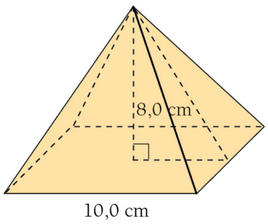
D Pyramidin pohjan pinta-ala on 108 cm^2 ja korkeus 6,4 cm.
$$V = \frac{108 \cdot 6{,}4}{3} = 230{,}4 \approx 230\ (\text{cm}^3)$$

Suuruusjärjestys on B, A, D ja C.

340. a)



b)



341. 10 cm = 0,1 m

Lasketaan tarvittavan mullan tilavuus.
$V = 5{,}5 \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}1 = 2{,}53\ (\text{m}^3)$

2 m^3 multaa ei riitä, koska sitä tarvitaan 2,53 m^3.

342. Pallon tilavuus on $V = 33\ \text{l} = 33\ \text{dm}^3 = 33\ 000\ \text{cm}^3$.

Pallon tilavuus lasketaan $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, missä r on pallon säde.

Muodostetaan pallon tilavuudesta yhtälö ja ratkaistaan säde r.

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 33\ 000 \qquad | \cdot 3$$
$$4\pi r^3 = 99\ 000 \qquad | : 4\pi$$
$$r^3 = \frac{99\ 000}{4\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{99\ 000}{4\pi}}$$
$$r = 19{,}8979\ldots \approx 19{,}90\ \text{(cm)}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 33\ 000$$

$$r = 19{,}8979\ldots \approx 19{,}90\ \text{(cm)}$$

Pallon halkaisija on $d = 2r = 2 \cdot 19{,}90 = 39{,}8 \approx 40$ (cm).

Pallon halkaisija on 40 cm.

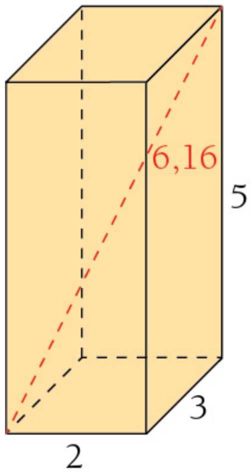
343. Kartion tilavuus on $V = \dfrac{A_p \cdot h}{3}$, missä A_p on kartion pohjan ala ja h kartion korkeus.

Nyt pohjana on neliö.

$$V = \frac{230^2 \cdot 139}{3} = 2\ 451\ 033{,}33\ldots \approx 2\ 500\ 000\ \ (\text{m}^3)$$

Pyramidin tilavuus on 2 500 000 m^3.

344. Piirretään särmiö.



Särmiön avaruuslävistäjän pituus on 6,16.

345. a) Kartion tilavuus on $V = \dfrac{A_p \cdot h}{3}$, missä A_p on kartion pohjan ala ja h kartion korkeus.

Lasketaan yhden konvehdin tilavuus.

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 0{,}9^2 \cdot 4{,}5}{3} = 3{,}81703... \approx 3{,}817 \ \ (\text{cm}^3)$$

Suklaata on 6 dl = 0,6 l = 6 dm^3 = 600 cm^3.

Suklaata riittää $\dfrac{600}{3{,}817} = 157{,}19\ldots \approx 160$ konvehtiin.

Suklaata riittää 160 konvehtiin.

b) Suoran ympyräkartion vaipan ala on $A_v = \pi rs$, missä r on kartion pohjaympyrän säde ja s on kartion sivujanan pituus.

Ratkaistaan s Pythagoraan lauseen avulla.

$s^2 = 4{,}5^2 + 0{,}9^2$

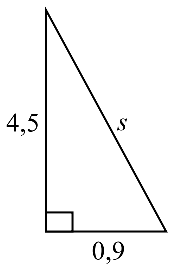
$s^2 = 21{,}06$

$s = \pm\sqrt{21{,}06}$

$s = 4{,}589117\ldots \approx 4{,}5891$ (cm)

Yhtälö voitaisiin ratkaista myös laskentaohjelmalla.

Negatiivinen ratkaisu ei käy.
ei käy pituudeksi.



Yhteen konvehtiin tarvitaan foliota

$A_v = \pi rs = \pi \cdot 0{,}9 \cdot 4{,}5891 = 12{,}9753\ldots \approx 12{,}98$ (cm^2).

Kaikkiin hääkonvehteihin menee foliota

$157 \cdot 12{,}98 = 2037{,}86 \approx 2\,000$ (cm^2).

$2\,000$ cm^2 = 20 dm^2

Konvehtien pakkaamiseen kuluu 20 dm^2 foliota.

346. Lasketaan poteron tilavuus. Se on suoran ympyrälieriön tilavuus $V = A_p \cdot h$, missä A_p on lieriön pohjan ala ja h lieriön korkeus.

$V = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 1{,}8 = 1{,}41371\ldots \approx 1{,}414\ (\text{m}^3)$

$1{,}414\ \text{m}^3 = 1\,414\ \text{dm}^3$

Massa lasketaan tilavuuden ja tiheyden avulla kertomalla ne keskenään.

$m = 1\,414\ \text{dm} \cdot 1{,}7\ \text{kg/dm}^3 = 2\,403{,}8\ \text{kg} \approx 2\,400\ \text{kg}$

Maa-aines painaa yhteensä 2 400 kg.

347. Täytteen tilavuus on $V = 11\ \text{dl} = 1{,}1\ \text{l} = 1{,}1\ \text{dm}^3 = 1\,100\ \text{cm}^3$.

Pohjan halkaisija on 24 cm, joten säde on 12 cm.

Suoran ympyrälieriön tilavuus on $V = A_p \cdot h$, missä A_p on lieriön pohjan ala ja h lieriön korkeus. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus h.

Yhtälö voitaisiin ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$$\pi \cdot 12^2 \cdot h = 1\,100 \quad |:12^2\pi$$
$$h = \frac{1\,100}{12^2\pi}$$
$$h = 2{,}43153\ldots \approx 2{,}432\ (\text{cm})$$

Täytekakun koko korkeus on
$2{,}432 + 5{,}6 = 8{,}032 \approx 8{,}0\ (\text{cm})$.

Täytekakun korkeus on 8,0 cm.

348. Kuution särmän pituus on s.
Pyramidin korkeus on puolet kuution särmän pituudesta eli korkeus on $0{,}5s$.
Kuution tilavuus on $V = s^3$.
Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{s^2 \cdot 0{,}5s}{3} = \frac{s^3}{6}$$

$$\frac{V_{pyramidi}}{V_{kuutio}} = \frac{\frac{s^3}{6}}{s^3} = \frac{1}{6} = 1:6$$

Suhde on 1 : 6.

349. Koska kaupungit sijaitsevat samalla leveyspiirillä, kaupunkien välinen etäisyys voidaan laskea kaaren *b* pituuden avulla.

Keskuskulman suuruus on $\alpha = 32° + 78° = 110°$

Kaaren pituus on
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot p = \frac{110}{360^\circ} \cdot 40\ 000 = 12\ 222{,}22\ldots\ \approx 12\ 000\ (\text{km}).$$

Kaupunkien välinen etäisyys on 12 000 km.

350. Iso munkki:
Ison munkin säde on *R*.
Tilavuus $V_{iso} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$
Pinta-ala $A = 4\pi R^2$

Pieni munkki:
Pienen munkin säde on *r*.
Tilavuus $V_{pieni} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$
Pinta-ala $A = 4\pi r^2$

Kolmen ison munkin tilavuus on $V_{isot} = 3 \cdot \dfrac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3$.

Pienten munkkien tilavuus on $V_{pienet} = 24 \cdot \dfrac{4\pi r^3}{3} = 32\pi r^3$.

$32\pi r^3 = 4\pi R^3$

Ratkaistaan yhtälöstä *R*.
$4R^3 = 32r^3$
$R^3 = 8r^3$
$R = 2r$

Lasketaan pinta-alojen suhteet.
$$\frac{A_{pienet}}{A_{isot}} = \frac{24 \cdot 4\pi r^2}{3 \cdot 4\pi R^2} = \frac{8r^2}{(2r)^2} = \frac{8r^2}{4r^2} = 2$$

Suhde on ”pienet” : ”isot” = 2.

351. Lasketaan särmiön tilavuus. Pohjana on viisikulmio ja korkeutena 16,0 cm – 2 · 0,4 cm = 15,2 cm.

Viisikulmio muodostuu suorakulmiosta ja kolmiosta. Lasketaan molempien pinta-alat.

Suorakulmion ala on
$A = 12{,}0 \cdot 10{,}4 = 124{,}8\ (\mathrm{cm}^2)$.

Kolmion kanta on 12,0 cm. Lasketaan kolmion korkeus Pythagoraan lauseen avulla.
$h^2 + 6{,}0^2 = 11{,}2^2$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
$h = 9{,}457272\ldots \approx 9{,}4573$
tai
$h = -9{,}457272\ldots \approx -9{,}4573$ Negatiivinen ratkaisu ei käy.

Kolmion ala on
$$A = \frac{12{,}0 \cdot 9{,}4573}{6} = 56{,}7438\,(\mathrm{cm}^2)$$

Viisikulmion ala on
$A = 56{,}7438 + 124{,}8 = 181{,}5438\ (\mathrm{cm}^2)$

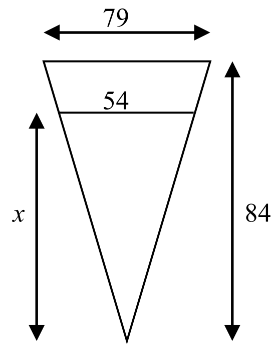
Piparkakkutalon tilavuus on
$V = 181{,}5438 \cdot 15{,}2 = 2\,759{,}4657 \approx 2\,760\ (\mathrm{cm}^3)$

$2\,760\ \mathrm{cm}^3 = 2{,}76\ \mathrm{dm}^3 = 2{,}76\ \mathrm{l}$

Piparkakkutalon sisätilavuus on $2\,760\ \mathrm{cm}^3 = 2{,}76$ l.

352. Pituuden x selvittämistä varten muodostetaan verranto ja ratkaistaan x.

$$\frac{x}{54}=\frac{x+84}{79}$$ Kerrotaan ristiin.



$54x + 4\ 536 = 79x$
$54x - 79x = -4\ 536$
$-25x = -4\ 536 \mid : (-25)$
$x = 181{,}44$

Verranto voidaan ratkaista myös laskentaohjelmalla.

Lasketaan pienen kartion tilavuus.

$$V=\frac{\pi r^2\cdot h}{3}=\frac{\pi\cdot 27^2\cdot 181{,}44}{3}=138\ 515{,}5688...\approx 138\ 515{,}57\ (\text{cm}^3)$$

Lasketaan ison kartion tilavuus.

$$V=\frac{\pi r^2\cdot h}{3}=\frac{\pi\cdot 39{,}5^2\cdot 265{,}44}{3}=433\ 699{,}7561...\approx 433\ 699{,}76\ (\text{cm}^3)$$

Lasketaan tilavuuksien erotus.
$433\ 699{,}76 - 138\ 515{,}57 = 295\ 184{,}19 \approx 300\ 000\ (\text{cm}^3)$
$300\ 000\ \text{cm}^3 = 300\ \text{dm}^3 = 300\ \text{l}$
Kompostorin tilavuus on 300 litraa.

353. a) Lasketaan pallon säde.

$p = 2\pi r$
$2 \cdot 3 \cdot r = 173$
$r = 28{,}83333\ldots \approx 28{,}833\ (\text{cm})$

Pallon tilavuus on

$$V=\frac{4\cdot 3\cdot 28{,}833^3}{3}=95\ 880{,}322...\approx 95\ 900\ (\text{cm}^3)$$

$95\ 900\ (\text{cm}^3) = 95{,}9\ \text{dm}^3 = 95{,}9\ \text{l}$

b) Lasketaan pallon säde.

$p = 2r$
$2 \cdot \pi \cdot r = 173$
$r = 27{,}53380\ldots \approx 27{,}534\ (\text{cm})$

Pallon tilavuus on

$$V=\frac{4\cdot \pi\cdot 27{,}534^3}{3}=87\ 437{,}258...\approx 87\ 400\ (\text{cm}^3)$$

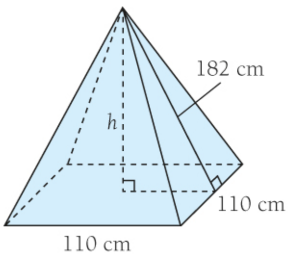
$87\ 400\ (\text{cm}^3) = 87{,}4\ \text{dm}^3 = 87{,}4\ \text{l}$

c) $\dfrac{95\ 880 - 87\ 437}{87\ 437} = 0{,}09656... \approx 0{,}097 = 9{,}7\ \%$ suurempi

a-kohdan vastaus on 9,7 % suurempi.

354. Teltan tilavuuden laskemista varten tarvitaan pyramidin korkeus.

Lasketaan pyramidin korkeus *h* Pythagoraan lauseella.



Tapa 1

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

$h^2 + 55^2 = 182^2$

$h = 173{,}4906\ldots \approx 173{,}49$ (cm)

tai

$h = -173{,}4906\ldots \approx -173{,}49$ (cm)

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

Tapa 2

$h^2 + 55^2 = 182^2$

$h^2 + 3\ 025 = 33\ 124 \quad | -3\ 025$

$h^2 = 30\ 099$

$h = \pm\sqrt{30\ 009}$

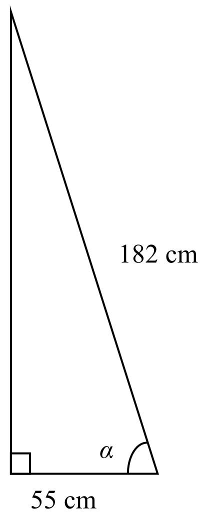
$h = 173{,}4906\ldots \approx 173{,}49$ (cm)

Pyramidin tilavuus on $V = \dfrac{A_p \cdot h}{3}$, missä A_p on pyramidin pohjan ala ja *h* pyramidin korkeus.

$V = \dfrac{110^2 \cdot 173{,}49}{3} = 699\ 743 \approx 700\ 000\ (\text{cm}^3)$

$700\ 000\ \text{cm}^3 = 700\ \text{dm}^3 = 700$ l

Pohjan ja tahkon välinen kulma saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.



$\cos\alpha = \frac{55}{182}$

$\alpha = 72{,}410\ldots° \approx 72°$

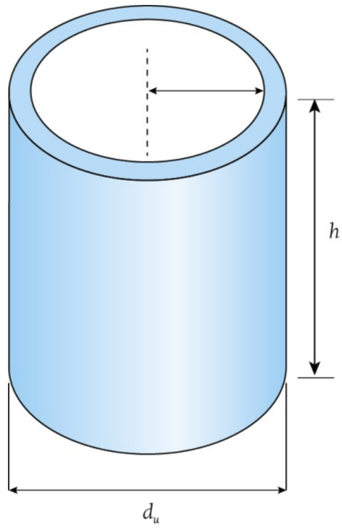
Teltan tilavuus on 700 dm^3 ja kysytty kulma 72°.

355. Korkeus h = 1 000 mm = 100 cm

Ulkohalkaisija d_u = 400 mm = 40 cm

Ulkosäde on r_u = 20 cm

Sisäsäde r_s = 20 cm – 5,9 cm = 14,1 cm



Lasketaan lieriön tilavuus ulkosäteellä.

$V_u = \pi \cdot 20^2 \cdot 100 = 125\,663{,}7061\ldots \approx 125\,664$ (cm^3).

Lasketaan lieriön tilavuus sisäsäteellä.

$V_s = \pi \cdot 14{,}1^2 \cdot 100 = 62\,458{,}0035\ldots \approx 62\,458$ (cm^3).

Lasketaan tilavuuksien erotus.

$V_u - V_s = 125\,664 - 62\,458 = 63\,206$ (cm^3)

63 206 cm^3 = 63,206 dm^3 = 63,206 l

Betonin tilavuus on 63 litraa.

356. Jäädykkeen korkeus on puolipallon säde.

Jäädykkeen tilavuus on V = 2,1 l = 2,1 dm^3 = 2 100 cm^3

Puolipallon tilavuus lasketaan $V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi r^3}{3}$, missä r on pallon säde.

Muodostetaan puolipallon tilavuudesta yhtälö ja ratkaistaan säde r.

Tapa 1

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi r^3}{3} = 2\,100$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

$r = 10{,}0089\ldots \approx 10$ (cm)

Tapa 2

Ratkaistaan yhtälö laskemalla.

$4\pi r^3 = 12\ 600 \mid : 4\pi$

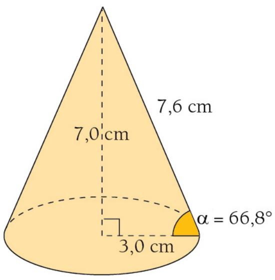
$$r^3 = \frac{12\ 600}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{12\ 600}{4\pi}}$$

$r = 10{,}0089\ldots \approx 10$ (cm)

Jäädyke on 10 cm korkea.

357. a) Piirretään ympyräkartio laskentaohjelmalla ja määritetään sillä sivujanan pituus ja sivujanan ja pohjan välinen kulma.



Sivujanan pituus on 7,6 cm ja kulma 66,8°.

b) Lasketaan sivujanan pituus.

$s^2 = 3{,}0^2 + 7{,}0^2$

$s^2 = 9 + 49$

$s^2 = 58$

$s = \pm\sqrt{58}$

$s = 7{,}615\ldots \approx 7{,}6$ (cm)

tai

$s = -7{,}615\ldots \approx -7{,}6$ (cm)

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

Lasketaan kulman suuruus.

$$\tan\alpha = \frac{7{,}0}{3{,}0}$$

$\alpha \approx 66{,}8°$

358. Letku on suoran ympyrälieriön muotoinen.
Vesiletkun pituus eli lieriön korkeus h = 40 m = 4 000 cm

Ulkohalkaisija d_u = 22 mm = 2,2 cm
Ulkosäde on r_u = 1,1 cm
Sisäsäde r_s = 1,1 cm – 0,3 cm = 0,8 cm

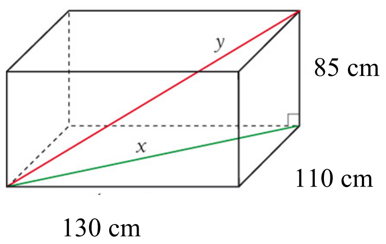
Lasketaan lieriön tilavuus sisäsäteellä.
$V_u = \pi \cdot 0{,}8^2 \cdot 4\,000 = 8042{,}47\ldots \approx 8\,042\ (\text{cm}^3)$.
$8\,042\ \text{cm}^3 = 8{,}042\ \text{dm}^3 = 8{,}042\ \text{l}$

Lasketaan pumppaamiseen kuluva aika.
$$\frac{8{,}042}{12} = 0{,}6701\ldots \approx 0{,}67\ (\text{min})$$

$0{,}67 \cdot 60 = 40{,}2\ (\text{s})$

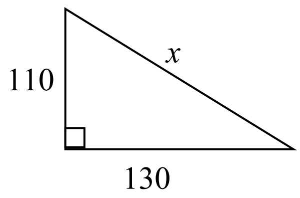
Aikaa kuluu 40,2 sekuntia.

359.



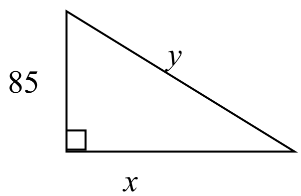
Tapa 1
Aurinkovarjon pituuden selvittämiseksi pitää laskea laatikon avaruuslävistäjä y.
$$y = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{130^2 + 110^2 + 85^2} = 190{,}32\ldots \approx 190\ (\text{cm})$$

Tapa 2
Pythagoraan kolmioiden avulla.



$x^2 = 130^2 + 110^2$
Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 170{,}2938\ldots \approx 170{,}29\ (\text{cm})$
tai
$x = -170{,}2938\ldots \approx -170{,}29\ (\text{cm})$

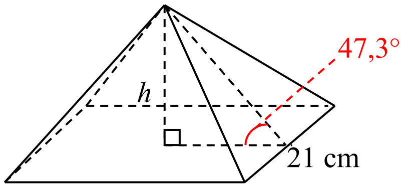
Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.



