

# Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälö

## Yhtälön ratkaiseminen

Polynomiyhtälön ratkaisutapa riippuu yhtälön asteluvusta. Tavallisimmin polynomiyhtälöt ovat joko ensimmäisen tai toisen asteen yhtälöitä.

Esimerkki 1

Ratkaise yhtälö.

a)  $5(3x - 2) = 6x - 12$

b)  $x^2 - 8x + 15 = 0$

Ratkaisu

a)

$$5(3x - 2) = 6x - 12$$

$$15x - 10 = 6x - 12$$

$$15x - 6x = -12 + 10$$

$$9x = -2 \quad | : 9$$

$$x = -\frac{2}{9}$$

b)  $x^2 - 8x + 15 = 0$

**Poistetaan sulkeet.**

**Muuttujatermit vasemmalle ja vakiotermit oikealle.**

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan

kertoimet

$$a = 1, b = -8 \text{ ja } c = 15.$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{8+2}{2} = 5 \text{ tai } x = \frac{8-2}{2} = 3$$

Vastaus

$$\text{a) } x = -\frac{2}{9}$$

$$\text{b) } x = 5 \text{ tai } x = 3$$

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö.

$$\text{a) } 3x^2 + 1 = 2x$$

$$\text{b) } x^2 - 7 = 0$$

Ratkaisu

a)

$$3x^2 + 1 = 2x$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

Negatiivisella luvulla ei ole neliöjuurta. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

b) *Tapa 1* Ratkaisukaavalla

$$x^2 - 7 = 0$$

Toisen asteen yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 3, b = -2 \text{ ja } c = 1$$

$$a = 1, b = 0 \text{ ja } c = -7$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{28}}{2}$$

**Vastaukseksi annetaan tarkat arvot.**

*Tapa 2* Neliöjuuren avulla

$$x^2 - 7 = 0$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm \sqrt{7}$$

Vastaus tulee eri ratkaisutavoilla hieman eri muodossa.

$\frac{\sqrt{28}}{2}$  ja  $\sqrt{7}$  ovat kuitenkin sama luku:

$$\frac{\sqrt{28}}{2} = \sqrt{7} = 2,6457513\dots$$

Vastaus

a) ei ratkaisua

$$b) x = \frac{\sqrt{28}}{2} = \sqrt{7} \text{ tai } x = -\frac{\sqrt{28}}{2} = -\sqrt{7}$$

Esimerkki 3

Ratkaise yhtälö.

$$a) \frac{y}{6} + \frac{y}{9} = 1$$

$$b) \frac{3x-1}{2} = \frac{2x+3}{5}$$

$$c) 3x - 5 = 2x - (-x + 5)$$

Ratkaisu

a)

$$3) \frac{y}{6} + \frac{2y}{9} = 1$$

$$\frac{3y}{18} + \frac{2y}{18} = 1 \quad | \cdot 18$$

$$3y + 2y = 18$$

$$5y = 18 \quad | : 5$$

$$y = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

**Myös desimaalimuoto 3,6 kelpaisi vastaukseksi, koska se on tarkka.**

$$b) \frac{3x-1}{2} = \frac{2x+3}{5}$$

$$5(3x-1) = 2(2x+3)$$

$$15x-5 = 4x+6$$

$$15x-4x = 6+5$$

$$11x = 11 \quad | : 11$$

$$x = 1$$

**Verranto voidaan ratkaista kertomalla ristiin**

c)

$$3x-5 = 2x - (-x+5)$$

$$3x-5 = 2x+x-5$$

$$3x-5 = 3x-5$$

$$0 = 0, \text{ tosi}$$

**Poistetaan sulkeet.**

Yhtälö toteutuu kaikilla  $x$ :n arvoilla.

Jos yhtälön ratkaisussa muuttujat häviävät kokonaan, yhtälön ratkaisut päätellään viimeisen vaiheen yhtälöstä. Jos yhtälö on tosi, kuten  $0 = 0$ , kaikki luvut toteuttavat yhtälön. Jos yhtälö on epätosi, kuten  $0 = 4$ , yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus

$$a) y = 3\frac{3}{5}$$

$$b) x = 1$$

c) Yhtälö toteutuu kaikilla  $x$ :n arvoilla.

Esimerkki 4

Ratkaise yhtälö  $(x + 6)(3x - 1) = 0$ .

