

# Kahden muuttujan yhtälö

## Suoran yhtälö

Koordinaatistoon sijoitetulle suoralle voidaan muodostaa yhtälö, kun tunnetaan yksi suoran piste ja suoran kulmakerroin.

### Esimerkki 1

Suora kulkee pisteiden  $(-1, -3)$  ja  $(3, 5)$  kautta.

- a) Muodosta suoran yhtälö ja sievennä se muotoon  $y = kx + b$ .
- b) Onko piste  $(101, 200)$  suoralla?

### Ratkaisu

a) Suoran yhtälön muodostamiseksi täytyy tietää suoran kulmakerroin ja yksi suoran piste. Sijoitetaan pisteiden  $(x_1, y_1) = (-1, -3)$  ja  $(x_2, y_2) = (3, 5)$  koordinaatit suoran kulmakertoimen kaavaan.

$$k = \frac{5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

Suoran kulmakerroin:

Sijoitetaan laskettu kulmakerroin  $k = 2$  ja toinen annetuista pisteistä suoran yhtälön kaavaan. Valitaan

$$(x_0, y_0) = (-1, -3).$$

$$y - (-3) = 2(x - (-1))$$

$$y + 3 = 2(x + 1)$$

$$y + 3 = 2x + 2$$

$$y = 2x - 1$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Suoran yhtälö:}$$
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

b) Piste (101, 200) on suoralla, jos sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Sijoitetaan  $x = 101$  ja  $y = 200$  suoran yhtälöön  $y = 2x - 1$ .

$$200 = 2 \cdot 101 - 1$$

$$200 = 202 - 1$$

$$200 = 201$$

Koska yhtäsuuruus ei päde, piste (101, 200) ei ole suoralla.

Vastaus

a) Suoran yhtälö on  $y = 2x - 1$ .

b) Piste (101, 200) ei ole suoralla.

Esimerkki 2

Suorat  $y = -x + 3$  ja  $y = -2x + b$  rajoittavat  $x$ -akselista janan, jonka pituus on 2. Määritä vakio  $b$ .

Ratkaisu

Piirretään tilanteesta kuva geometriaohjelmalla. Luvulle  $b$  voidaan luoda liukusäädin, josta luvun arvoa voi muuttaa.

Ohjelmasta nähdään, että ratkaisuvaihtoehtoja on kaksi, ja niitä vastaavat  $b$ :n arvot ovat  $b = 2$  ja  $b = 10$ .

Perustellaan vastaus laskemalla.

Suora  $y = -x + 3$  leikkaa  $x$ -akselin pisteessä, jonka

$y$ -koordinaatti on nolla.

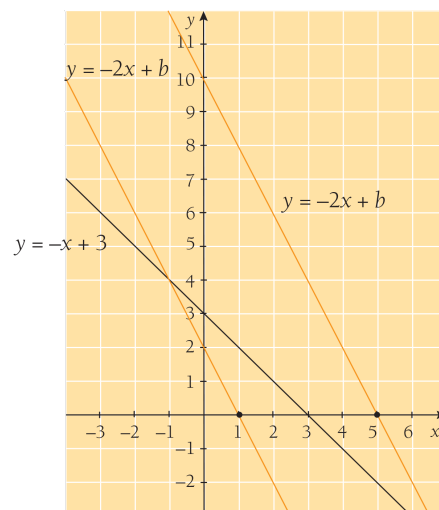
$$0 = -x + 3$$

$$x = 3$$

Pisteestä  $(3, 0)$  kahden yksikön päässä ovat  $x$ -akselin pisteet

$(1, 0)$  ja  $(5, 0)$ .

Vakio  $b$  saadaan selville sijoittamalla suoran  $y = -2x + b$  yhtälöön pisteiden  $(1, 0)$  ja  $(5, 0)$  koordinaatit.