$y^2 = 170{,}29^2 + 85^2$
Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$y = 190{,}32\ldots \approx 190\ (\text{cm})$
tai
$y = -190{,}32\ldots \approx -190\ (\text{cm})$

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

360. Piirretään mallikuva.



Pyramidin vaippa muodostuu neljästä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta. Sivusärmän pituuden laskemista varten pitää selvittää tasakylkisen kolmion korkeus. Se saadaan trigonometrian avulla.

$$\cos 47{,}3^\circ = \frac{10{,}5}{x} \quad \Big| \cdot x$$

$$x \cdot \cos 47{,}3^\circ = 10{,}5 \quad | : \cos 47{,}3^\circ$$

$$x = 15{,}48307\ldots \approx 15{,}483 \text{ (cm)}$$

Sivusärmän pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$s^2 = 10{,}5^2 + 15{,}483^2$

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

$s^2 = 349{,}973289$

$s = \pm\sqrt{349{,}973289}$

$s = 18{,}707\ldots \approx 18{,}7$ (cm)

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

Pyramidin tilavuuden laskemiseen tarvitaan pyramidin korkeus. Se saadaan trigonometrian avulla.

$$\tan 47{,}3^\circ = \frac{h}{10{,}5} \quad \Big| \cdot 10{,}5$$

$$h = \tan 47{,}3^\circ \cdot 10{,}5$$

$$h = 11{,}37874\ldots \approx 11{,}379 \text{ (cm)}$$

Pyramidin tilavuus on $V = \frac{A_p \cdot h}{3}$, missä A_p on pyramidin pohjan ala ja ja h pyramidin korkeus.

$$V = \frac{21{,}0^2 \cdot 11{,}379}{3} = 1\ 672{,}713 \approx 1\ 670 \text{ (cm}^3\text{)}$$

1 670 cm^3 = 1,67 dm^3 = 1,67 l

Sivusärmän pituus on 18,7 cm ja pyramidin tilavuus 1,67 l.

361. Lasketaan jääkiekkokaukalon alapuolelle muodostuvan särmiön tilavuus, kun pyöristyksiä ei huomioida.

Särmiön tilavuus on
$V = 60 \cdot 29 \cdot 2{,}5 = 4\ 350\ (\text{m}^3)$

Pyöristysten vuoksi jää tyhjää tilaa, jonka tilavuus on
$V = 12^2 \cdot 2{,}5 - \pi \cdot 6^2 \cdot 2{,}5 = 77{,}2566\ldots \approx 77{,}26\ (\text{m}^3)$

Poistettavan maa-aineksen tilavuus on
$4\ 350 - 77{,}26 = 4\ 272{,}74\ (\text{m}^3)$

Kuorma-autokeikkojen lukumäärä
$$\frac{4\ 272{,}74}{20} = 213{,}637$$

Maata vaihdetaan noin 210 kuorma-autollista.

362. Lasketaan särmiön muotoiseen pakkaukseen tarvittavan pahvin pinta-ala.
Särmiön mitat ovat:
$3 \cdot 8{,}6 = 25{,}8$ (cm)
8,6 cm
$4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$ (cm).

Pinta-ala on
$A = 2 \cdot (25{,}8 \cdot 8{,}6 + 25{,}8 \cdot 4{,}8 + 8{,}6 \cdot 4{,}8) = 774\ (\text{cm}^2)$.

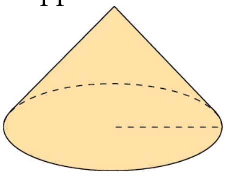
Suoran ympyrälieriön korkeus on
$12 \cdot 1{,}2 = 14{,}4$ (cm)

ja pohjan säde on 4,3 cm.

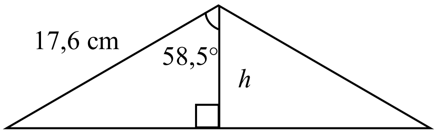
Pinta-ala on
$A_{kok} = A_v + 2A_\text{p} = 2 \cdot \pi \cdot 4{,}3 \cdot 14{,}4 + 2 \cdot \pi \cdot 4{,}3^2 = 505{,}2309\ldots \approx 505{,}23$.

Pahvia tarvitaan enemmän
$$\frac{774 - 505{,}23}{505{,}23} = 0{,}5319\ldots \approx 53\ (\%)$$

363. Kappaleen mallikuva näyttää tältä:



Lasketaan kartion korkeus trigonometrian avulla.



$$\cos 58{,}5° = \frac{h}{17{,}6} \quad | \cdot 17{,}6$$

$h = \cos 58{,}5° \cdot 17{,}6$

$h = 9{,}1959\ldots \approx 9{,}196$ (cm)

Lasketaan säde r.

$$\sin 58{,}5° = \frac{r}{17{,}6} \quad | \cdot 17{,}6$$

$r = \sin 58{,}5° \cdot 17{,}6$

$r = 15{,}0064\ldots \approx 15{,}006$ (cm)

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 15{,}006^2 \cdot 9{,}196}{3} = 2\ 168{,}49\ldots \approx 2\ 170\ \ (\text{cm}^3)$$

Kartion tilavuus on 2 170 cm^3.

364. Leikataan kartiota sen korkeusjanan kautta kulkevalla tasolla, jolloin syntyy kolmio ja sen sisällä oleva suorakulmio. Suorakulmion kummallakin puolella on suorakulmainen kolmio, jonka korkeus on lieriön korkeus d ja kanta 0,5d. Kartion korkeusjana jakaa suorakulmion yläpuolella olevan kolmion kahdeksi kolmioksi, jotka ovat yhteneviä suorakulmion vieressä olevien kolmioiden kanssa. Näin ollen niidenkin korkeus on d. Siitä saadaan kartion korkeudeksi 2d. Kartion pohjaympyrän säde on d, joten kartion tilavuus on

$$V_k = \frac{\pi d^2}{3} \cdot 2d\ .$$

Lieriön tilavuus on

$$V_l = \pi \cdot (0{,}5d)^2 \cdot d\ .$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_l = \pi \cdot (0{,}5d)^2 \cdot d}{V_k = \dfrac{2\pi d^3}{3}} = \pi \cdot (0{,}5d)^2 \cdot d \cdot \frac{3}{2\pi d^3} = \frac{3}{8} = 0{,}375\ .$$

Lieriön tilavuus on 37,5 % kartion tilavuudesta.

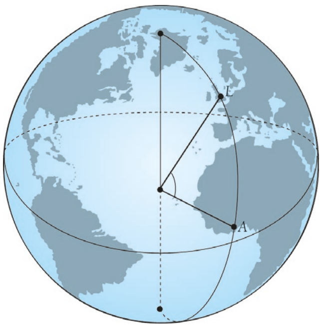
365. Koska kaupungit sijaitsevat samalla pituuspiirillä, kaupunkien välinen etäisyys voidaan laskea kaaren *b* pituuden avulla.

Muutetaan 51°30'N ja 5°37'N asteiksi.

$$51°30' = 51° + \frac{30°}{60} = 51{,}5°$$

$$5°37' = 51° + \frac{37°}{60} = 5{,}61666...° \approx 5{,}6167°$$

Lontoon ja Accran välinen kulma on 51,5° – 5,6167° = 45,8833°



Kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot p = \frac{45{,}8833°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6\ 370 = 5\ 101{,}18... \approx 5\ 100\ (\text{km}).$$

Kaupunkien välinen etäisyys on 5 100 km.

366. a) Akvaarion sisätilavuus on
$V = 80 \cdot 29 \cdot 40 = 92\ 800\ (\text{cm}^3)$

92 800 $\text{cm}^3 \approx 93\ \text{dm}^3 = 93$ l

Akvaarion sisätilavuus on 93 litraa.

b) Lasketaan lasinosien tilavuudet
$V = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 40 \cdot 30 = 1\ 200\ (\text{cm}^3)$
$V = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 80 \cdot 40 = 3\ 200\ (\text{cm}^3)$
$V = 0{,}5 \cdot 81 \cdot 30 = 1\ 215\ (\text{cm}^3)$

Yhteensä $V = 1\ 200 + 3\ 200 + 1\ 215 = 5\ 615\ (\text{cm}^3)$
5 615 cm^3 = 5,615 dm^3

2 500 kg/m^3 = 2 500 g/dm^3

Lasi painaa
$5{,}615\ \text{dm}^3 \cdot 2\ 500\ \text{g/dm}^3 = 1\ 4037{,}5\ \text{g}$

$1\ 4037{,}5\ \text{g} = 14{,}0375\ \text{kg} \approx 14\ \text{kg}$

Akvaario painaa 14 kg.

367. a) Suoran ympyrälieriön tilavuus on 54π.

Suoran ympyrälieriön tilavuus lasketaan
$V = \pi r^2 h$
$\pi r^2 h = 54\pi$
$r^2 h = 54$
$r^2 h = 9 \cdot 6$
$r^2 h = 3^2 \cdot 6$

Siis säde on 3 ja korkeus 6.

b) Säännöllisen neliöpohjaisen pyramidin kokonaispinta-ala on 96.

Säännöllisen neliöpohjaisen pyramidin pinta-ala on
$A_{\text{kok}} = A_{\text{neliö}} + A_{\text{vaippa}} = A_{\text{neliö}} + 4 \cdot A_{\text{kolmio}}$

Neliön sivun pituutta merkitään x:llä ja kolmion korkeutta h:lla. Säännöllisessä neliöpohjaisessa pyramidissa vaipan kolmion kannan pituus on yhtä suuri kuin neliön sivun pituus.

Saadaan $x^2 + 4 \cdot \dfrac{xh}{2} = x^2 + 2xh$.

Nyt $x^2 + 2xh = 96$.

Jos neliön sivun pituus on 6 ja kolmion korkeus on 5, yhtälö toteutuu.
$4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 10 = 16 + 80 = 96$
$6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5 = 36 + 60 = 96$

Lasketaan vielä pyramidin korkeus Pythagoraan lauseen avulla.
$3^2 + h^2 = 5^2$
Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
$h = 4$ (negatiivinen ratkaisu ei käy)

Pohjaneliön sivun pituus on 6 ja pyramidin korkeus 4.

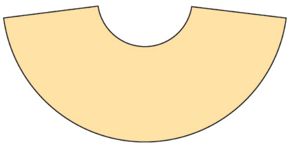
368. a) Katkaisemattoman kartion sivujanan pituus on
$s^2 = 30^2 + 15^2$
$s = \sqrt{1\,125}$

Katkaistu kartio on yhdenmuotoisuuden perusteella kolmasosan tästä eli jäljelle jää 2/3.

$$S = \frac{2}{3}\sqrt{1\,125} = 22{,}3606... \approx 22{,}4 \text{ (cm)}$$

Sivujanan S pituus on 22,4 cm.

b)



c) Katkaisemattoman kartion vaipan ala
$A = \pi rs = \pi \cdot 15{,}0 \cdot \sqrt{1\,125}$

Pois otettu osa on yhdenmuotoisuuden perusteella
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Katkaistun kartion vaipan ala on
$\frac{8}{9}\pi \cdot 15{,}0 \cdot \sqrt{1\,125} = 1\,404{,}96 \approx 1\,405 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Katkaistun kartion vaipan ala on 1 405 cm^2.

Koontitehtävät luvuista 1–6

369. a) $x^4 = 81$
$x = 3$ tai $x = -3$

b) $$\frac{x^{15} \cdot x^{39}}{x^{52}} = \frac{x^{15+39}}{x^{52}} = \frac{x^{54}}{x^{52}} = x^{54-52} = x^2$$

c) $$6^0 + 6^{-1} = 1 + \frac{1}{6^1} = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$$

370. a) $$\begin{cases} y = -3x + 5 \\ x - 2y = 25 \end{cases}$$

Sijoitetaan ylempi yhtälö alempaan yhtälöön y:n paikalle.
$x - 2(-3x + 5) = 25$
$x + 6x - 10 = 25$
$7x = 35 \quad | : 7$
$x = 5$

Sijoitetaan $x = 5$ ylempään yhtälöön.
$y = -3 \cdot 5 + 5 = -10$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = 5$ ja $y = -10$.

b) $\log_2 64 = 6$, koska $2^6 = 64$.

c) Kuvasta nähdään, että $f(1) = -4$.

Funktio saa arvon 4, kun $x = -1$ tai $x = 5$.

371. a) Merkitään $(x_1, y_1) = (-4, 5)$ ja $(x_2, y_2) = (8, 29)$.

Suoran kulmakerroin on
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{29 - 5}{8 - (-4)} = \frac{24}{12} = 2.$$

Sijoitetaan kulmakerroin ja toinen suoran pisteistä $(x_0, y_0) = (8, 29)$ suoran yhtälön kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$y - 29 = 2(x - 8)$ Muokataan muotoon $y = kx + b$.
$y - 29 = 2x - 16$
$y = 2x + 13$

b) $a_1 = 7$ ja $a_2 = 11$
$d = 11 - 7 = 4$

$7 + (n - 1) \cdot 4 = 1\,000$
$7 + 4n - 4 = 1\,000$
$4n = 997 \quad |:4$
$n = 249{,}25$

Tuhatta pienempiä on 249 jäsentä.

372. a) Pohjan säde: $r = \frac{5{,}7}{2} = 2{,}85\,(\text{cm})$

Tilavuus: $V = \frac{A_p \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2{,}85^2 \cdot 6{,}8}{3} = 57{,}83... \approx 58\,(\text{cm}^3)$

Kartion tilavuus on 58 cm^3.

b)

Reikiä	Tyhjenemisaika (min)
2	8,5
5	x

Reikien määrä ja tyhjenemisaika ovat kääntäen verrannolliset.

$\frac{2}{5} = \frac{x}{8{,}5}$

$5x = 2 \cdot 8{,}5$
$5x = 17 \quad |:5$
$x = 3{,}4$ (min)

0,4 min = 0,4 · 60 s = 24 s

3,4 min = 3 min 24 s ≈ 3 min 20 s

Tyhjeneminen kestää 3 min 20 s.

373. Paikkakunnat sijaitsevat suoralla mainitussa järjestyksessä eli Seinäjoki on keskimmäisenä.

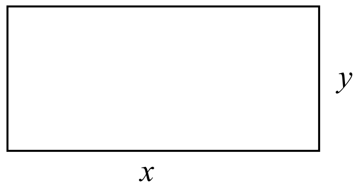
Lämpötilan muutos kilometriä kohti:
$\frac{20{,}4 - 19{,}1}{77} = 0{,}0168831... \approx 0{,}01688$ (°C).

Lämpötila Lappeenrannassa:
$19{,}1 + 503 \cdot 0{,}01688 = 27{,}59064 \approx 27{,}6$ (°C).

Koska lämpötila on yli 25 °C, Lappeenrannassa on hellettä.

374. Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä ensin y.

$$2x + 2y = 15{,}8$$
$$2y = 15{,}8 - 2x \quad | : 2$$
$$y = 7{,}9 - x$$



Sijoitetaan $7{,}9 - x$ ylempään yhtälöön y:n paikalle.

$$x(7{,}9 - x) = 13{,}2$$
$$7{,}9x - x^2 = 13{,}2$$
$$-x^2 + 7{,}9x - 13{,}2 = 0 \qquad a = -1,\ b = 7{,}9,\ c = -13{,}2$$

Tapa 1 laskentaohjelmalla
$x = 2{,}4$ tai $x = 5{,}5$

Tapa 2

$$x = \frac{-7{,}9 \pm \sqrt{7{,}9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-13{,}2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7{,}9 \pm \sqrt{9{,}61}}{-2} = \frac{-7{,}9 \pm 3{,}1}{-2}$$

$$x = \frac{-7{,}9 + 3{,}1}{-2} = 2{,}4 \text{ tai } x = \frac{-7{,}9 - 3{,}1}{-2} = 5{,}5$$

Ratkaistaan y.
Kun $x = 2{,}4$, $y = 7{,}9 - 2{,}4 = 5{,}5$
Kun $x = 5{,}5$, $y = 7{,}9 - 5{,}5 = 2{,}4$

Molemmat x:n arvot johtivat samaan ratkaisuun.

Sivujen pituudet ovat 5,5 m ja 2,4 m.

375. Syyskuussa 2018 rekisteröitiin 12 012 uutta ajoneuvoja, joista autoja oli 8091. Ensirekisteröinnin laskua edelliseen vuoteen oli 18,7 %.

Henkilöautoja 6 528 (laskua 28,4 %).

a) $$\frac{6\ 528}{12\ 012} = 0{,}5434... \approx 0{,}54 = 54\ \%$$

Uusia henkilöautoja oli 54 %.

b) Merkitään vuoden 2017 määrää x:llä.
$100\ \% - 28{,}4\ \% = 71{,}6\ \% = 0{,}716$

$$0{,}716x = 6\ 528 \quad | : 0{,}716$$
$$x = 9\ 117{,}31\ldots \approx 9\ 120$$

Uusia henkilöautoja rekisteröitiin 9 120.

376. a) $f(t) = 3^t \cdot 40$

b) $f(5) = 3^5 \cdot 40 = 9\,720 \approx 9\,700$

c) $3^t \cdot 40 = 500\,000 \quad | : 40$

$3^t = 12\,500$ Ratkaistaan logaritmin avulla.

$$t = \frac{\lg 12\,500}{\lg 3}$$

$t = 8{,}586\ldots \approx 8{,}6$

500 000 hyttystä ylittyy 9 viikon kuluttua kesän alusta.

377. Pallon tilavuus:

$$V = \frac{500}{2{,}54} = 196{,}850... \approx 200\,(\mathrm{l})$$

Pallon säde:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 196{,}85$$

Tapa 1 laskentaohjelmalla
Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.
$r = 3{,}60868\ldots \approx 3{,}609$ (dm)

Tapa 2

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 196{,}85 \mid \cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 590{,}55 \quad | : 4\pi$$

$$r^3 = \frac{590{,}55}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{590{,}55}{4\pi}}$$

$r = 3{,}60868\ldots \approx 3{,}609$ (dm)

Ympärysmitta:
$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 3{,}609 = 22{,}67\ldots \approx 23$ (dm)

23 dm = 2,3 m

Pallon tilavuus on 200 l ja ympärysmitta 2,3 m.

378. Merkitään koko matkaa s:llä ja tavallisesti käytettyä ajonopeutta v:llä.

	Matka	**Nopeus**	**Aika**
Normaali osa	$0{,}9s$	v	t_1
Hitaampi osa	$0{,}1s$	$0{,}5v$	t_2

Muodostetaan lausekkeet ajoille t_1 ja t_2. Nopeus on matka jaettuna ajalla eli $v=\frac{s}{t}$.

Ratkaistaan yhtälöstä aika t.

$$v=\frac{s}{t} \quad |\cdot t$$
$$tv=s \quad |:v$$
$$t=\frac{s}{v}$$

Normaalinopeudella ajettavaan osaan kulunut aika:
$$t_1=\frac{0{,}9s}{v}=0{,}9\frac{s}{v}$$

Hitaammin ajettavaan osaan kulunut aika:
$$t_2=\frac{0{,}1s}{0{,}5v}=0{,}2\frac{s}{v}$$

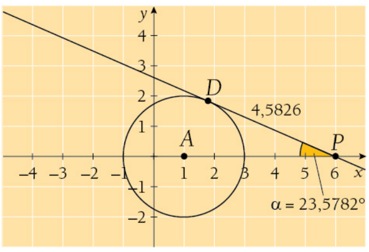
Koko matkaan kulunut aika:
$$t=t_1+t_2=0{,}9\frac{s}{v}=0{,}2\frac{s}{v}=1{,}1\frac{s}{v}$$

Keskinopeus koko matkalla:
$$v_k=\frac{s}{t}=s:1{,}1\frac{s}{v}=s:\frac{1{,}1s}{v}=s\cdot\frac{v}{1{,}1s}=\frac{sv}{1{,}1s}=\frac{1}{1{,}1}v=0{,}90909...v\approx 0{,}909v$$

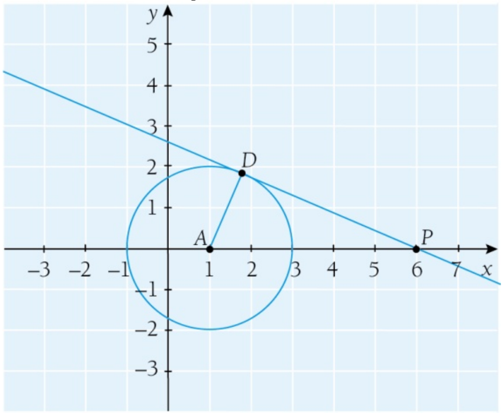
Tämä on 90,9 % tavallisesti käytetystä nopeudesta v.