Ratkaisu

*Tapa 1* Ratkaisukaavalla

$$(x + 6)(3x - 1) = 0$$

$$3x^2 - x + 18x - 6 = 0$$

$$3x^2 + 17x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$

$$a = 3, b = 17 \text{ ja } c = -6$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{361}}{6} = \frac{-17 \pm 19}{6}$$

$$x = \frac{-17 + 19}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

tai

$$x = \frac{-17 - 19}{6} = \frac{-36}{6} = -6$$

*Tapa 2* Tulon

nollasäännöllä

$$(x + 6)(3x - 1) = 0$$

$$x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

tai

$$3x - 1 = 0$$

$$3x = 1 \quad | :3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Vastaus

$$x = -6 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

**Yhtälön käyttö sovellustehtävässä**

Sovellustehtävästä kannattaa usein muodostaa yhtälö ja ratkaista se. Jos tehtävänannossa ei ole pyydetty käyttämään yhtälöä, sovellustehtävän voi ratkaista myös ilman yhtälöä. Tällöin laskujen kaikki välivaiheet on kirjoitettava selvästi näkyviin. Joihinkin sovellustehtäviin on useampia ratkaisuja. Yhtälöä käyttämällä on muita ratkaisutapoja helpompi varmistua, että kaikki mahdolliset ratkaisut on löydetty.

#### Esimerkki 5

Nellan ja Viivin isoäiti maksoi tytöille palkkaa pihatöiden tekemisestä työtuntien suhteessa. Miten isoäidin kannattaa jakaa 40 euron palkkio tyttöjen kesken, kun Nella teki pihatöitä 7 tuntia ja Viivi 5 tuntia?

#### Ratkaisu

Isoäiti jakaa palkkion työtuntien suhteessa 7 : 5.  
Merkitään Nellan palkkaa  $7x$ :llä. Viivin palkka on tällöin  $5x$ .  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned}7x + 5x &= 40 \\12x &= 40 && | : 12 \\x &= \frac{40}{12} (\text{€})\end{aligned}$$

Nellan osuus palkkiosta on

$$7x = 7 \cdot \frac{40}{12} = 23,3333\dots \approx 23,33 \text{ (€)}.$$

Viivin osuus on

$$5x = 5 \cdot \frac{40}{12} = 16,6666\dots \approx 16,67 \text{ (€)}.$$

**Osuudet voisi pyöristää myös viiden sentin tarkkuuteen.**

#### Vastaus

Nella saa palkkiosta 23,33 € ja Viivi 16,67 €.

## TEORIAYHTEENVETO

Yhtälö on muotoa  $ax^2 + bx + c = 0$ , missä  $a \neq 0$ . Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

**Yhtälön ratkaiseminen**

Yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan

niiden  $x$ -arvojen löytämistä, jotka toteuttavat yhtälön. Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

### Yhtälöiden ratkaisumenetelmiä

tai

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

$x = 9$  ratkaisemisen vaiheita ovat nimittäjien

poistaminen, sulkeiden poistaminen,

Lasketaan Ennin ja Otton iät.

Enni:  $3x = 3 \cdot 9 = 27$

sekä lopuksi sopivalla luvulla jakaminen.

Otto:  $3x - 6 = 3 \cdot 9 - 6 = 21$

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Anni on 9-vuotias, Enni 27-vuotias ja Otto 21-vuotias.

ratkaisukaavalla:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Jos kaavassa neliöjuurimerkin alle tulee

negatiivinen luku, yhtälöllä ei ole

ratkaisua.

- Verranto voidaan ratkaista kertomalla ristiin.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

$x$

### Sovellustehtävän ratkaiseminen yhtälön avulla

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

Yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavia menetelmiä:

## LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

- Kokeen B-osassa tehtävien välivaiheissa esiintyvät yhtälöt voidaan ratkaista laskentaohjelman avulla. Toiminto on ohjelmissa yleensä

*Ratkaise (Solve)*, esimerkiksi

*Ratkaise*( $3x^2 + 1 = 2x$ ) tai *Solve*( $3x^2 + 1 = 2x, x$ ).

- Ohjelman asetuksista voidaan yleensä valita ratkaisuille joko tarkka arvo tai desimaalimuotoinen likiarvo. Likiarvoratkaisuille voi olla myös oma toimintonsa, esimerkiksi *RatkaiseNumeerisesti* tai *nSolve*.
- Kun yhtälö ratkaistaan ohjelmalla, vastaukseen on hyvä lisätä kuvakaappaus ohjelman ratkaisusta.
- Laskentaohjelmat eivät välttämättä löydä yhtälöiden kaikkia ratkaisuja. Jos tehtävässä kysytään jotain ratkaisujen lukumäärään liittyvää, pelkkä ohjelmasta otettu vastaus ei yleensä ole riittävä.