Koko matka taittui 100 % – 90,9 % = 9,1 % hitaammin.

379. a)



b) Ympyrän tangentti ja sivuamispisteeseen piirretty säde ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, joten kuvan kolmio on suorakulmainen.



$AD = 2$ ja $AP = 6 - 1 = 5$

Merkitään $DP = x$.

Pythagoraan lause:
$$x^2 + 2^2 = 5^2$$
$$x^2 + 4 = 25$$
$$x^2 = 21$$
$$x = \pm\sqrt{21}$$
$$x = \sqrt{21} = 4{,}582... \approx 4{,}6$$

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

Janan DP pituus on $\sqrt{21} \approx 4{,}6\,(\text{cm})$.

Merkitään α:lla kulmaa DPA.
$$\sin\alpha = \frac{2}{5}$$
$$\alpha = 23{,}578...° \approx 23{,}6°$$

Kulman DPA suuruus on 23,6°.

Janan DP pituus on 4,6 cm ja kulman DPA suuruus 23,6°.

380. Asumiskustannukset alussa: $0{,}48 \cdot 5\,600 = 2\,688$ (€)
Muut kulut alussa: $5\,600 - 2\,688 = 2\,912$ (€)

Asumiskustannusten nousu: $0{,}12 \cdot 2\,688 = 322{,}56$ (€)

Muita kuluja on karsittava tämän verran. Osuus muista kuluista:
$$\frac{322{,}56}{2\,912} = 0{,}1107... \approx 0{,}11 = 11\ \%$$

Kuluja on karsittava 11 %.

381. Merkitään väkiluvun vuotuista muutoskerrointa k:lla.
$2010 - 2004 = 6$

Muodostetaan yhtälö muutoskertoimen k ratkaisemiseksi ja ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla

$k^6 \cdot 6{,}4 = 6{,}8$
$k \approx 1{,}010155322$ tai $k \approx -1{,}010155322$

Negatiivinen ratkaisu ei käy muutoskertoimeksi.

Merkitään vuodesta 2004 kulunutta aikaa vuosina x:llä.

Muodostetaan yhtälö vuosimäärän x ratkaisemiseksi ja ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

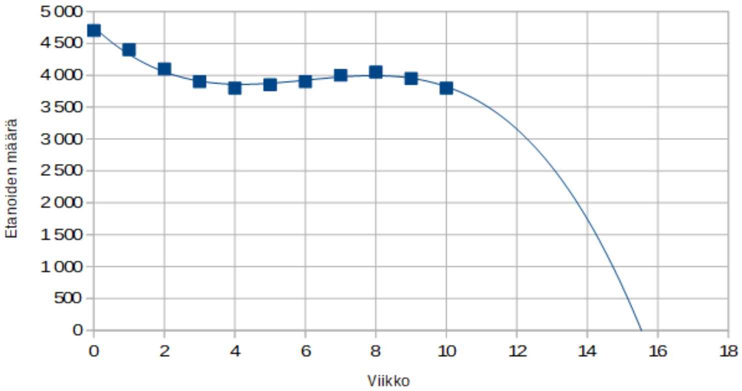
$1{,}010155322^x \cdot 6{,}4 = 10$
$x = 44{,}168\ldots \approx 44{,}2$

$2004 + 44{,}2 = 2048{,}2$

Tehtävässä ei kerrottu, ovatko väkilukutiedot vuosien alusta vai lopusta. Pyöristetään siksi vastaus ylöspäin.

Väkiluku ylittää mallin mukaan 10 miljardin rajan vuonna 2049.

382. a) Sijoitetaan arvot laskentaohjelman taulukkonäkymään. Kolmannen asteen polynomisen mallin mukaiseksi yhtälöksi saadaan ohjelmasta
$y = -5{,}2253x^3 + 94{,}988x^2 - 520{,}88x + 4\,757{,}7$.



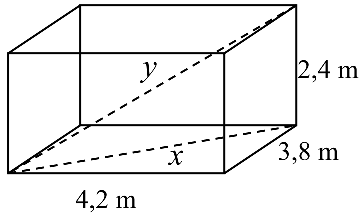
b) Kun $x = 13$, $y = -5{,}2253 \cdot 13^3 + 94{,}988 \cdot 13^2 - 520{,}88 \cdot 13 + 4\,757{,}7 \approx 2\,560$

c)

Viikko	Etanoiden määrä
13	2559,2479
15	681,4125
16	-662,2808
17	-2317,6269

15. viikolla etanat kuolevat puutarhasta. Tämän jälkeen malli ei enää toimi, vaan se antaa mahdottomia negatiivisia arvoja etanoiden määrälle.

383. Huoneen pohjan lävistäjä saadaan Pythagoraan lauseella.



$x^2 = 3{,}8^2 + 4{,}2^2$
$x^2 = 32{,}08$
$x = \pm\sqrt{32{,}08}$
$x = 5{,}66392\ldots \approx 5{,}664$ (m)

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

Leppäkertun kävelemä matka on
$2{,}4 + 5{,}664 = 8{,}064$ (m).

Ampiaisen lentoreitin pituus on huoneen avaruuslävistäjän pituus. Ratkaistaan se Pythagoraan lauseella.
$y^2 = 5{,}664^2 + 2{,}4^2$
$y^2 = 37{,}840896$
$y = \pm\sqrt{37{,}840896}$
$y = 6{,}15149\ldots \approx 6{,}151$ (m)

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

$8{,}064 - 6{,}151 = 1{,}913 \approx 1{,}9$ (m)

$$\frac{8{,}064 - 6{,}151}{6{,}151} = 0{,}3110\ldots \approx 31\ \%$$

Leppäkertun kävelemä matka on 1,9 m eli 31 % pidempi.

7 TALOUSMATEMATIIKKAA

Verotus, hinnat ja rahan arvo

384. $0{,}215 \cdot 17\,850 = 3\,837{,}75$ (€)

385.

Vuosi	Hinta (€)	Indeksi (2015 = 100)
2015	200	100,0
2016	210	105,0
2017	235	$\frac{235}{200} \cdot 100 = 117{,}5$
2018	231	$\frac{231}{200} \cdot 100 = 115{,}5$

386. $600 \cdot 10{,}2 = 6\,120$ (SEK)

387. a) $0{,}1 \cdot 20 = 2$ (€)

b) Ratkaistaan veroton hinta.

$1{,}24x = 20 \quad | : 1{,}24$

$x = 16{,}1290\ldots \approx 16{,}13$

Veron määrä on

$20 - 16{,}13 = 3{,}87$ (€).

388. a) oikein
b) väärin
c) väärin
d) väärin
e) oikein
f) oikein

389. $518 + 0{,}1725 \cdot (29\,500 - 25\,700) = 1\,173{,}50$ (€)

390. a) $\frac{1\,280}{74{,}8} = 17{,}1122\ldots \approx 17{,}11$ (€)

b) $24 \cdot 74{,}8 = 1\,795{,}2$ (RUB)

391. 0,165 · 2 945 = 485,925 ≈ 485,93
0,0635 · 2 945 = 187,0075 ≈ 187,01
0,019 · 2 945 = 55,955 ≈ 55,96

Verot ja maksut ovat yhteensä 728,90 €.

Netto palkka on 2 945 – 728,90 = 2 216,10 €.

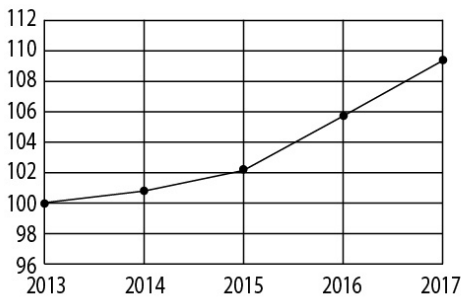
392. Ratkaistaan veroton hinta.

$$0{,}1 \cdot x = 1{,}80 \quad |:0{,}1$$
$$x = 18{,}00$$

Verollinen hinta on
18 + 1,80 = 19,80 (€).

393.

Vuosi	**Hinta (€)**	**Indeksi**
2013	11,12	100,0
2014	11,22	$\frac{11,22}{11,12}\cdot 100 = 100,9$
2015	11,36	$\frac{11,36}{11,12}\cdot 100 = 102,2$
2016	11,77	$\frac{11,77}{11,12}\cdot 100 = 105,8$
2017	12,17	$\frac{12,17}{11,12}\cdot 100 = 109,4$



394. a) $$\frac{1\,812}{1\,910}\cdot 124\ 000 = 117\ 637{,}69\ldots \approx 117\ 638\ (€)$$

b) $$\frac{1\,927}{1\,910}\cdot 124\ 000 = 125\ 103{,}66\ldots \approx 125\ 104\ (€)$$

395. a) $$\frac{1\,480}{1\,200} - 1 = 0{,}23333\ldots \approx 0{,}233 = 23{,}3\ \%$$

b) $$\frac{129{,}5}{118{,}5} - 1 = 0{,}09282\ldots \approx 0{,}093 = 9{,}3\ \%$$

c) Muutetaan aiempi palkkiomäärä vastaamaan viiden vuoden jälkeistä hintatasoa (rahanarvoa).

$$\frac{118{,}5}{129{,}5} = \frac{1\,200}{x}$$

$$x = \frac{129{,}5 \cdot 1\,200}{118{,}5}$$

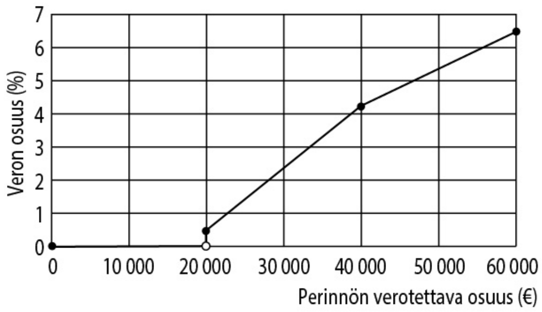
$$x = 1\,311{,}3924\ldots \approx 1\,311{,}39\ (€)$$

$$\frac{1\,480}{1\,311{,}39} - 1 = 0{,}12857\ldots \approx 0{,}129 = 12{,}9\ \%$$

396. a) $1\,700 + 0{,}11 \cdot (58\,000 - 40\,000) = 3\,680$ (€)

$$\frac{3\,680}{58\,000} = 0{,}06344\ldots \approx 0{,}063 = 6{,}3\ \%$$

b)



397. a) myyntikurssi

b) $$\frac{18\,290}{1{,}14032} = 16\,039{,}3573\ldots \approx 16\,039{,}36\ (€)$$

398. $$\frac{1}{1{,}1} - 1 = -0{,}0909\ldots \approx -9{,}1\ \%$$

399. $$\frac{2\,000}{1{,}17112} = 1\,707{,}7669\ldots \approx 1\,707{,}77\ (€)$$

400. $\dfrac{619}{1,204} = 514{,}1196\ldots \approx 514{,}12$ (€)

$\dfrac{894}{1,154} = 774{,}6967\ldots \approx 774{,}70$ (€)

$\dfrac{774,70}{514,12} - 1 = 0{,}50684\ldots \approx 50{,}7\ \%$

Euromääräinen hinta nousi 50,7 %.

401. a) 39 820 – 4 666,40 = 35 153,60

518 + (35 153,60 – 25 700) · 0,1725 = 2 148,746 ≈ 2 148,75 (€)

2 148,75 – 1 439,84 = 708,91 (€)

b) 39 820 – 7 086,25 = 32 733,75

0,205 · 32 733,75 = 6 710,4187… ≈ 6 710,42 (€)

c) 0,015 · 32 733,75 = 491,00625 ≈ 491,01 (€)

d) 0,025 · (39 820 – 750 – 14 000) = 626,75 (€)

Yle-veron enimmäismäärä on 163 €.

e) 0,0153 · 39 820 = 609,246 ≈ 609,25 (€)

f) 708,91 + 6 710,42 + 491,01 + 163 + 609,25 = 8 682,59 (€)

402. a) $\dfrac{1,19a}{1,24a} - 1 = \dfrac{1,19}{1,24} - 1 = -0{,}04032\ldots \approx -0{,}040 = -4{,}0\ \%$

Kuluttaja maksaa 4,0 % vähemmän.

b) $\dfrac{0,19a}{0,24a} - 1 = \dfrac{0,19}{0,24} - 1 = -0{,}20833\ldots \approx -0{,}208 = -20{,}8\ \%$

Verokertymä pienenisi 20,8 %.

403.
$$\begin{aligned}3\,398{,}75 + 0{,}2125 \cdot (x - 42\,400) &= 8\,000\\ 3\,398{,}75 + 0{,}21125x - 9\,010 &= 8\,000\\ 0{,}2125x &= 13\,611{,}25\\ x &= 64\,052{,}9412 \approx 64\,052{,}94\ (€).\end{aligned}$$

404. a) $\frac{2\ 465}{2\ 236} - 1 = 0{,}10241\ldots \approx 0{,}102 = 10{,}2\ \%$

b) Muutetaan aiempi palkka vastaamaan vuoden 2017 hintatasoa (rahanarvoa).

$$\frac{1\ 890}{1\ 927} = \frac{2\ 236}{x}$$

$$x = \frac{1\ 927 \cdot 2\ 236}{1\ 890}$$

$$x = 2\ 279{,}7735\ldots \approx 2\ 279{,}77\ (€)$$

$$\frac{2\ 465}{2\ 279{,}77} - 1 = 0{,}08124\ldots \approx 0{,}081 = 8{,}1\ \%$$

405. a) $\frac{0{,}886}{0{,}738} - 1 = 0{,}20054\ldots \approx 0{,}201 = 20{,}1\ \%$

b) $\frac{0{,}738}{0{,}886} - 1 = -0{,}16704\ldots \approx -0{,}167 = -16{,}7\ \%$

406. $\frac{1{,}65a}{1{,}156a} - 1 = \frac{1{,}65}{1{,}156} - 1 = 0{,}42733\ldots \approx 0{,}427 = 42{,}7\ \%$

407. $\frac{1\ 812}{1\ 927} - 1 = -0{,}05967\ldots \approx -0{,}060 = -6{,}0\ \%$

408. $\frac{54 \cdot 0{,}93}{0{,}87} = 57{,}7241\ldots \approx 57{,}72\ (€)$

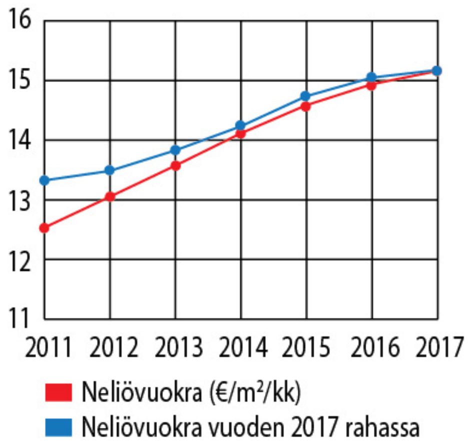
409. a) $\frac{105{,}9}{102{,}5} \cdot 1\ 845 = 1\ 906{,}20\ (€)$

b) $1{,}01 \cdot 1\ 906{,}20 = 1\ 925{,}262 \approx 1\ 925{,}26\ (€)$

410. $\frac{1{,}152a}{1{,}089a} - 1 = \frac{1{,}152}{1{,}089} - 1 = 0{,}05785\ldots \approx 0{,}058 = 5{,}8\ \%$

411.

Vuosi	Neliövuokra (€/m2/kk)	Elinkustannus-indeksi	Vuokra 2017 rahassa
2011	12,52	1 812	$\frac{1\,927}{1\,812} \cdot 12{,}52 = 13{,}31$
2012	13,04	1 863	$\frac{1\,927}{1\,863} \cdot 13{,}04 = 13{,}49$
2013	13,56	1 890	$\frac{1\,927}{1\,890} \cdot 13{,}56 = 13{,}83$
2014	14,12	1 910	$\frac{1\,927}{1\,910} \cdot 14{,}12 = 14{,}25$
2015	14,58	1 906	$\frac{1\,927}{1\,906} \cdot 14{,}58 = 14{,}74$
2016	14,94	1 913	$\frac{1\,927}{1\,913} \cdot 14{,}94 = 15{,}05$
2017	15,16	1 927	15,16



412. a) $0{,}92 \cdot 1{,}158 = 1{,}06536 \approx 1{,}065$

b) $\frac{1{,}158}{1{,}1} = 1{,}05272\ldots \approx 1{,}053$

413. a) $f(x) = 0{,}30 \cdot 40\,000 + 0{,}32 \cdot (x - 40\,000) =$
$12\,000 + 0{,}32x - 12\,800 =$
$0{,}32x - 800$

$f(x) = 0{,}32x - 800$, kun $x > 40\,000$

b) $f(41\,700{,}23) = 0{,}32 \cdot 41\,700{,}23 - 800 = 12\,544{,}0736 \approx 12\,544{,}07$ (€)

c) $0{,}85 \cdot 41\,700{,}23 = 35\,445{,}1955\ldots \approx 35\,445{,}20$ (€)

$0{,}3 \cdot 35\,445{,}20 = 10\,633{,}56$ (€)

$$\frac{10\,633{,}56}{41\,700{,}23} = 0{,}25500\ldots \approx 0{,}255 = 25{,}5\ \%$$

414.

	Hinta (€)	**Kurssi**	**Hinta (USD)**
Ennen	a	b	ab
Jälkeen	$1{,}08a$	$1{,}08b$	$1{,}08a \cdot 1{,}08b = 1{,}1664ab$

Hinta nousi

$$\frac{1{,}1664ab}{ab} - 1 = \frac{1{,}1664}{1} - 1 = 0{,}1664 = 16{,}64\ \%.$$

Korko, koronkorko ja lainat

415. a) $0{,}0175 \cdot 4\,000 = 70$ (€)

$0{,}3 \cdot 70 = 21$ (€)

b) $70 - 21 = 49$ (€)

416.
A – III
B – IV
C – II
D – I

417. $7\,000 \cdot 0{,}025 \cdot \dfrac{92}{360} = 44{,}7222\ldots \approx 44{,}72$ (€)

418. $1{,}045^5 \cdot 5\,000 = 6\,230{,}9096\ldots \approx 6\,230{,}91$ (€)

419. a) oikein
b) väärin
c) väärin
d) oikein
e) oikein

420. a) 45
b) 43

421. $85\,000 \cdot x \cdot \dfrac{120}{360} = 850$

$x = 0{,}03 = 3\ \%$

422. Nettokorkokanta on $0{,}7 \cdot 1{,}5\ \% = 1{,}05\ \%$

$1{,}0105^4 \cdot 1\,200 = 1\,251{,}1993\ldots \approx 1\,251{,}20$ (€)

423. $0{,}95^{15} \cdot a = 0{,}46329\ldots \cdot a = 0{,}463a$

Alkuperäisestä arvosta on jäljellä 46,3 %.

424. $1{,}025^{10} \cdot 45 = 57{,}6038\ldots \approx 57{,}60$ (€)

425. $1{,}04^{n} \cdot 10\,000 = 25\,000$

$1{,}04^{n} = 2{,}5$

$n = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}04} = 23{,}362\ldots \approx 23{,}4$ (v)

426. $0{,}7 \cdot 2{,}5\ \% = 1{,}75\ \%$

$1{,}0175^{6} \cdot x = 50\,000$

$x = \dfrac{50\,000}{1{,}0175^{6}}$

$x = 45\,057{,}1270\ldots \approx 45\,057{,}13$ (€)

427. $x^{7} \cdot 7{,}25 = 74{,}50$

$x = \sqrt[7]{\dfrac{74{,}50}{7{,}25}}$

$x = 1{,}39490\ldots \approx 1{,}395$

Vuodessa kurssi on kasvanut 1,395-kertaiseksi, eli kurssi on noussut vuodessa 39,5 %.

428. $x^{10} \cdot a = 5a$

$x^{10} = 5$

$x = \sqrt[10]{5}$

$x = 1{,}17461\ldots \approx 1{,}175 = 117{,}5\ \%$

Liikevaihdon vuotuinen kasvu oli 117,5 % – 100 % = 17,5 %.

429. $\dfrac{3\,000 \cdot (1-1{,}04^{10})}{1-1{,}04} = 36\,018{,}3213\ldots \approx 36\,018{,}32$ (€)

430. $200\,000 \cdot 1{,}003^{180} \cdot \dfrac{1-1{,}003}{1-1{,}003^{180}} = 1\,439{,}6067\ldots \approx 1\,439{,}61$ (€)

431. a) kertalyhennys $= \dfrac{60\,000}{8 \cdot 4} = 1\,875$ (€)

Suoritus	Lyhennys (€)	Korko (€)	Yhteensä (€)	Velka (€)
1	1 875	0,008 · 60 000 = 480	2 355	58 125
2	1 875	0,008 · 58 125 = 465	2 340	56 250

b) $32 \cdot \dfrac{480+15}{2} = 7\ 920$ (€)

432. a) $50\ 000 \cdot 1{,}00333\ldots^{108} \cdot \dfrac{1-1{,}003\ 33\ldots}{1-1{,}003\ 33\ldots^{108}} = 552{,}0484\ldots \approx 552{,}05$ (€)

b) $\dfrac{50\ 000}{108} + 50\ 000 \cdot 0{,}00333\ldots = 629{,}6296\ldots \approx 629{,}63$ (€)

433. $13\ 000 \cdot 0{,}0425 \cdot \dfrac{214}{360} = 328{,}4305\ldots \approx 328{,}43$ (€)

434. $32\ 000 \cdot 0{,}03 \cdot \dfrac{x}{360} = 168$

$x = 63$

435. $x + x \cdot 0{,}0275 \cdot \dfrac{83}{360} = 20\ 000$

$x \cdot \left(1 + 0{,}0275 \cdot \dfrac{83}{360}\right) = 20\ 000$

$x = 19\ 873{,}9933\ldots \approx 19\ 873{,}99$ (€)

436. $x^{10} \cdot 29\ 500 = 5\ 900$

$x = \sqrt[10]{\dfrac{5\ 900}{29\ 500}}$

$x = 0{,}85133\ldots \approx 0{,}851$

Vuodessa auton arvo on laskenut 0,851-kertaiseksi eli arvo on laskenut 14,9 %.

437. $1{,}06^n \cdot a = 2a$

$1{,}06^n = 2$

$n = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}06}$

$n = 11{,}895\ldots \approx 11{,}9$ (v)

438. $0{,}7 \cdot 3{,}5\ \% = 2{,}45\ \%$

$\dfrac{2\ 500 \cdot (1-1{,}0245^7)}{1-1{,}0245} = 18\ 840{,}0777\ldots \approx 18\ 840{,}08$ (€)

439. $0{,}7 \cdot 5\ \% = 3{,}5\ \%$

$$\frac{x \cdot (1-1{,}035^{10})}{1-1{,}035} = 100\ 000$$

$$x = 8\ 524{,}1367\ldots \approx 8\ 524{,}14\ (€)$$

440. $0{,}7 \cdot 5{,}8\ \% = 4{,}06\ \%$

$$\frac{5\ 000 \cdot (1-1{,}0406^{n})}{1-1{,}0406} = 70\ 000$$

$$1 - 1{,}0406^{n} = -0{,}5684$$

$$-1{,}0406^{n} = -1{,}5684$$

$$1{,}0406^{n} = 1{,}5684$$

$$n = \frac{\log 1{,}5684}{\log 1{,}0406} = 11{,}308\ldots$$

Talletus pitää tehdä 12 kertaa.

441. $x \cdot 1{,}038^{8} \cdot \dfrac{1-1{,}038}{1-1{,}038^{8}} = 5\ 000$

$$x = 33\ 943{,}4867\ldots \approx 33\ 943{,}49\ (€)$$

442. Merkitään kuukausisäästöä x:llä.

Vuoden eri kuukausien saldot:

tammi	700
helmi	$700 + x$
maalis	$700 + 2x$
huhti	$700 + 3x$
touko	$700 + 4x$
kesä	$700 + 5x$
heinä	$700 + 6x$
elo	$700 + 7x$
syys	$700 + 8x$
loka	$700 + 9x$
marras	$700 + 10x$
joulu	$700 + 11x$

Keskimääräinen talletus on

$$\frac{12 \cdot 700 + 66x}{12} = 700 + 5{,}5x$$

Nettokorkokanta on $0{,}7 \cdot 0{,}6\ \% = 0{,}42\ \%$.

Ratkaistaan kuukausisäästö x yhtälöstä.

$$700 + 11x + (700 + 5{,}5x) \cdot 0{,}0042 = 1\,800$$
$$x = 99{,}5237\ldots$$

Talletuksen oltava 99,53 (€).

443. Kertalyhennys on

$$\frac{200\,000}{15 \cdot 12} = 1\,111{,}11.$$

Kuukausikorko on

$$\frac{4{,}5\ \%}{12} = 0{,}375\ \%.$$

Ensimmäinen korko on
$200\,000 \cdot 0{,}00375 = 750$ (€).

Viimeinen korko on
$1\,111{,}11 \cdot 0{,}00375 = 4{,}1666\ldots \approx 4{,}17$ (€).

Korot ovat yhteensä

$$180 \cdot \frac{750 + 4{,}17}{2} = 67\,875{,}30\ (€).$$

444. a) Tasaerä on

$$10\,000 \cdot 1{,}005^{36} \cdot \frac{1 - 1{,}005}{1 - 1{,}005^{36}} = 304{,}2193\ldots \approx 304{,}22\ (€).$$

Ensimmäinen lyhennys on
$304{,}22 - 0{,}005 \cdot 10\,000 = 254{,}22$ (€).

b) $$10\,000 \cdot 1{,}005^{24} - 304{,}22 \cdot \frac{1 - 1{,}005^{24}}{1 - 1{,}005} = 3\,534{,}6883\ldots \approx 3\,534{,}69\ (€)$$

445. a) $$100\,000 \cdot 1{,}001^{120} \cdot \frac{1 - 1{,}001}{1 - 1{,}001^{120}} = 884{,}7491\ldots \approx 884{,}75\ (€)$$

b) $51\,498{,}75 - 21\,000 = 30\,498{,}75$ (€)

Ratkaistaan jäljellä oleva laina-aika yhtälöstä

$$30\,498{,}75 \cdot 1{,}001^{n} \cdot \frac{1 - 1{,}001}{1 - 1{,}001^{n}} = 1\,100$$
$$n = 28{,}13\ldots$$

Jäljellä oleva laina-aika on 29 kk.

446. $\frac{3,9\ \%}{12} = 0,325\ \%$

$$x \cdot 1,00325^{360} \cdot \frac{1-1,00325}{1-1,00325^{360}} = 750$$
$$x = 159\ 010,0823\ldots \approx 159\ 010,08\ (€)$$

447. $7\ 500 \cdot q^4 \cdot \frac{1-q}{1-q^4} = 2\ 000$
$$q = 1,02632\ldots \approx 1,026$$

Lainan korkoprosentti on 2,6 %.

448. $\sqrt[\frac{40}{365}]{\frac{230}{200}} = 3,57987\ldots \approx 3,580 = 358,0\ \%$

Todellinen vuosikorkokanta on 358,0 % –100 % = 258,0 %.

8 TODENNÄKÖISYYS JA TILASTOT

Todennäköisyys ja lukumäärät

449. a) oikein
b) väärin
c) väärin
d) oikein
e) oikein
f) oikein

450. a) $P(\text{vihreä}) = \dfrac{6}{13} = 0,4615... \approx 0,46$

b) $P(\text{vihreä tai punainen}) = \dfrac{6+3}{13} = \dfrac{9}{13} = 0,6923... \approx 0,69$

c) $P(\text{vihreä, punainen tai keltainen}) = \dfrac{6+3+4}{13} = \dfrac{13}{13} = 1$

d) $P(\text{violetti}) = \dfrac{0}{13} = 0$

451. Selvitetään alkeistapaukset ruudukon avulla.

6						**x**
5						
4	**o**					
3		**o**				
2			**o**			
1				**o**		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

a) $P(\text{molemmilla kuutonen}) = \dfrac{1}{36} = 0,02777... \approx 0,028$

b) $P(\text{silmälukujen summa 5}) = \dfrac{4}{36} = 0,1111... \approx 0,11$

452. a) Eri mahdollisuuksia on $8! = 40\,320$.

b) Eri mahdollisuuksia on $\binom{8}{3} = 56$.

453. a) P(molemmat juurtuvat) = 0,85 · 0,85 = 0,7225 ≈ 0,72

b) Pistokas ei juurru todennäköisyydellä 1 – 0,85 = 0,15.

P(kumpikaan ei juurru) = 0,15 · 0,15 = 0,0225 ≈ 0,023

454. Erilaisia asukokonaisuuksia on 3 · 7 · 4 · 2 = 168.

455. a) Kortteja, jotka eivät ole ässiä, on täydessä pakassa 52 – 4 = 48.

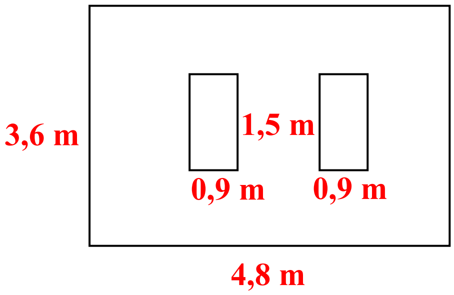
$$P(\text{ei yhtään ässää}) = \frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{46}{50} = 0,7826... \approx 0,78$$

b) P(ainakin yksi ässä) = 1 – P(ei yhtään ässää) = 1 – 0,78 = 0,22

456. a) Eri mahdollisuuksia on 36 · 35 · 34 = 42 840.

b) Eri mahdollisuuksia on $\binom{36}{5} = 376\ 992$.

457. 90 cm = 0,9 m ja 150 cm = 1,5 m



Koko päätyseinän pinta-ala:
$A = 4,8 \cdot 3,6 = 17,28\ (\text{m}^2)$

Ikkunoiden pinta-ala yhteensä:
$A_I = 2 \cdot 0,9 \cdot 1,5 = 2,7\ (\text{m}^2)$

$$P(\text{kivi osuu ikkunaan}) = \frac{A_I}{A} = \frac{2,7}{17,28} = 0,15625 \approx 0,16$$

458. Yksittäiset potkuhousut ovat virheelliset todennäköisyydellä 0,03 ja virheettömät todennäköisyydellä 1 – 0,03 = 0,97.

P(kaikki virheettömiä) = $0,97^{50}$ = 0,2180… ≈ 0,22

459. a) Erilaisia vastausrivejä on 3^{15} = 14 348 907.

b) Rivejä on 2^{15} = 32 768.

460. Tusseja on yhteensä 3 + 4 = 7.

P(samanväriset) = *P*(molemmat sinisiä) + *P*(molemmat punaisia) =
$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=0{,}4285...\approx 0{,}43$

461. a) Erilaisia lottorivejä on $\binom{40}{7}=18\ 643\ 560$.

b) $P(\text{7 oikein})=\frac{1}{18\ 643\ 560}=5{,}363...\cdot 10^{-8}\approx 5{,}4\cdot 10^{-8}$

462. a) Viisi parasta voi asettua jonoon 5! = 120 eri tavalla
Suotuisia vaihtoehtoja on kaksi.
P(mitalit oikeille kilpailijoille) = $\frac{1}{60}$

b) *P*(viidestä kolmen ryhmiä) = $\binom{5}{3}=10$

P(mitalikolmikon järjestys on oikein) = $\frac{1}{10}=0{,}1$

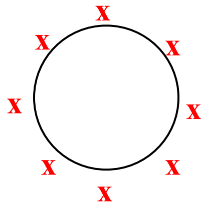
463. a) Selvitetään alkeistapaukset ruudukon avulla.

6	x	x	x	x	x	x
5		x		x		x
4	x	x	x	x	x	x
3		x		x		x
2	x	x	x	x	x	x
1		x		x		x
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

P(silmälukujen tulo parillinen) = $\frac{27}{36}=0{,}75$

b) *P*(parillinen kaikilla heittokerroilla) = $0{,}75^4$ = 0,3164…≈ 0,32

464. Valitaan ensin Annalle paikka piiristä.
Se voi olla mikä tahansa.
Jäljelle jääneestä 7 paikasta Annan vieressä on kaksi paikkaa.



$$P(\text{Anna ja Ulla vierekkäin}) = \frac{2}{7} = 0,2857... \approx 0,29$$

465. Jos menestys on samanlaista, joukkue voittaa kunkin seuraavista otteluista todennäköisyydellä $\frac{4}{9}$. Tappion todennäköisyys on tällöin $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

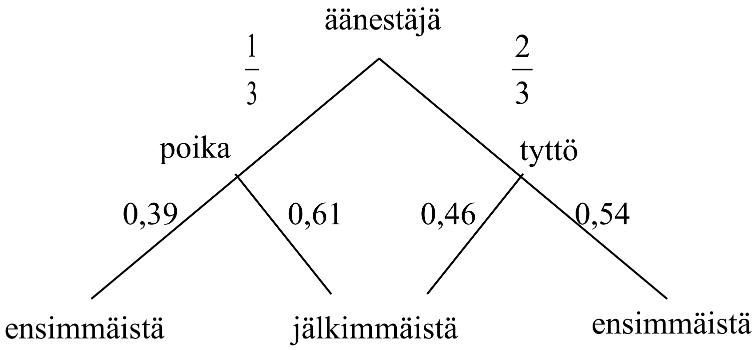
a) $P(\text{voittaa kaikki}) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = 0,08779... \approx 0,088$

b) $P(\text{ei voita yhtään}) = \left(\frac{5}{9}\right)^3 = 0,1714... \approx 0,17$

c) P(voittaa ainakin yhden) = 1 – P(ei voita yhtään) = 1 – 0,17 = 0,83

466. Jälkimmäisen vaihtoehdon kannatusosuudet ovat pojilla 100 % – 39 % = 64 % ja tytöillä 100 % – 54 % = 46 %.

Lasketaan, millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu äänestäjä kannatti jälkimmäistä vaihtoehtoa. Tilannetta voi havainnollistaa puumallilla.



P(kannattaa jälkimmäistä) = P(poika ja kannattaa jälkimmäistä) + P(tyttö ja kannattaa jälkimmäistä) = $\frac{1}{3} \cdot 0,61 + \frac{2}{3} \cdot 0,46 = 0,51$

Siis äänestäjistä 51 % kannatti jälkimmäistä vaihtoehtoa.

467. a) Partiolaiset voivat asettua jonoon 10! = 3 628 800 eri tavalla. Pituusjärjestyksiä on kaksi, lyhimmästä pisimpään ja pisimmästä lyhimpään.

$$P(\text{pituusjärjestyksessä}) = \frac{2}{3\ 628\ 800} = 5,511...\cdot 10^{-7} \approx 5,5\cdot 10^{-7}$$

b) Jonoja, joissa kaikki tytöt ovat ensin, on 4 · 3 · 2 · 1 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 4! · 6! = 17 280

$$P(\text{neljä ensimmäistä tyttöjä}) = \frac{17\ 280}{3\ 628\ 800} = 0,004761... \approx 0,0048$$

468. Palloja on yhteensä 6 + 10 = 16.

a) P(ainakin yksi keltainen) = 1 – P(ei yhtään keltaista) =

$$1-\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11} = 0,9737... \approx 0,97$$

b) P(kaikki samanvärisiä) = P(kaikki keltaisia) + P(kaikki mustia) =

$$\frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11} = 0,02634... \approx 0,026$$

469. Yksittäinen suomainen sairastaa MS-tautia todennäköisyydellä 0,0013 ja ei sairasta todennäköisyydellä 1 – 0,0013 = 0,9987.

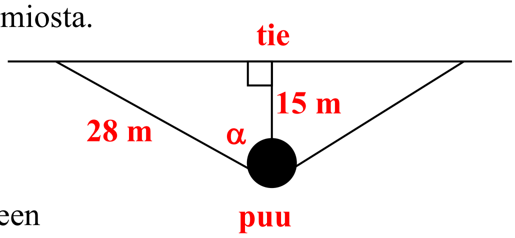
Merkitään tarvittavien suomalaisten määrää x:llä.

P(ainakin yksi sairastaa) = 1 – P(kukaan ei sairasta) = 1 – $0,9987^x$

$$\begin{aligned} 1 - 0,9987^x &= 0,90 \\ -0,9987^x &= -0,1 \qquad | : (-1) \\ 0,9987^x &= 0,1 \\ x &= \frac{\lg 0,1}{\lg 0,9987} = 1\ 770,067... \approx 1\ 770,1 \end{aligned}$$

Joukossa tulee olla vähintään 1 771 suomalaista.

470. Kulman α suuruus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\cos\alpha = \frac{15}{28}$$

$$\alpha = 57{,}6076\ldots° \approx 57{,}61°$$

Iso kolmio on tasakylkinen, joten tielle kaatumiseen johtavan kulman suuruus on
$2\alpha = 2 \cdot 57{,}61° = 115{,}22°$

Kaikkia mahdollisia kaatumissuuntia vastaava kulma on 360°.

$$P(\text{kaatuu tielle}) = \frac{115{,}22°}{360°} = 0{,}3200\ldots \approx 0{,}32$$

471. Erilaisia lottorivejä on yhteensä $\binom{40}{7} = 18\ 643\ 560$.

a) Vääriä numeroita on 40 – 7 = 33. Pelistä vääristä numeroista koostuvien lottorivien määrä: $\binom{33}{7} = 3\ 365\ 856$

$$P(\text{ei yhtään oikein}) = \frac{3\ 365\ 856}{18\ 643\ 560} = 0{,}18053\ldots \approx 0{,}181$$

b) $$P(\text{kuusi oikein ja lisänumero oikein}) = \frac{7}{18\ 643\ 560} = 0{,}0000003754\ldots \approx 3{,}75 \cdot 10^{-7}$$

472. Vappuhatun vaipan s
$s^2 = 7{,}5^2 + 20^2$

ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$s = 21{,}3600\ldots \approx 21{,}36$

Pinta-alojen yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\left(\frac{10}{21{,}36}\right)^2 = 0{,}21917\ldots \approx 0{,}22$$

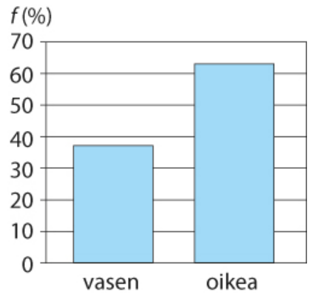
Tilastot

473. Vasemmalle olalle nostavia:

$$\frac{26}{70}=0,3714...\approx 0,37=37\ \%$$

Oikealle olalle nostavia:

$$\frac{44}{70}=0,6285...\approx 0,63=63\ \%$$



474. a) $$\bar{x}=\frac{2+8+34+5+2}{5}=10,2$$

b) Moodi on 2 (yleisin havaintoarvo).

c) Järjestetään havaintoarvot: 2, 2, 5, 8, 34. Mediaani on 5 (keskimmäinen havaintoarvoista).

475. A–3–II
B–1–III
C–2–I

476. 0,51 · 199 = 101,49 ≈ 101

477. *Tapa 1* : kaavoilla

Keskiarvo: $\bar{x}=\dfrac{4+7+8+20}{4}=9,75$

Keskihajonta:

$$s=\sqrt{\frac{(4-9,75)^2+(7-9,75)^2+(8-9,75)^2+(20-9,75)^2}{4}}=6,0981...\approx 6,10$$

Tapa 2: laskentaohjelmalla.

Syötetään luvut taulukkolaskentaohjelmaan.
Keskiarvoksi saadaan 9,75 ja keskihajonnaksi 6,10.

478. a) Aineistosta voidaan määrittää mediaani ja moodi. Keskiarvoa ei voida määrittää, koska muuttujan arvot eivät ole lukuja.

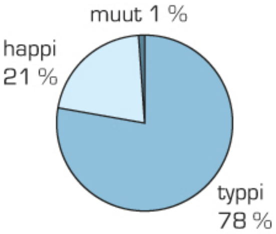
b) Moodi on ”huono”, koska niitä on eniten.

Mediaani on keskimmäinen tulos. Arviota annettiin yhteensä 69. Keskimmäinen on järjestetyn aineiston 35. tulos.

Arvio	**lukumäärä**	**yhteensä**
Erittäin huono	1	1
Huono	22	23
Ei huono eikä hyvä	18	41
Hyvä	16	57
Erittäin hyvä	12	69

35. tulos on tuloksen ei huono eikä hyvä kohdalla.

479. Syötetään prosenttiosuudet taulukkolaskentaohjelmaan ja laaditaan sillä ympyräkuvio.

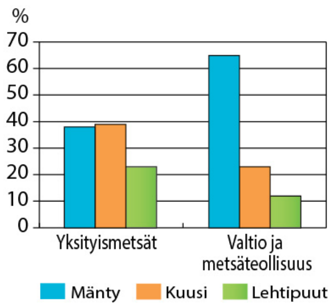


480. a) Yksityismetsissä hakattiin yhteensä
$23{,}408 + 23{,}938 + 13{,}810 = 61{,}156$ (milj. m^3)

Valtion tai metsäyhtiöiden metsissä hakattiin yhteensä
$7{,}358 + 2{,}614 + 1{,}298 = 11{,}270$ (milj. m^3)

	Mänty (milj. m^3)	Kuusi (milj. m3)	Lehtipuut (milj. m3)
Yksityismetsät, yhteensä	$\frac{23{,}408}{61{,}156} = 0{,}3827\ldots \approx$ 38 %	$\frac{23{,}938}{61{,}156} = 0{,}3914\ldots \approx$ 39 %	$\frac{13{,}810}{61{,}156} = 0{,}2258\ldots \approx$ 23 %
Valtio ja metsäteollisuus	$\frac{7{,}358}{11{,}270} = 0{,}6528\ldots \approx$ 65 %	$\frac{2{,}614}{11{,}270} = 0{,}2319\ldots \approx$ 23 %	$\frac{1{,}298}{11{,}270} = 0{,}1151\ldots \approx$ 12 %

b) Viedään prosenttiosuudet taulukkolaskentaohjelmaan. Laaditaan ohjelmalla ryhmäpylväskaavio.



481. Muodostetaan lauseke lukujen keskiarvolle.

$$\bar{x} = \frac{-14+9+43+11+5+a}{6} = \frac{54+a}{6}$$

Ratkaistaan luku a yhtälön avulla.

$$\frac{54+a}{6} = 12{,}5 \quad |\cdot 6$$

$$54 + a = 75$$

$$a = 21$$

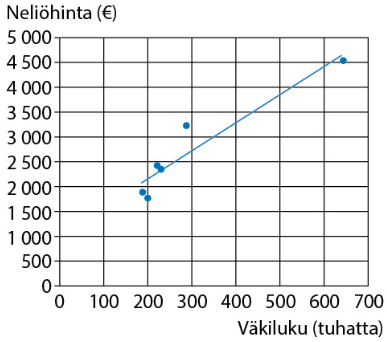
482. Syötetään aineisto taulukkolaskentaohjelmaan. Määritetään ohjelman avulla keskiarvo ja keskihajonta. Lasketaan ohjelman avulla merkitsevän poikkeaman rajat.

a) Keskiarvo on 18 183 ja keskihajonta 4 087.

b) Koska kaikki katsojamäärät ovat rajojen 26 356 ja 10 010 välillä, mikään arvo ei poikkea merkitsevästi keskiarvosta.

483. Syötetään väkiluvut ja neliöhinnat taulukkolaskentaohjelmaan. Piirretään aineistosta hajontakuvio ja sovitetaan siihen suora. Määritetään ohjelmalla korrelaatiokerroin.

a)



b) $r \approx 0{,}9455$, joka tarkoittaa voimakasta positiivista korrelaatiota. Kaupungin väkiluvun ja asuntojen hinnan välinen riippuvuus on voimakas.

484. a) Kaaviossa B pystyakseli on pidempi kuin muissa kaavioissa. Kaavio C on kapeampi kuin muut kaaviot.

b) Kaaviossa C kasvu näyttää suurimmalta.

485. a) 1 034 475

b) Islantilaisia on yhteensä taulukon tietojen mukaan 335 000 ja heistä kaupungissa asuvia on 316 000.

$$\frac{316\ 000}{335\ 000} = 0{,}94328\ldots \approx 94{,}3\ \%$$

c) Pohjoismaalaisista asuu kaupungissa
4 650 000 + 8 504 000 + 4 271 000 + 5 017 000 + 316 000 = 22 758 000.

Suomessa kaupungissa asuu 4 650 000.

$$\frac{4\ 650\ 000}{22\ 758\ 000} = 0{,}20432\ldots \approx 20{,}4\ \%$$

486. *Tapa 1*

Järjestetään arvosanat.

4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10

Keskiarvo:

$$\bar{x} = \frac{4 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 10}{16} = 6{,}8125 \approx 6{,}8$$

Keskihajonta:

$$s = \sqrt{\frac{(4-6{,}81)^2 + 2(5-6{,}81)^2 + 5(6-6{,}81)^2 + 3(7-6{,}81)^2 + 2(8-6{,}81)^2 + 2(9-6{,}81)^2 + (10-6{,}81)^2}{16}} =$$

$1{,}589\ldots \approx 1{,}6$

Koska arvosanoja on parillinen määrä, mediaani on kahden keskimmäisen arvosanan keskiarvo: $\frac{6+7}{2} = 6{,}5$.

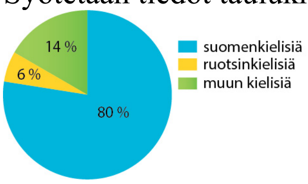
Moodi on 6.

Tapa 2

Syötetään arvosanat taulukkolaskentaohjelmaan.

Keskiarvoksi saadaan 6,8125 ≈ 6,8
Mediaaniksi saadaan 6,5
Moodiksi saadaan 6
Keskihajonnaksi saadaan 1,589… ≈ 1,6

487. Syötetään tiedot taulukkolaskentaohjelmaan ja piirretään sen avulla ympyräkaavio.



488. Tyttöjä on yhteensä 13 + 22 = 35.

Keskipituus:

$$\bar{x} = \frac{13 \cdot 168{,}4 + 22 \cdot 165{,}7}{35} = 166{,}702... \approx 166{,}7 \text{ (cm)}$$

489. *Tapa 1*

Keskiarvo:

$$\bar{x} = \frac{4+3\cdot 5+4\cdot 6+3\cdot 7+5\cdot 8+2\cdot 9+10}{19} = 6,947... \approx 6,9$$

Keskihajonta:

$$s = \sqrt{\frac{(4-6,95)^2+3(5-6,95)^2+4(6-6,95)^2+3(7-6,95)^2+5(8-6,95)^2+2(9-6,95)^2+(10-6,95)^2}{19}} =$$

$1,571\ldots \approx 1,6$

Moodi on 8 ja mediaani 7.

Tapa 2

Syötetään aineisto laskentaohjelmaan. Ohjelma määrittää kaikki tunnusluvut moodia lukuun ottamatta. Moodilla on suurin frekvenssi. $M_o = 8$.

Keskiarvoksi saadaan 6,9474… ≈ 6,9
Mediaaniksi saadaan $M_d = 7$
Moodiksi saadaan $M_o = 8$
Keskihajonnaksi saadaan $\sigma = 1,5710\ldots \approx 1,6$

490. Syötetään taulukon tiedot taulukkolaskentaohjelmaan ja kokeillaan eri autojen lukumäärillä ja frekvensseillä.

Taulukon tunnetuilla arvoilla keskiarvoksi tulee n. 2,96, joten autojen lukumäärän on oltava suurempi kuin 7.
Kokeillaan autojen määrällä 8 ja frekvensseillä 1, 2, …

Kun autojen lukumäärä on 8 ja frekvenssi 2, keskiarvoksi tulee 3,3

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 0+5\cdot 1+7\cdot 2+6\cdot 3+5\cdot 5+3\cdot 7+2\cdot 8}{2+5+7+6+5+3+2} = 3,3.$$

Autojen lukumäärä on 8 ja päivien lukumäärä 2

491. Syötetään tiedot taulukkolaskentaohjelmaan. Määritetään ohjelman avulla korrelaatiokerroin iän ja hinnan sekä ajettujen kilometrien ja hinnan välille.

Iän ja hinnan välinen korrelaatiokerroin on
$r = -0,91136391801683\ldots \approx -0,9114$

ja

ajettujen kilometrien ja hinnan välinen korrelaatiokerroin
$r = -0,847809471425892\ldots \approx -0,8478.$

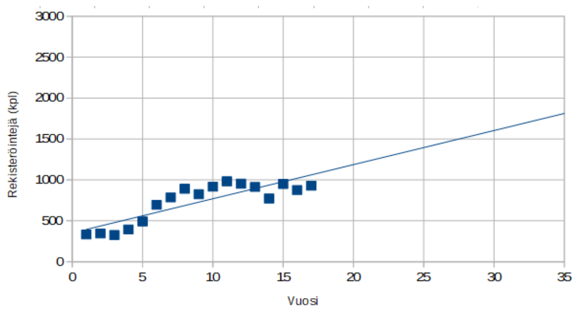
Ikä selittää auton hintaa paremmin kuin ajetut kilometrit.

492. Merkitään arvosanojen lukumääriä a, $2a$ ja $3a$.
Kurssilla oli yhteensä $a + 2a + 3a = 6a$.

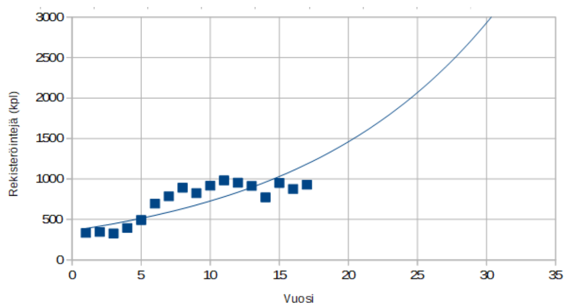
Keskiarvo on
$$\overline{x} = \frac{a \cdot 10 + 2a \cdot 9 + 3a \cdot 8}{6a} = \frac{10a + 18a + 24a}{6a} = \frac{52a}{6a} = 8{,}666\ldots \approx 8{,}7.$$

493. a) Syötetään vuosiluvut ja rekisteröintien määrät laskentaohjelman taulukkonäkymään.

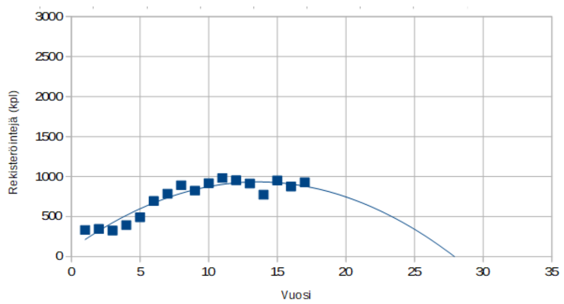
Lineaarisen mallin yhtälöksi saadaan $y = 41{,}7x + 353{,}21$.



Eksponentiaalisen mallin yhtälöksi saadaan $y = 362{,}48 \cdot 1{,}07^x$. Ohjelma voi näyttää yhtälön myös muodossa $y = 362{,}48 \cdot e^{0{,}070x}$.



Toisen asteen polynomisen mallin yhtälö on $y = -4{,}55\,x^2 + 123{,}56x + 93{,}99$.



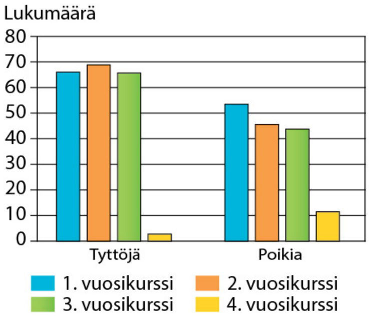
Yhtälöissä x on vuosi (muodossa 01, 02 jne.) ja y on rekisteröintien määrä.

b) Vuonna 2030 rekisteröintejä on lineaarisen mallin mukaan 1 604, eksponentiaalisen mallin mukaan 2 930 ja toisen asteen polynomisen mallin mukaan –292. Arvot on laskettu käyttämällä yhtälöiden kertoimille mahdollisimman tarkkoja likiarvoja.

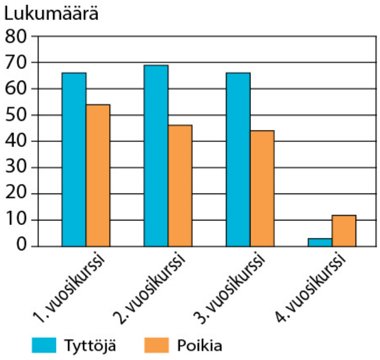
c) Mallien selitysasteet R^2 ovat: lineaarinen 0,7295, eksponentiaalinen 0,559 ja toisen asteen polynominen 0,8944. Pisteet sijoittuvat siis parhaiten toisen asteen polynomifunktion kuvaajalle, minkä näkee myös silmämääräisesti.

Vaikka toisen asteen polynomisella mallilla on paras selitysaste, malli ei toimi kovin kauas tulevaisuuteen, vaan antaa mahdottoman negatiivisen ennusteen vuodelle 2030. Eksponentiaalisen mallin mukainen rekisteröintien voimakas kasvu taas ei vaikuta uskottavalta. Lineaarisen mallin antama ennuste vuodelle 2030 vaikuttaa parhaalta. Hajontakuvion perusteella vuosittaiset rekisteröintimäärät näyttävät tosin tasaantuneen viimeisten vuosien aikana, joten lineaarisen mallin ennuste vuodelle 2030 saattaa olla liian suuri.

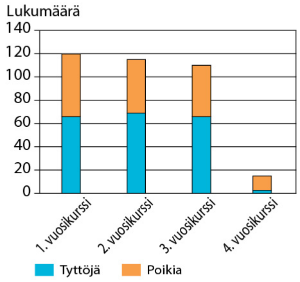
494. a)



b)



c)



495. a) lapsen ikä ja pituus

b) kengännumero ja matematiikan arvosana

c) poissaolojen määrä ja kurssiarvosana

Jakaumia ja tilastollista päättelyä

496. A–2, B–3, C–1

497. a) noin 42 %
b) noin 100 % – 73 % = 27 %
c) alle 160 cm

498. a) väärin
b) oikein
c) oikein
d) oikein
e) väärin

499. 1–D, 2–C, 3–A, 4–B

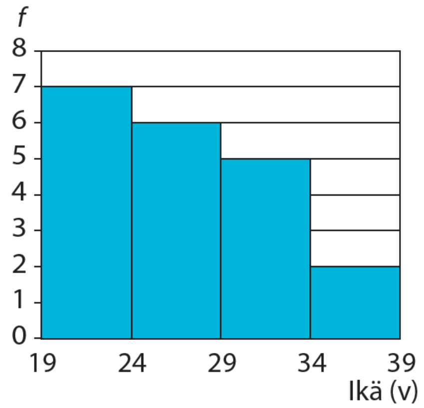
500. Syötetään laskentaohjelmaan odotusarvo $\mu = 6{,}2$, keskihajonta $\sigma = 1{,}5$ ja välin rajat.
a) $P(X \leq 7) = 0{,}7031\ldots \approx 0{,}70$
b) $P(X \geq 8) = 01151\ldots \approx 0{,}12$

501. Syötetään laskentaohjelmaan odotusarvo $\mu = 0$, keskihajonta $\sigma = 1$ ja välin rajat.
a) $P(X \leq -1) = 0{,}1587\ldots \approx 0{,}16$
b) $P(X \geq 1{,}5) = 0{,}0668\ldots \approx 0{,}067$
c) $P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}1359\ \ldots \approx 0{,}14$

502. Luokitellaan iät tasavälisiin luokkiin.

Ikä (v)	***f***
19–23	7
24–28	6
29–33	5
34–38	2

Piirretään luokitellusta aineistosta histogrammi.



503. Kummankin tytön koesuoritus on oman ryhmänsä keskiarvoa parempi. Suorituksista suhteellisesti parempi on se, jota vastaava normitettu arvo on suurempi.

Maija: $z = \dfrac{7,5 - 6,8}{1,8} = 0,3888... \approx 0,39$

Kaisu: $z = \dfrac{8 - 7,1}{0,8} = 1,125$

Kaisu menestyi kokeessa suhteellisesti paremmin.

504. Syötetään laskentaohjelmaan odotusarvo $\mu = 15,2$, keskihajonta $\sigma = 2,5$ ja välin rajat.

a) $P(X \leq 12) = 0,10027\ldots \approx 0,100 = 10,0\ \%$

b) $P(X \geq 18) = 0,13136\ldots \approx 0,131 = 13,1\ \%$

505. Jokaisesta voitosta pitää vähentää arvan hinta.

Voiton odotusarvo on
$E(\text{voitto}) =$
$0,001 \cdot 98 + 0,02 \cdot 18 + 0,1 \cdot 3 + 0,879 \cdot (-2) = -1$ (€).

Voiton odotusarvo on –1 (€).

506. a) *Tapa 1* laskentaohjelman tilastotoiminnolla

Valitaan laskentaohjelmasta binomijakauma ja syötetään siihen $n = 7$, $p = 0,5$ ja välin raja.
$P(3 \text{ klaavaa}) = 0,27343\ldots \approx 0,273$

Tapa 2 binomitodennäköisyyden kaavalla

$$\binom{7}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^{7-3} = 0,27343\ldots \approx 0,273$$

b) Korkeintaan kolme klaavaa tarkoittaa, että klaavoja tulee 0, 1, 2 tai 3.

Tapa 1 laskentaohjelman tilastotoiminnolla

Valitaan laskentaohjelmasta binomijakauma ja syötetään siihen $n = 7$, $p = 0,5$ ja välin raja.
$P(X \leq 3) = 0,5$

Tapa 2 binomitodennäköisyyden kaavalla

$P(X \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) =4$

$$\binom{7}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^5 + \binom{7}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^4 = 0,5$$

507. 95 % luottamusvälin kriittinen arvo on 1,96.

a) Virhemarginaali on

$1{,}96 \cdot \dfrac{12}{\sqrt{200}} = 1{,}6631\ldots \approx 1{,}66$ (€).

Luottamusvälin alarajaksi saadaan
65 € – 1,66 € = 63,34 €.

Luottamusvälin ylärajaksi saadaan
65 € + 1,66 € = 66,66 €.

Luottamusväli on 63,34 €…66,66 €.

b) Virhemarginaali on

$1{,}96 \cdot \dfrac{6{,}8}{\sqrt{3\,900}} = 0{,}2134\ldots \approx 0{,}21$ (cm).

Luottamusvälin alarajaksi saadaan
177,4 cm – 0,21 cm = 177,19 cm ≈ 177,2 cm.

Luottamusvälin ylärajaksi saadaan
177,4 cm + 0,21 cm = 177,61 cm ≈ 177,6.

Luottamusväli on 177,2 cm…177,6 cm

508. Kokelaista $\dfrac{20}{268} = 0{,}074626\ldots \approx 7{,}46$ %
voidaan hyväksyä opiskelemaan.

Määritetään pisteraja laskentaohjelman avulla. Valitaan laskentaohjelmasta normaalijakauma ja syötetään siihen odotusarvo $\mu = 120$, keskihajonta $\sigma = 23{,}5$ ja välin rajat.

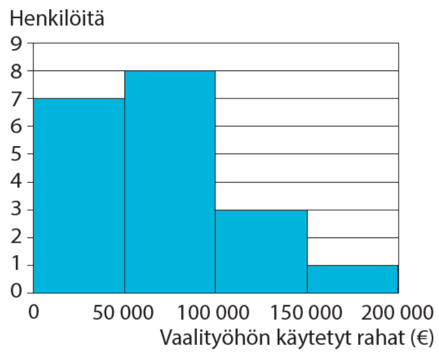
$P(X > a) = 0{,}0746$
$a = 153{,}8955\ldots \approx 154.$

Rajaksi on asetettava 154 pistettä.

509. a) Syötetään laskentaohjelmaan odotusarvo $\mu = 16$, keskihajonta $\sigma = 2{,}3$ ja välin rajat.
$P(14 \le X \le 18) = 0{,}6166\ldots \approx 0{,}62$

b) P(kuusi mansikkaa välillä 14 g…18 g) $= 0{,}6166^6 = 0{,}05495\ldots \approx 0{,}054$

510. a) Histogrammi vaalirahoituksesta laaditaan taulukkolaskentaohjelmalla.



b) Keskiarvon laskemista varten täytyy määrittää luokkakeskukset.

alaraja	**yläraja**	**keskiarvo**	***f***
0	49 999	24 999,5	7
50 000	99 999	74 999,5	8
100 000	149 999	124 999,5	3
150 000	199 999	174 999,5	1

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 24\,999{,}5 + 8 \cdot 74\,999{,}5 + 3 \cdot 124\,999{,}5 + 1 \cdot 174\,999{,}5}{7+8+3+1} =$$

69 736,3… ≈ 69 700 (€)

511. Lasketaan Eatonin tulosten normitettu arvo pituushypyssä.

$$z_{\text{pituus}} = \frac{7{,}94 - 7{,}27}{0{,}31} = 2{,}16129\ldots \approx 2{,}161$$

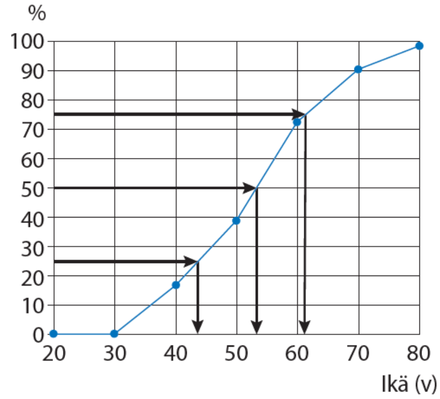
Merkitään x:llä suhteellisesti yhtä hyvää tulosta kiekonheitossa.

$$\frac{x - 43{,}94}{4{,}01} = 2{,}161$$

$$x = 2{,}161 \cdot 4{,}01 + 43{,}94$$
$$x = 52{,}60561 \approx 52{,}61$$

Tulosta pitää parantaa
52,61 – 45,49 = 7,11561 ≈ 7,12 (m).

512. Piirretään taulukkolaskentaohjelmalla kertymäkuvaaja.



Määritetään mediaani sekä ala- ja yläkvartiilit kuvaajasta.
Mediaani on 53 vuotta.
Alakvartiili on 44 vuotta.
Yläkvartiili on n 62 vuotta.

513. Syötetään laskentaohjelmaan odotusarvo $\mu = 55{,}2$, keskihajonta $\sigma = 18{,}4$ ja välin rajat.

$P(X \geq a) = 0{,}005$

$a = 85{,}4653\ldots \approx 85$

Laudaturin saa, jos pisteitä on 85 tai enemmän.

514. Valitaan laskentaohjelmasta binomijakauma ja syötetään siihen $n = 20$, $p = 0{,}1667$ ja välin raja.

$P(X \geq 5) = 0{,}23138\ldots \approx 0{,}231$

515. a) $0{,}938^{12} = 0{,}46391\ldots \approx 0{,}464$

b) $\binom{12}{2}(1 - 0{,}938)^2 \cdot 0{,}938^{12-2} = 0{,}13376\ldots \approx 0{,}134$

c) Keskiarvo on

$\bar{x} = 12 \cdot 0{,}938 = 11{,}256 \approx 11{,}3.$

Keskihajonta on

$\sigma = \sqrt{12 \cdot 0{,}938 \cdot (1 - 0{,}938)} = 0{,}83538\ldots \approx 0{,}835.$

516. Eteläistä vaihtoehtoa kannattaa

$$\frac{56}{200} = 0{,}28 = 28\ \%\ \text{vastaajista.}$$

Pohjoista vaihtoehtoa kannattaa

$$\frac{32}{200} = 0{,}16 = 16\ \%\ \text{vastaajista.}$$

95 prosentin kriittinen arvo on 1,96.

Eteläisen vaihtoehdon virhemarginaali on

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28(1-0{,}28)}{200}} = 0{,}06222\ldots \approx 6{,}2\ \%$$

Eteläisen vaihtoehdon virhemarginaali on

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}16(1-0{,}16)}{200}} = 0{,}05080\ldots \approx 5{,}1\ \%$$

Eteläistä vaihtoehtoa kannattaa 28 % ja sen virhemarginaali on 6,2 %.
Pohjoista vaihtoehtoa kannattaa 16 % ja sen virhemarginaali on 5,1 %.

517.a) 95 prosentin kriittinen arvo on 1,96.

Keskiarvon virhemarginaali on

$$1{,}96 \cdot \frac{1{,}35}{\sqrt{50}} = 0{,}3742\ldots \approx 0{,}37.$$

Luottamusväli on
3,75 – 0,37 … 3,75 + 0,37 = 3,68 … 4,42.

b) Koska pitkäaikainen keskiarvo kuuluu tutkimuksen 95 prosentin luottamusväliin, ei voida sanoa, että tyytyväisyys olisi kasvanut.

518.a) $E(\text{pistemäärä}) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{4} = -0{,}25$

b) **Tapa 1**

Taulukoidaan oikeisiin vastusten määriin liittyvät pistemäärät ja todennäköisyydet. Todennäköisyydet noudattavat binomijakaumaa, jossa $n = 6$ ja $p = \frac{1}{3}$, ja ne voidaan määrittää laskentaohjelmalla.

Oikeita vastauksia	**Pisteitä**	**Todennäköisyys**
0	$6 \cdot (-1) = -6$	$\frac{64}{729} = 0{,}08779149\ldots$
1	$2 + 5 \cdot (-1) = -3$	$\frac{64}{243} = 0{,}26337448\ldots$
2	$2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0$	$\frac{80}{243} = 0{,}32921806\ldots$
3	$3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 3$	$\frac{160}{729} = 0{,}21947873\ldots$
4	$4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 6$	$\frac{20}{243} = 0{,}08230452\ldots$
5	$5 \cdot 2 - 1 = 9$	$\frac{4}{243} = 0{,}01646090\ldots$
6	$6 \cdot 2 = 12$	$\frac{1}{729} = 0{,}00137174\ldots$

$E(\text{pistemäärä}) =$
$$\frac{64}{729} \cdot (-6) + \frac{64}{243} \cdot (-3) + \frac{80}{243} \cdot 0 + \frac{160}{729} \cdot 3 + \frac{20}{243} \cdot 6 + \frac{4}{243} \cdot 9 + \frac{1}{729} \cdot 12 = 0$$
Laskentaohjelma ei välttämättä anna pistemäärien todennäköisyyksiä tarkkoina arvoina. Jos todennäköisyyksille käytetään laskussa likiarvoja, saatu odotusarvo voi poiketa hieman nollasta.

Tapa 2

Lasketaan yhden osan pistemäärän odotusarvo.

$E(\text{pistemäärä yhdessä osassa}) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot (-1) = 0$

Tehtävässä on kuusi osaa.

$E(\text{pistemäärä koko tehtävässä}) = 6 \cdot E(\text{pistemäärä yhdessä osassa}) = 6 \cdot 0 = 0$

519. a) esim.
ylioppilastutkinnon arvosanajakauma,
Helsingin koulujen ylioppilaiden määrät,
syksyllä 2018, sisarusten lukumäärä

b) pituus, paino, nopeus,

9 FUNKTION KULUN TUTKIMINEN

Funktion merkki ja derivaatta

520. a) Funktion nollakohtia ovat ne x:n arvot, joiden kohdalla kuvaaja leikkaa x-akselin.

Nollakohdat ovat $x \approx -4$, $x \approx 1$ ja $x \approx 3$.

b) Funktion arvot ovat positiivisia niillä x:n arvoilla, joilla kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

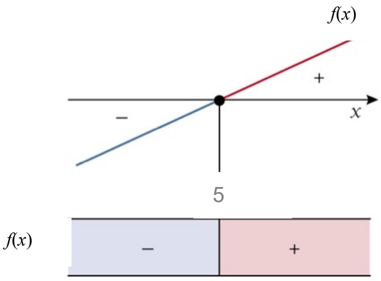
Ehto toteutuu, kun $-4 < x < 1$ tai $x > 3$.

c) Funktion arvot ovat negatiivisia niillä x:n arvoilla, joilla kuvaaja on x-akselin alapuolella. Ehto toteutuu, kun $x < -4$ tai $1 < x < 3$.

521. a)
$$4x - 20 = 0$$
$$4x = 20 \quad | :4$$
$$x = 5$$

b) Laaditaan funktion merkkikaavio.

Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 5$.



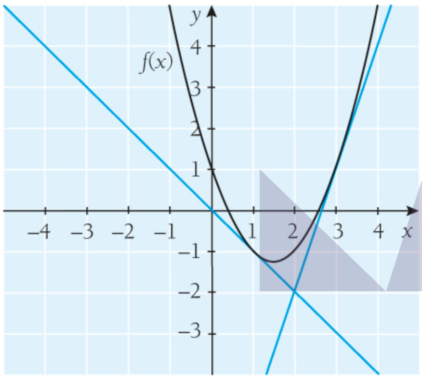
c) Merkkikaavion perusteella funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < 5$.

522. a) $f'(x) = -9$

b) $g'(x) = 4 \cdot 2x + 0 = 8x$

c) $h'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 = 6x^2 - 10x + 7$

523. Määritetään derivaatat tangenttien kulmakertoimien avulla. Piirretään apukolmiot ja määritetään kulmakertoimet.



$f'(1) \approx -1$ ja $f'(3) \approx 3$

524. $f(2) = 5 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 10$

$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 8 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 15x^2 - 16x + 3$

$f'(2) = 15 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 3 = 60 - 32 + 3 = 31$

525. a) Koska funktio $f(x)$ on 1. asteen polynomifunktio ja sen 1. asteen termin kerroin –3 on negatiivinen, funktion kuvaaja on laskeva suora.

b) Koska funktio $g(x)$ on 2. asteen polynomifunktio ja sen 2. asteen termin kerroin 2 on positiivinen, funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

c) Koska funktio $h(x)$ on 2. asteen polynomifunktio ja sen 2. asteen termin kerroin –1 on negatiivinen, funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

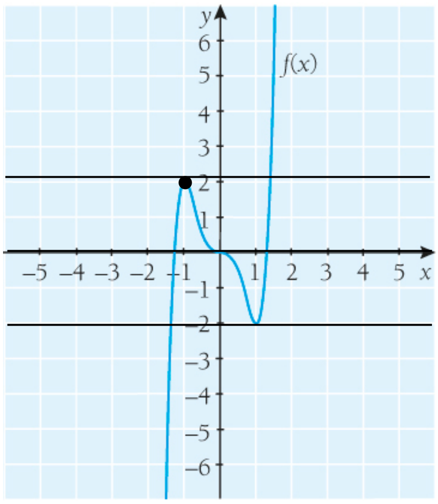
526. a) $f'(x) = \frac{3}{7} \cdot 7x^{7-1} - \frac{2}{3} \cdot 3x^{3-2} + \frac{7}{2} \cdot 2x^{2-1} - 1 \cdot x^{1-1} = 3x^6 - 2x^2 + 7x - 1$

b) $g'(t) = 2 \cdot 12t^{12-1} - 3 \cdot 9t^{9-1} = 24t^{11} - 27t^8$

c) $h(x) = x(x^2 + 6) = x^3 + 6x$

$h'(x) = 3x^2 + 6$

527. a) $f(-1)$ saadaan suoraan kuvaajasta: $f(-1) \approx 2$.



b) Derivaatta on nolla, kun tangentti on vaakasuora.
$x \approx -1$, $x \approx 0$ ja $x \approx 1$

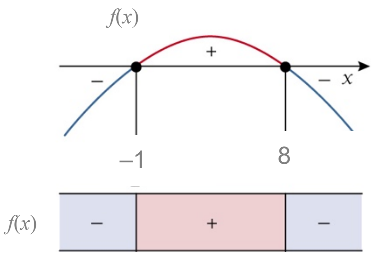
c) Kuvaajasta nähdään, että derivaatta on positiivinen, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

528. a) $-x^2 + 7x + 8 = 0$ $\quad$ $a = -1$, $b = 7$ ja $c = 8$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{-7 \pm 9}{-2}$$

$$x = \frac{-7+9}{-2} = -1 \text{ tai } x = \frac{-7-9}{-2} = 8$$

b) Laaditaan merkkikaavio.



Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 8$.

c) Funktion arvot ovat positiivisia, kun $-1 < x < 8$.

529. a) Määritetään funktion nollakohdat.
$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad$ $a = 1$, $b = -3$ ja $c = 2$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ tai } x = \frac{3-1}{2} = 1$$

b) Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
$f'(x) = 2x - 3$

Määritetään derivaattafunktion nollakohta.
$2x - 3 = 0$
$2x = 3 \quad | : 2$
$x = 1{,}5$

530. Derivoidaan funktio $g(x) = -2x^2 + 15x$.
$g'(x) = -2 \cdot 2x + 15 \cdot 1 = -4x + 15$

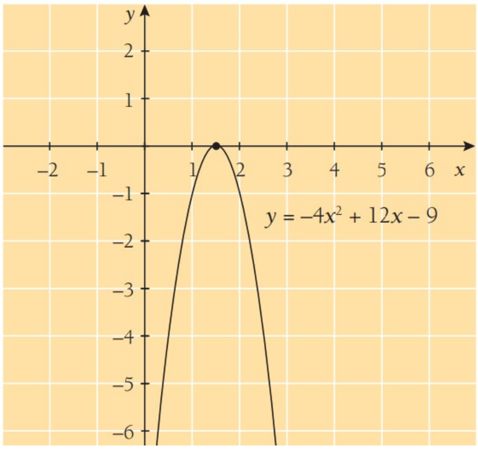
Derivoidaan funktio ja lasketaan $g'(x) = -9$.
$-4x + 15 = -9$
$-4x = -24 \quad | : (-4)$
$x = 6$

531. Derivoidaan funktio.
$f'(t) = 0{,}1 \cdot 3t^2 + 3{,}7 \cdot 2t - 1 = 0{,}3t^2 + 7{,}4t - 1$

a) Juorun leviämisnopeus 10 tunnin kuluttua on
$f'(10) = 0{,}3 \cdot 10^2 + 7{,}4 \cdot 10 - 1 = 103$.

b) Juorun leviämisnopeus 20 tunnin kuluttua on
$f'(20) = 0{,}3 \cdot 20^2 + 7{,}4 \cdot 20 - 1 = 267$.

532. a) Piirretään paraabeli laskentaohjelmalla ja määritetään huippu kuvaajasta ohjelman avulla. Toiminto voi olla esimerkiksi Ääriarvot tai Maksimipiste.



Huipun koordinaatit ovat (1,5; 0).

b) Paraabelin huipun x-koordinaatti on funktion $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$ derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio.
$f'(x) = -4 \cdot 2x + 12 \cdot 1 - 0 = -8x + 12$

Etsitään derivaatan nollakohta.
$-8x + 12 = 0$
$-8x = -12 \quad | : (-8)$
$x = 1{,}5$

Huipun x-koordinaatti on 1,5. Lasketaan y-koordinaatti.
$y = f(1{,}5) = -4 \cdot 1{,}5^2 + 12 \cdot 1{,}5 - 9 = 0$

Huipun koordinaatit ovat (1,5; 0).

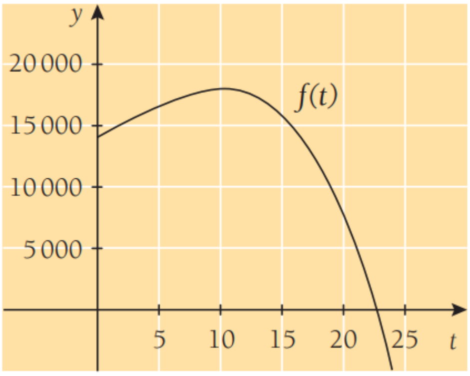
533. a) $f(t) = –3{,}2t^3 + 24t^2 + 480t + 14\ 000$

Väkiluku viiden vuoden kuluttua on
$f(5) = –3{,}2 \cdot 5^3 + 24 \cdot 5^2 + 480 \cdot 5 + 14\ 000 = 16\ 600$.

b) Derivoidaan funktio.
$f'(t) = –3{,}2 \cdot 3t^2 + 24 \cdot 2t + 480 \cdot 1 + 0 = –9{,}6t^2 + 48t + 480$

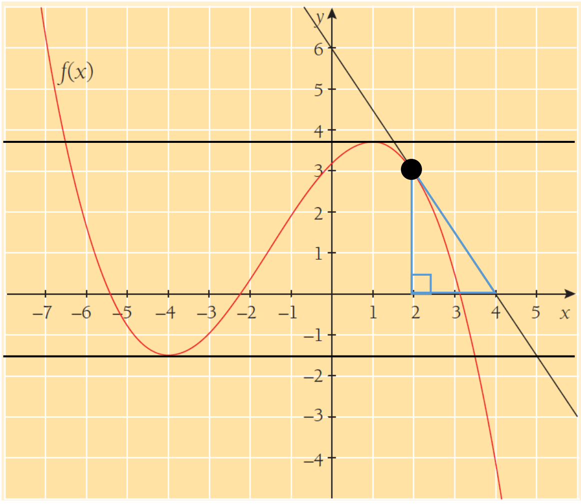
Väkiluvun kasvunopeus viiden vuoden kuluttua on
$f'(5) = –9{,}6 \cdot 5^2 + 48 \cdot 5 + 480 = 480$.

c) Muodostetaan yhtälö $–3{,}2t^3 + 24t^2 + 480t + 14\ 000 = 20\ 000$ ja ratkaistaan se laskentaohjelman avulla. Yhtälöllä ei ohjelman mukaan ole ratkaisua. Varmistetaan asia vielä kuvaajan avulla.



Väkiluku ei ylitä tarkastelujaksolla 20 000 asukkaan rajaa.

534.



a) Derivaatan nollakohdissa kuvaajalle pirretty tangentti on vaakasuora.
Derivaatan nollakohdat ovat $x = –4$ ja $x = 1$.

b) $f\,(2)$ on funktion arvo kohdassa $x = 2$, joten $f\,(2) = 3$.

$f\,'\,(2)$ on funktion derivaatta kohdassa $x = 2$ eli tähän kohtaan kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin. Näin $f\,'\,(2) \approx –1{,}5$.

535. a) Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = –4x^3 + 2x + 5 \cdot 1 = –4x^3 + 2x + 5$

Tangentin kulmakerroin saadaan sijoittamalla $x = –2$ derivaattafunktioon.
$f'(–2) = –4 \cdot (–2)^3 + 2 \cdot (–2) + 5 = –32 – 4 + 5 = –31$

b) $g(x) = x(x – 1) = x^2 – x$

Derivoidaan funktio $g(x)$.
$g\,'(x) = 2x – 1 \cdot 1 = 2x – 1$

Ratkaistaan millä x:n arvolla derivaattafunktion arvo on 5.
$2x – 1 = 5$
$2x = 6 \quad | : 2$
$x = 3$

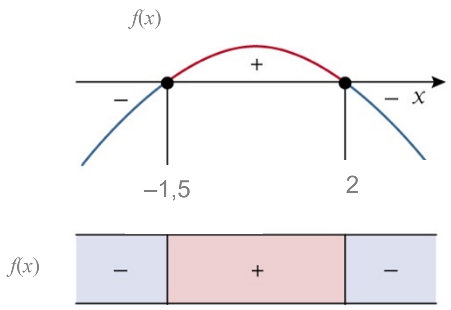
536. Funktion nollakohdat:

$-2x^2 + x + 6 = 0 \quad a = -2,\ b = 1$ ja $c = 6$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 6}}{2\cdot(-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{-4} = \frac{-1 \pm 7}{-4}$$

$$x = \frac{-1+7}{-4} = -1{,}5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-7}{-4} = 2$$

Merkkikaavio:



a) Funktion arvot ovat positiivisia, kun $-1{,}5 < x < 2$.

b) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -1{,}5$ tai $x > 2$.

537. Maria laski funktion arvon kohdassa $x = 0$. Veeti laski funktion $f(x)$ derivaatan nollakohdat.

Oikea ratkaisu:

$x^2 - 8x + 7 = 0 \quad a = 1,\ b = -8$ ja $c = 7$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{8+6}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{8-6}{2} = 1$$

Nollakohdat ovat $x = 7$ ja $x = 1$.

538. Derivoidaan funktio $f(x) = -3x^2 + 7x + 1$.
$f'(x) = -6x + 7$

Paraabelin huippu on derivaattafunktion nollakohdassa. Ratkaistaan yhtälö.

$$f'(x) = 0$$
$$-6x + 7 = 0 \quad \| -7$$
$$-6x = -7 \quad \| : (-6)$$
$$x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Ratkaistaan huipun y-koordinaatti:

$$y = -3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{6} + 1 = -3 \cdot \frac{49}{36} + \frac{49}{6} + 1 = 5\frac{1}{12}$$

539. a) Samun heiton pituuden määrittämistä varten ratkaistaan, missä kohdissa paraabeli $y = -0{,}03x^2 + x + 1{,}5$ leikkaa x-akselin.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.
$-0{,}03x^2 + x + 1{,}5 = 0$

$x = 34{,}7713... \approx 34{,}8$
tai
$x = -1{,}4379... \approx -1{,}4$

Koska x on pallon vaakasuora etäisyys Samusta, se ei voi olla negatiivinen.

Heiton pituus on 34,8 m.

b) Pallo on korkeimmillaan paraabelin huipun kohdalla, joka on funktion $f(x) = -0{,}03x^2 + x + 1{,}5$ derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio.
$f'(x) = -0{,}06x + 1$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta laskentaohjelmalla.
$-0{,}06x + 1 = 0$

$$x = \frac{50}{3} = 16{,}666...$$

Pallon suurin korkeus heiton aikana on $f\left(\frac{50}{3}\right) = 9{,}833... \approx 9{,}8$ (m).

540. Lasketaan $f(3)$ ja $f'(1)$.
$f(3) = 3^3 + a \cdot 3 + b = 20$
$27 + 3a + b = 20$
$3a + b = -7$

Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + ax + b$.
$f'(x) = 3x^2 + a$

Lasketaan $f'(1)$.
$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + a = -2$
$3 + a = -2$
$a = -5$

Ratkaistaan b sijoittamalla $a = -5$ yhtälöön $3a + b = -7$.
$3 \cdot (-5) + b = -7$
$-15 + b = -7$
$b = 8$

541. a) Tornin huippu on pisteessä $\left(\frac{1\,280}{2}, 152\right) = (640, 152)$. Sijoitetaan pisteen koordinaatit yhtälöön $y = ax^2$.

$152 = 640^2a \quad \| : 640^2$
$a \approx 0{,}000\,371$

b) Derivoidaan funktio $f(x) = ax^2$.
$f'(x) = 2ax$

Kaapelin kulmakerroin saadaan derivaatasta
$f'(640) = 2 \cdot 0{,}000\,371 \cdot 640 \approx 0{,}475$

Kulma x-akselin kanssa voidaan ratkaista yhtälön avulla:
$\tan \alpha = 0{,}475$
$\alpha \approx 25{,}4°$

Kysytty kulma on kulman α komplementti $90° - 25{,}4° = 64{,}6°$.

542. Käytetystä ohjelmasta riippuen funktion $f(x)=\sqrt{x}$ derivaatta saadaan joko muodossa $f'(x)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}$ tai $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Derivoidaan funktio $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ derivoimiskaavalla $Dx^{n}=nx^{n-1}$.

$$Dx^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Käytetään potenssin laskusäännöistä negatiivisen eksponentin määritelmää $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$ ja yhteyttä $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ toiseen suuntaan.

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tämä on joidenkin ohjelmien antama muoto derivaatalle, jolloin osoitus on valmis. Jos ohjelma antoi derivaatan muodossa $f'(x)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}$, muokataan vielä tätä muotoa murtolukujen laskusäännöillä, jolloin saadaan derivointisäännön antama muoto.

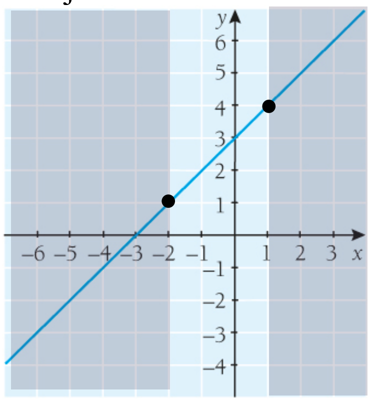
$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}:\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Funktion kulku ja ääriarvot

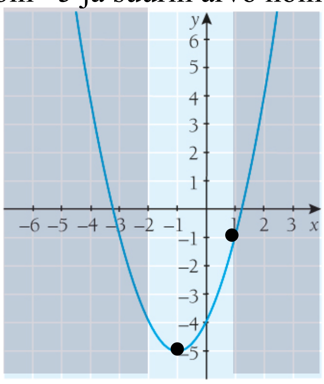
543. Kun derivaatan arvo on positiivinen, funktio on kasvava.
Kasvava välillä $-2 \leq x \leq 3$.

Kun derivaatan arvo on negatiivinen, funktio on vähenevä.
Vähenevä väleillä $x \leq -2$ ja $x \geq 3$.

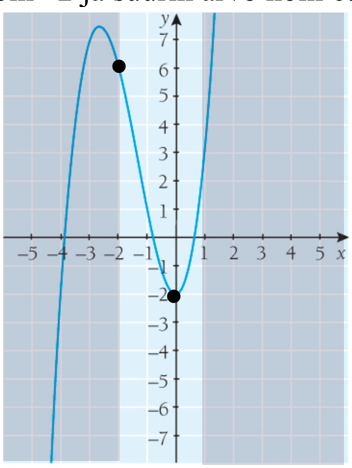
544. a) Pienin arvo on noin 1 ja suurin arvo noin 4.



b) Pienin arvo on noin –5 ja suurin arvo noin –1.



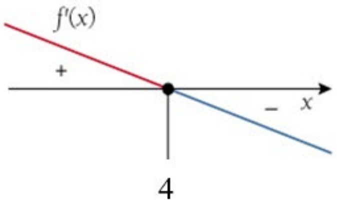
c) Pienin arvo on noin –2 ja suurin arvo noin 6.



545. Derivoidaan funktio $f(x) = -x^2 + 8x - 1$.
$f'(x) = -2x + 8$

Määritetään derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.
$-2x + 8 = 0$
$x = 4$

Laaditaan funktion $f(x)$ kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on laskeva suora.



$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava välillä $x \le 4$ ja vähenevä välillä $x \ge 4$.

546. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = 2x - 4$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.
$2x - 4 = 0 \quad | + 4$
$2x = 4 \quad | : 2$
$x = 2$

Derivaatan nollakohta on tarkasteltavalla välillä.

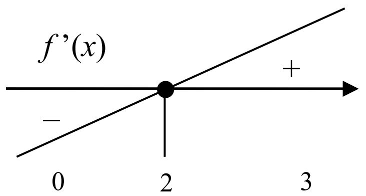
Ratkaisua voi jatkaa kahdella tavalla.

Tapa 1
Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä [0, 3] joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.
$f(0) = 1$
$f(2) = -3$
$f(3) = -2$

Suurin arvo on 1, pienin arvo –3.

Tapa 2
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on nouseva suora.



$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

Kulkukaaviosta nähdään, että pienin arvo on derivaatan nollakohdassa $x = 2$.
$f(2) = -3$

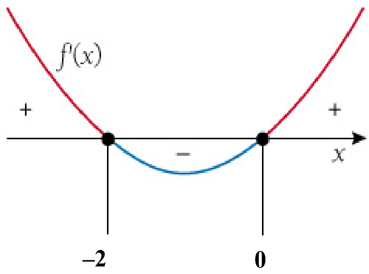
Funktion suurin arvo on joko kohdassa $x = 0$ tai $x = 3$.
$f(0) = 1$
$f(3) = -2$ Pienempi arvo.

Funktion suurin arvo on 1 ja pienin arvo –3.

547. Derivoidaan funktio.
$f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x + 0 = 3x^2 + 6x$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat laskentaohjelmalla.
$3x^2 + 6x = 0$
$x = 0$ tai $x = -2$

Laaditaan funktion $f(x)$ kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Funktion on kasvava väleillä $x \leq -2$ ja $x \geq 0$.
Funktio on vähenevä välillä $-2 \leq x \leq 0$.

548. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$

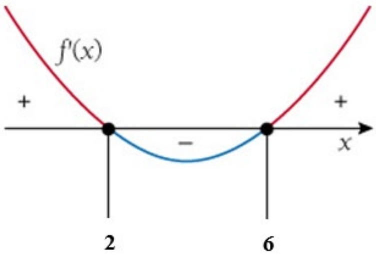
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.
$3x^2 - 24x + 36 = 0$
$x = 2$ tai $x = 6$

Derivaatan nollakohdista molemmat ovat tarkasteltavalla välillä.
Ratkaisua voi jatkaa kahdella tavalla.

Tapa 1
Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä [1, 9] joko välin päätepisteessä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Lasketaan nämä arvot.
$f(1) = 25$
$f(2) = 32$
$f(6) = 0$
$f(9) = 81$

Funktion suurin arvo on 81, pienin arvo 0.

Tapa 2
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.



	1		9
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Funktion pienin arvo on joko kohdassa $x = 1$ tai $x = 6$.
$f(1) = 25$
$f(6) = 0$

Funktion suurin arvo on joko kohdassa $x = 2$ tai $x = 9$.
$f(2) = 32$
$f(9) = 81$

Funktion suurin arvo on 81 ja pienin arvo 0.

549. Pallon lentorata on paraabeli $y = -0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8$. Kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli. Derivaatan nollakohdassa pallo on korkeimmillaan.

Derivoidaan funktio $f(t) = -0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8$ ja lasketaan derivaatan nollakohta.
$f'(t) = -0{,}15 \cdot 2t + 2{,}4 \cdot 1 + 0 = -0{,}3t + 2{,}4$

$-0{,}3t + 2{,}4 = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$t = 8$

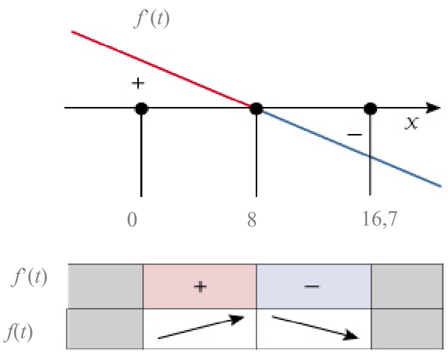
Pallo käy
$f(8) = -0{,}15 \cdot 8^2 + 2{,}4 \cdot 8 + 1{,}8 = 11{,}4$ (m) korkeudessa.

Jotta pallon laskeva lentorata voidaan selvittää, pitää laskea kohta, jossa pallo putoaa maahan. Se on toinen funktion nollakohdista.

Ratkaistaan funktion nollakohdat laskentaohjelmalla.
$-0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8 = 0$

$t = 16{,}717... \approx 16{,}7$
tai
$t = -0{,}7177... \approx -0{,}72$ Negatiivinen ratkaisu ei käy.

Laaditaan kulkukaavio. Derivaatan kuvaaja on laskeva suora.



Lentorata on laskeva aikavälillä 8–16,7 s.

550. a) Kuvaajasta nähdään, että funktiolla on suurin arvo kohdassa $x = 0$ ja se on 2.

Pienintä arvoa funktiolla ei ole, koska funktion arvot pienenevät siirryttäessä poispäin kohdasta $x = 0$.

b) Kuvaajasta nähdään, että funktiolla on pienin arvo kohdassa $x = -1$ ja se on -2.

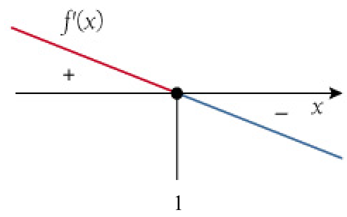
Funktiolla ei ole suurinta arvoa, koska funktion arvot suurenevat siirryttäessä poispäin kohdasta $x = -1$.

c) Kuvaajasta nähdään, että funktiolla on suurin arvo kohdissa $x \approx 1{,}2$ ja $x \approx -1{,}2$. Se on noin 5,2. Pienintä arvoa funktiolla ei ole.

551. Funktion derivaatta on $f'(x) = -3 \cdot 2x + 6 \cdot 1 = -6x + 6$.

Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora. Derivaatta on positiivinen, kun suora on x-akselin yläpuolella ja negatiivinen, kun suora on x-akselin alapuolella.
Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$-6x + 6 = 0$$
$$-6x = -6 \qquad | : (-6)$$
$$x = 1$$



Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Suurin arvo on kohdassa $x = 1$. Suurin arvo on $f(1) = 3$.

Pienintä arvoa ei kulkukaavion perusteella ole.

552. Myyntitulo saadaan kaavasta $x(140 - 35x) = -35x^2 + 140x$.

Mahdolliset x:n arvot saadaan siitä, että hinta tai myyntimäärä ei voi olla negatiivinen.

Pienin mahdollinen x:n arvo:
$x = 0$

Suurin mahdollinen x:n arvo:

$$140 - 35x = 0 \qquad \text{Ratkaistaan laskentaohjelmalla}$$
$$x = 4$$

Tarkasteluväli on $0 \le x \le 4$.
Derivoidaan funktio $f(x) = -35x^2 + 140x$.
$f'(x) = -70x + 140$

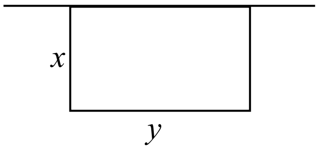
$$f'(x) = 0$$
$$-70x + 140 = 0 \qquad | -140$$
$$-70x = -140 \qquad | : (-70)$$
$$x = 2$$

Funktion suurin arvo saadaan joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.
$f(0) = 0$
$f(2) = 140$
$f(4) = 0$

Suurin arvo saadaan, kun $x = 2$.

Pullon hinnaksi kannattaa asettaa 2 € myyntitulon maksimoimiseksi.

553. Piirretään mallikuva.



Merkitään kasvimaan pensasaidan kanssa yhdensuuntaista sivua y:llä ja toista sivua x:llä. Kivireunusta on 5,6 m.

Kivireunuksen pituudesta saadaan yhtälö $2x + y = 5{,}6$.

Ratkaistaan yhtälöstä y.
$2x + y = 5{,}6$
$y = 5{,}6 - 2x$

Selvitetään mahdolliset x:n arvot.

Pienin mahdollinen x:n arvo on $x = 0$.

Suurin mahdollinen arvo saadaan, kun $y = 0$.
$5{,}6 - 2x = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla
$x = 2{,}8$

Kasvimaan pinta-alan lauseke on $A(x) = x \cdot y = x(5{,}6 - 2x) = 5{,}6x - 2x^2$.

Selvitetään, millä x:n arvolla funktio saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 2{,}8$.
Derivoidaan funktio $A(x)$.
$A'(x) = 5{,}6 - 4x$

Määritetään derivaatan nollakohta.
$5{,}6 - 4x = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 1{,}4$

Funktion suurin arvo saadaan joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.
$A(0) = 0$
$A(1{,}4) = 3{,}92$
$A(2{,}8) = 0$

Funktion arvo on suurin, kun $x = 1{,}4$. Tällöin $y = 5{,}6 - 2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8$.

Pensasaidan suuntainen sivu 2,8 m, kohtisuorat sivut 1,4 m.

554. Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$.

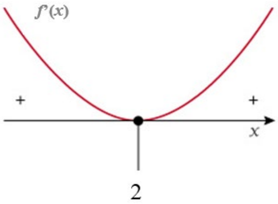
Funktio on kasvava väleillä, joissa sen derivaatta on positiivinen. Derivaatta on positiivinen niillä väleillä, joissa paraabeli $y = 3x^2 - 12x + 12$ on x-akselin yläpuolella. x-akselin ja paraabelin leikkauskohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $3x^2 - 12x + 12 = 0$.

Ratkaisukaavalla ratkaistaessa $a = 3$, $b = -12$ ja $c = 12$.

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 0}{6}$$

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

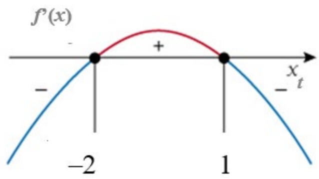
Funktion derivaatta on positiivinen kaikkialla paitsi derivaatan nollakohdassa. Kulkukaavion perusteella funktio on siis kaikkialla kasvava.

555. Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ derivaatta on

$f'(x) = -x^2 - x - 2$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.
$-x^2 - x + 2 = 0$. Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 1$ tai $x = -2$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



$f'(x)$	–	+	–
$f(x)$	↘	↗	↘

Funktio $f(x)$ on vähenevä väleillä $x \leq -2$ ja $x \geq 1$ ja kasvava välillä $-2 \leq x \leq 1$.

556. $f(x) = x(x^2 + 2x - 4) = x^3 + 2x^2 - 4x$

Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.
$3x^2 + 4x - 4 = 0$
$x = \frac{2}{3}$ tai $x = -2$

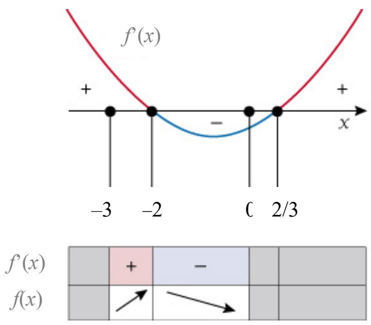
Derivaatan nollakohdista vain $x = -2$ on tarkasteltavalla välillä.

Ratkaisua voi jatkaa kahdella tavalla.

Tapa 1
Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä [–3, 0] joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.
$f(-3) = 3$
$f(0) = 0$
$f(-2) = 8$
Suurin arvo on 8, pienin arvo 3.

Tapa 2
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Kulkukaaviosta nähdään, että suurin arvo välillä [–3, 0] on kohdassa $x = -2$.
Suurin arvo on $f(-2) = 8$.

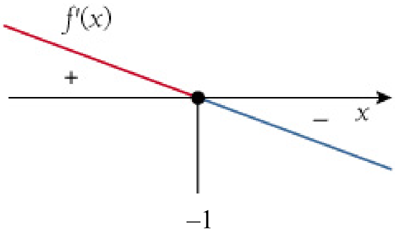
Kulkukaaviosta nähdään, että pienin arvo välillä [–3, 0] on kohdassa $x = -3$ tai kohdassa $x = 0$. Lasketaan nämä arvot.
$f(-3) = 3$
$f(0) = 0$

Suurin arvo on 8, pienin arvo 0.

557. Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = -2 \cdot 2x - 4 \cdot 1 + 0 = -4x - 4$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.
$-4x - 4 = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = -1$

Laaditaan funktion $f(x)$ kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on laskeva suora.

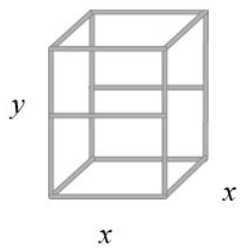


$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla ei ole pienintä arvoa, mutta suurin arvo on kohdassa $x = -1$. Suurin arvo on $f(-1) = 5$.

558. Merkitään pohjan neliön sivun pituutta x:llä ja lelukorin korkeutta y:llä.

Kehikon yhteispituudelle saadaan yhtälö
$10x + 4y = 810$.



Ratkaistaan yhtälöstä y.
$10x + 4y = 810$
$4y = 810 - 10x \quad | : 4$
$y = 202{,}5 - 2{,}5x$

Pohjaneliön sivun pituus ja lelukorin korkeus eivät saa olla negatiivisia.
Rajat:
$x = 0$
$y = 0$
$202{,}5 - 2{,}5x = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 81$
Tarkastelu rajoittuu välille $0 \le x \le 81$.

Lelukorin tilavuus on $V(x) = x \cdot x \cdot y = x^2(202{,}5 - 2{,}5x) = 202{,}5x^2 - 2{,}5x^3$.

Derivoidaan funktio $V(x)$.
$V'(x) = 405x - 7{,}5x^2$.

Määritetään derivaatan nollakohdat.
$405x - 7{,}5x^2 = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 0$ tai $x = 54$

Funktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.
$V(0) = 0$
$V(81) = 0$
$V(54) = 196\,830$

Funktion arvo on suurin, kun $x = 54$. Tällöin $y = 202{,}5 - 2{,}5 \cdot 54 = 67{,}5$.

Pohjaneliön sivu 54 cm, korin korkeus 67,5 cm.

559. Merkitään muuttujalla x hinnan korotusta euroina. Lipputulojen suuruus saadaan tällöin funktiosta $L(x)$:
$L(x) = (3000 - 100x)(15 + x) = -100x^2 + 1\,500x + 45\,000$

Selvitetään mahdolliset x:n arvot. Lipun hinta tai katsojamäärä ei voi olla negatiivinen.

Pienin mahdollinen x:n arvo:
$15 + x = 0$
$x = -15$

Suurin mahdollinen x:n arvo:
$3\,000 - 100x = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 30$

Tarkasteluväli on $-15 \leq x \leq 30$.
Derivoidaan funktio $L(x)$:
$L'(x) = -200x + 1\,500$

Määritetään derivaatan nollakohdat.
$-200x + 1\,500 = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 7{,}5$

Funktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.
$L(-15) = 0$
$L(7{,}5) = 50\,625{,}00$
$L(30) = 0$

Suurimmat mahdolliset lipputulot ovat 50 625,00 €. Tämä lipputulo saavutetaan, kun lipun hinta on 15 € + 7,5 € = 22,50 €.

560. Laskentaohjelmien ja laskimien tarkkuus ei yleensä riitä ilmoittamaan arvojen $f(3{,}0)$ ja $f(3{,}000\ 000\ 000\ 01)$ välistä eroa.

Suuruusvertailussa apuna käytetään funktion kasvamista ja vähenemistä.

Jos funktio on kasvava välillä, johon arvot $x = 3{,}0$ ja $x = 3{,}000\ 000\ 000\ 01$ kuuluvat, funktion arvot suurenevat ja $f(3{,}000\ 000\ 000\ 01) > f(3{,}0)$.

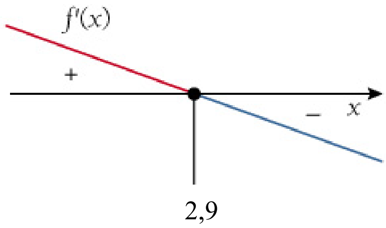
Jos funktio on vähenevä kyseisellä välillä, funktion arvot pienenevät ja $f(3{,}000\ 000\ 000\ 01) < f(3{,}0)$.

Derivoidaan funktio $f(x) = -100x^2 + 580x - 2\ 050$.
$f'(x) = -200x + 580$

Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora.

Ratkaistaan derivaatan nollakohta laskentaohjelmalla.
$-200x + 580 = 0$
$x = 2{,}9$

Laaditaan funktion kulkukaavio.



$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

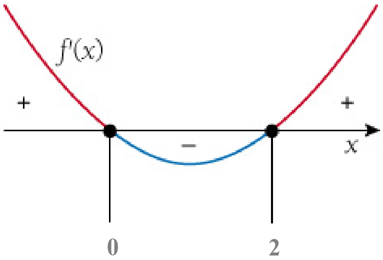
Kulkukaavion mukaan funktio $f(x)$ on vähenevä, kun $x \geq 2{,}9$.

Tutkittavat muuttujan x arvot kuuluvat välille, jossa funktio $f(x)$ on vähenevä. Siis $f(3{,}000\ 000\ 000\ 01) < f(3{,}0)$ ja arvo $f(3{,}0)$ on suurempi.

561. Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.
$3x^2 - 6x = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 2$ tai $x = 0$

Laaditaan funktion $f(x)$ kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗
	max	min	

Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimiarvo kohdassa $x = 0$, ja se on $f(0) = 3$.

Funktiolla on minimiarvo kohdassa $x = 2$, ja se on $f(2) = -1$.

562. Sektorin piirin pituus on $b + 2r$. Ratkaistaan tästä $b = 1 - 2r$.

Sektorin pinta-ala on tehtävässä annetun kaavan mukaisesti $A = \frac{br}{2}$.

Merkitään pinta-alaa säteen muuttujana.

$$A(r) = \frac{br}{2} = \frac{1}{2}r - r^2$$

Rajat:
$r = 0$

$b = 0$
$1 - 2r = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$r = \frac{1}{2}$

Tarkastelu sijoittuu välille $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Derivoidaan funktio $A(x)$:

$$A'(r) = -2r + \frac{1}{2}$$

Määritetään derivaatan nollakohdat:

$-2r + \frac{1}{2} = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla

$r = \frac{1}{4}$

Funktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.

$A(0) = 0$

$A\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

$A\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Säteen pituus on 0,25 m.

563. Merkitään ympyrälieriön korkeutta muuttujalla h ja pohjan sädettä kirjaimella r. Tiedetään, että $h + 2r = 24$. Ratkaistaan tästä $h = 24 - 2r$. Suoran ympyrälieriön tilavuus saadaan kaavasta $V = A_p \cdot h = \pi r^2 \cdot h$. Merkitään tilavuutta säteen funktiona:

$V(r) = \pi r^2 \cdot (24 - 2r) = 24\pi r^2 - 2\pi r^3$

Rajat:

$r = 0$

$h = 0$

$24 - 2r = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla

$r = 12$

Tarkastelu sijoittuu välille $0 \leq r \leq 12$.

Derivoidaan funktio $V(x)$.

$V'(r) = 48\pi r - 6\pi r^2$

Määritetään derivaatan nollakohdat:

$48\pi r - 6\pi r^2 = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.

$r = 0$ tai $r = 8$

Funktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.

$V(0) = 0$

$V(8) = 512\pi$

$V(12) = 0$

Korkeus on 8 cm, pohjan halkaisija 2 · 8 cm = 16 cm.

564. a) Suorakulmion pinta-alan lauseke on $A(x) = x(-x^2 + 6x)$.

Ne x:n arvot, joilla paraabeli on x-akselin alapuolella, eivät ole mahdollisia. Tarkasteluvälin rajat saadaan yhtälön avulla.

$-x^2 + 6x = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 0$ tai $x = 6$

Tarkasteluväli on $0 \le x \le 6$.

b) Derivoidaan funktio $A(x) = x(-x^2 + 6x) = -x^3 + 6x^2$.
$A'(x) = -3x^2 + 12x$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.
$-3x^2 + 12x = 0$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$x = 0$ tai $x = 4$

Funktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.
$A(0) = 0$
$A(4) = 32$
$A(6) = 0$

Suorakulmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo on 32.

565. a) Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = 3x^2 + 4x$
Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten kyseessä ei ole kasvava funktio.

b) Derivoidaan funktio $g(x)$.
$g'(x) = 4x^3 + 2ax$

Piirretään laskentaohjelmalla kuva funktiosta $g'(x)$ eri a:n arvoilla.

Nähdään, että jos $a \ge 0$, niin $g'(x)$ on kasvava. Siis funktio on tällöin konveksi. Jos $a < 0$, niin $g'(x)$ on vähenevä, eikä funktio ole konveksi.

566. Derivoidaan funktio $f(x)$.
$f'(x) = -3x^2 + 6x + 5$

On siis tutkittava, milloin derivaattafunktio $f'(x)$ saa suurimman arvonsa. Koska funktion $f'(x)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, saa se suurimman arvonsa paraabelin huippukohdassa eli derivaattafunktionsa nollakohdassa. Tutkitaan suurinta arvoa derivoimalla funktio uudestaan.

$f''(x) = -6x + 6$
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$\begin{aligned} -6x + 6 &= 0 && \mid -6 \\ -6x &= -6 && \mid :(-6) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Suurin tangentin kulmakerroin saadaan kohdassa $x = 1$. Tangentin kulmakerroin on:
$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 5 = 8$

Tangentti on piirretty kuvaajan pisteeseen
$(1, -1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2) = (1, 5)$.

Koontitehtäviä luvuista 1–9

1. a) $f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 7 = -1 + 2 - 1 - 7 = -7$

b) $2x^2 - x - 10 = 0$ $\quad a = 2, b = -1, c = -1$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{1+9}{4} = 2,5 \text{ tai } x = \frac{1-9}{4} = -2$$

c) $(5a)^2 - (a^2 + 1) = 25a^2 - a^2 - 1 = 24a^2 - 1$

2. a) Hinta korotuksen jälkeen: 1,25 · 50 €
Hinta korotuksen ja alennuksen jälkeen: 0,8 · 1,25 · 50 € = 50 €
Oikea vastus on B.

b) Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.
$d = 24 - 20 = 4$

Viides jäsen $a_5 = 20 + (5-1) \cdot 4 = 20 + 16 = 36$

Oikea vastaus on A.

c) Koska $2^4 = 16$, on $\log_2 16 = 4$. Oikea vastaus on A.

d) Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 3), joten yhtälön vakiotermi on 3.
Suoran kulmakerroin on –2. Suoran yhtälö on $y = -2x + 3$.

Oikea vastaus on C.

e) 10 henkilön ryhmästä voidaan valita kolmihenkinen toimikunta $\binom{10}{3} = 120$

eri tavalla. Oikea vastaus on A.

f) Pinta-alan yksiköissä suhdeluku on 100.
$3500 \text{ cm}^2 = 35 \text{ dm}^2 = 0,35 \text{ m}^2$

Oikea vastaus on A.

3. a) P(kaikki toimivat) = P(1. toimii) · P(2. toimii) · P(3. toimii) =
$0,94 \cdot 0,94 \cdot 0,94 = 0,94^3 = 0,830584 \approx 0,83$

b) Vastatapahtuma: ”mikään automaatti ei toimi”. Kunkin automaatin kohdalla
P(ei toimi) = 1 – 0,94 = 0,06.

P(mikään automaatti ei toimi) = P(1. ei toimi) · P(2. ei toimi) · P(3. ei toimi) = 0,06 · 0,06 · 0,06 = $0{,}06^3$ = 0,000216

P(ainakin yksi toimii) = 1 – 0,000216 = 0,999784 ≈ 0,9998

4. a) Merkitään $(x_1, y_1) = (22, 5)$ ja $(x_2, y_2) = (72, 10)$. Koska riippuvuus on lineaarinen, sitä kuvaa pisteiden kautta kulkeva suora. Muodostetaan suoran yhtälö.

Suoran kulmakerroin:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-5}{72-22} = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

Valitaan tunnetuksi suoran pisteeksi $(x_0, y_0) = (22, 5)$. Sijoitetaan pisteen koordinaatit ja kulmakerroin suoran yhtälön kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 5 &= 0{,}1(x - 22) \\ y - 5 &= 0{,}1x - 2{,}2 \\ y &= 0{,}1x + 2{,}8 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = 0{,}1x + 2{,}8$.

b) Sijoitetaan yhtälöön $x = 57$.

$y = 0{,}1 \cdot 57 + 2{,}8 = 5{,}7 + 2{,}8 = 8{,}5$

Arvosana on 8½.

5. Perunoiden määrä: x (kg)
Jauhelihan määrä: y (kg)

Muodostetaan annetuista tiedoista yhtälöpari ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

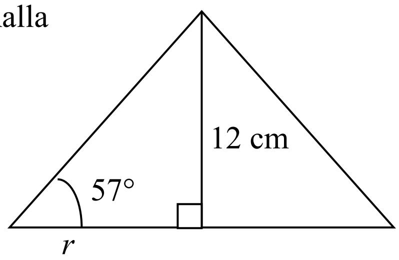
$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 0{,}75x + 8y = 467 \end{cases}$$

$x = 68$ ja $y = 52$

Perunoita ostettiin 68 kg ja jauhelihaa 52 kg.

6. Lasketaan ensin kartion pohjaympyrän säde I.

$\tan 57° = \frac{12}{r}$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla



$r = 7{,}79289... \approx 7{,}793$

Lasketaan kartion tilavuus.

$$V = \frac{A_p \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 7{,}793^2}{3} = 763{,}16... \approx 760\,(\text{cm}^3)$$

$760\ \text{cm}^3 = 7{,}6$ dl

Kartion tilavuus on 7,6 dl.

7. Rivi 1: laskettu kannan puolikas

Rivi 2: käytetty Pythagoraan lausetta saatuun suorakulmaiseen kolmioon korkeuden x laskemiseksi

Rivi 3: laskettu potenssien arvot

Rivi 4: siirretty luku 16 yhtälön oikealle puolelle

Rivi 5: ratkaistu x ja hylätty negatiivinen ratkaisu

Rivi 6: laskettu x:lle likiarvo

Rivi 7: laskettu kolmion pinta-ala kaavalla $\frac{kanta \cdot korkeus}{2}$, pyöristetty vastaus ja lisätty yksikkö

8. Neljässä pullossa siideriä on alkoholia $4 \cdot 12 = 48$ (g).
Kolmen tunnin aikana alkoholia palaa $3 \cdot 5{,}8 = 17.4$ (g).

Alkoholin määrä Viivin elimistössä viimeisen siiderin nauttimisen jälkeen:

$48 - 17{,}4 = 30{,}6$ (g)

Siis $a = 30{,}6$ g ja $m = 58$ kg $= 58\,000$ g

Veren alkoholipitoisuus:

$$\frac{a}{0{,}66m} = \frac{30{,}6}{0{,}66 \cdot 58\,000} = 0{,}0007993... \approx 0{,}0008 = 0{,}8\ ‰$$

9. Normaalijakaumassa odotusarvo $\mu = 750$ g ja keskihajonta $\sigma = 8{,}1$ g

a) Laskentaohjelman avulla saadaan P(alle 740 g) = 0,1085 $\approx$ 0,11.

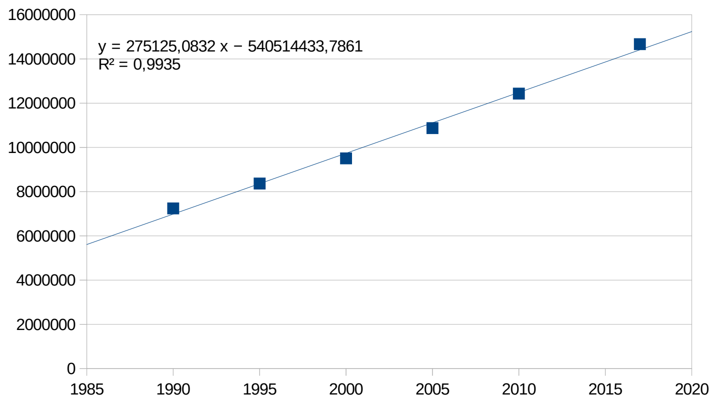
b) Alle 740 g painavien pakettien määrä noudattaa binomijakaumaa, jossa $n = 5$ ja $p = 0{,}1085$. Todennäköisyys voidaan laskea joko binomitodennäköisyyden kaavan $P(A \text{ tapahtuu } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ tai laskentaohjelman avulla. Kaavaa käyttämällä saadaan

P(tasan kaksi painaa alle 740 g) =
$\binom{5}{2} \cdot 0{,}1085^2 \cdot (1-0{,}1085)^{5-2} = 0{,}08341... \approx 0{,}083$.

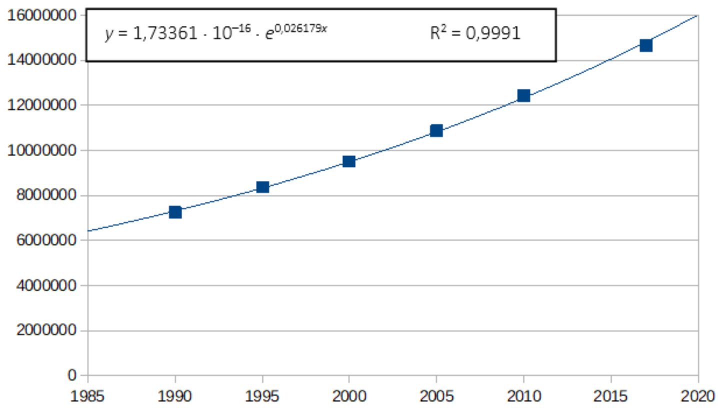
c) Laskentaohjelman avulla saadaan P(yli 766,6354 g) = 0,02, joten painavimmat 2 % paketeista painavat vähintään 767 g.

10. Sovitetaan taulukon tietoihin sekä lineaarinen että eksponentiaalinen malli ohjelman avulla niin, että x on vuosi ja y väkiluku.

Lineaarinen malli:



Eksponentiaalinen malli:



Selitysaste R^2 on parempi eksponentiaalisessa mallissa kuin lineaarisessa mallissa. Myös silmämääräisesti pisteet sijoittuvat paremmin loivasti ylöspäin kaareutuvalle käyrälle kuin suoralle. Eksponentiaalinen malli on malleista parempi, ja mallin mukainen yhtälö on
$y = 1{,}73361 \cdot 10^{-16} \cdot e^{0{,}026179x}$.
Laskentaohjelma voi antaa yhtälön myös muodossa
$y = 1{,}73361 \cdot 10^{-16} \cdot 1{,}026524^x$.

Ratkaistaan yhtälön avulla, millä x:n arvolla $y = 20\,000\,000$.

$1{,}73361 \cdot 10^{-16} \cdot e^{0{,}026179x} = 20\,000\,000$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla tai kokeilemalla.
$x = 2028{,}434...$

Mallin mukaan väkiluku ylittää 20 miljoonaa vuonna 2029.

Huomautus: Kaikki laskentaohjelmat eivät osaa antaa yhtälön ratkaisulle selkeästi luettavaa likiarvoa. Tällöin ratkaisu voidaan hakea kokeilemalla: lasketaan väkiluku vuosi kerrallaan, kunnes vaadittu ylitys tapahtuu. Ratkaisussa pitää tällöin näkyä ainakin viimeinen vuosi, jolloin väkiluku jää alle 20 miljoonan (2028) ja ensimmäinen vuosi, jolla se on yli 20 miljoonaa (2029).

11. a) Koska täyskulma on 360°, keskuskulma 180° vastaa sektoria, joka on puoliympyrä. Koska ympyrän säde on 1, koko kehän pituus on

$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi.$

Puoliympyrää vastaava kaaren pituus on tällöin $\frac{2\pi}{2} = \pi$,

joten 180 astetta on π radiaania.

b) Lasketaan sektorin kaaren pituus, kun keskuskulma on 37°.

$$b = \frac{37°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1 = 0{,}64577... \approx 0{,}646$$

Kulman suuruus on 0,646 radiaania.

c) Ratkaistaan yhtälön avulla sektorin keskuskulman α suuruus, kun sektorin kaaren pituus on 2.

$\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1 = 2$ Ratkaistaan laskentaohjelmalla.
$\alpha = 114{,}59...° \approx 115°$

Kulman suuruus on 115°.

12. Lasketaan vuotuinen nettokorkokanta.

100 % – 30 % = 70 %
0,7 · 1,26 % = 0,882 %

a) Kun talletukset tapahtuvat vuosittain, niiden yhteisarvo euroina 13. talletuksen jälkeen on

$S_{13} = 200 + 200 \cdot 1{,}00882 + 200 \cdot 1{,}00882^2 + \dots + 200 \cdot 1{,}00882^{11} + 200 \cdot 1{,}00882^{12}$,

jossa ensimmäinen yhteenlaskettava on viimeisen äskettäin tehdyn talletuksen arvo ja viimeinen yhteenlaskettava ensimmäisen 12 vuotta tilillä olleen talletuksen arvo.

Summa on geometrinen. Lasketaan se geometrisen summan kaavalla sijoittamalla kaavaan $a_1 = 200$, $q = 1{,}00882$ ja $n = 13$.

$$S_{13} = \frac{200 \cdot \left(1 - 1{,}00882^{13}\right)}{1 - 1{,}00882} = 2742{,}1414\ldots \approx 2742{,}14 \text{ (€)}$$

Tilin rahamäärä on 2742,14 €.

b) Kun talletukset tapahtuvat kuukausittain, lasketaan ensin talletuksille maksettavan koron määrä ja lisätään lopuksi siihen talletusten yhteissumma.

Talletuksille maksettavan koron yhteismäärä euroina 13. talletuksen jälkeen on

$$S_{13} = 0 + 200 \cdot 0{,}00882 \cdot \frac{1}{12} + 200 \cdot 0{,}00882 \cdot \frac{2}{12} + \dots + 200 \cdot 0{,}00882 \cdot \frac{11}{12} + 200 \cdot 0{,}00882 \cdot \frac{12}{12} =$$
$0 + 0{,}147 + 0{,}294 + \dots + 1{,}617 + 1{,}764$,

jossa ensimmäinen yhteenlaskettava on viimeisestä äskettäin tehdystä talletuksesta maksettu korko ja viimeinen yhteenlaskettava ensimmäisestä 12 kuukautta tilillä olleesta talletuksesta maksettu korko.

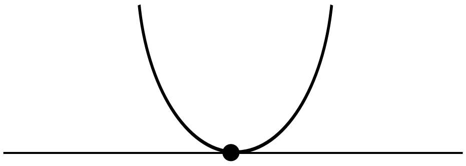
Summa on aritmeettinen. Lasketaan se aritmeettisen summan kaavalla sijoittamalla kaavaan $a_1 = 0$,
$a_n = 1{,}764$ ja $n = 13$.

$$S_{13} = 13 \cdot \frac{0 + 1{,}764}{2} = 11{,}466$$

Talletuksien yhteisarvo ilman korkoa on 13 · 200 € = 2 600 €.

Tilin rahamäärä on 2 600 € + 11,466 € = 2 611,466 € ≈ 2 611,47 €.

13. a) Paraabelin huippuun piirretty tangentti on vaakasuora.
Tangentin kulmakerroin eli kuvaajaa vastaavan funktion derivaatta on huipun x-koordinaatin kohdalla siksi 0.



b) Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ derivaatta on $f'(x) = 2ax + b$. Ratkaistaan derivaatan nollakohta yhtälön avulla.

$$2ax + b = 0$$
$$2ax = -b \quad |:2a$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

Siis huipun x-koordinaatti on $x_0 = -\frac{b}{2a}$.