Sijoitetaan  $x = 1$  ja  $y = 0$ .

$$0 = -2 \cdot 1 + b$$

$$-b = -2 \quad | : (-1)$$

$$b = 2$$

Sijoitetaan  $x = 5$  ja  $y = 0$ .

$$0 = -2 \cdot 5 + b$$

$$-b = -10 \quad | : (-1)$$

$$b = 10$$

Vastaus

$$b = 2 \text{ tai } b = 10$$

Esimerkki 3

Tutki, ovatko suorat  $99x + 3y - 1 = 0$  ja  $y = -32x + 5$  yhdensuuntaiset.

Ratkaisu

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niillä on sama kulmakerroin.

Suoran  $y = -32x + 5$  kulmakerroin on  $-32$ .

Suoran  $99x + 3y - 1 = 0$  yhtälö on muokattava kulmakertoimen selvittämistä varten muotoon  $y = kx + b$ .

$$99x + 3y - 1 = 0$$

$$3y = -99x + 1 \quad | : 3$$

$$y = -33x + \frac{1}{3}$$

Suoran kulmakerroin on  $-33$ . Koska suorilla on eri kulmakertoimet, ne eivät ole yhdensuuntaiset.

Vastaus

Suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

## Yhtälöpari

Jos tehtävässä on kaksi tuntematonta, tehtävä on usein helpointa ratkaista yhtälöparin avulla. Ilman laskentaohjelmaa yhtälöpari voidaan ratkaista joko laskemalla yhtälöt yhteen tai sijoittamalla, jolloin jompikumpi tuntemattomista saadaan poistettua. Tämän jälkeen molemmat muuttujat voidaan ratkaista yhden muuttujan yhtälöistä.

Esimerkki 4

Ratkaise yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Ratkaisu

*Tapa 1* Sijoittamalla

Ratkaistaan  $x$  ylemmästä yhtälöstä.

$$x + 2y = 5$$

$$x = 5 - 2y$$

Sijoitetaan  $5 - 2y$  alempaan yhtälöön  $x$ :n paikalle.

$$\begin{aligned}
 3(5 - 2y) - y &= 1 \\
 15 - 6y - y &= 1 \\
 -7y &= -14 && | : (-7) \\
 y &= 2
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu  $y$ :n arvo toiseen yhtälöistä, esimerkiksi muokattuun ylempään yhtälöön ja lasketaan  $x$ :n arvo.

$$x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

*Tapa 2* Yhteenlaskukeinolla

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} \\
 \hline
 7x = 7 \quad | : 7 \\
 x = 1
 \end{array}$$

Sijoitetaan saatu  $x$ :n arvo yhtälöön  $x + 2y = 5$ .

$$\begin{aligned}
 1 + 2y &= 5 \\
 2y &= 4 && | : 2 \\
 y &= 2
 \end{aligned}$$

Vastaus

$$x = 1, y = 2$$

Esimerkki 5

Kevytmaidossa on rasvaa 1,5 % ja kuohukermassa 34 %. Kevytmaidosta ja kuohukermasta halutaan valmistaa 200 g seosta, joka vastaa täysmaitoa. Täysmaidon rasvapitoisuus on 3,5 %. Kuinka paljon kevytmaitoa ja kuinka paljon kuohukermaa seokseen tarvitaan?



Ratkaisu

Merkitään kevytmaidon määrää  $x$ :llä ja kuohukerman määrää  $y$ :llä.

Rasvan määrien mukaan saadaan yhtälö

$$0,015x + 0,34y = 0,035 \cdot 200.$$

Seoksen kokonaismäärän perusteella saadaan toinen yhtälö

$$x + y = 200.$$

Muodostetaan yhtälöpari, josta ratkaistaan  $x$  ja  $y$  laskentaohjelmalla.

$$\begin{cases} 0,015x + 0,34y = 7 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

$$x = 187,69... \approx 188 \text{ ja } y = 12,30... \approx 12$$

Vastaus

Kevytmaidon tarvitaan 188 g ja kuohukermaa 12 g.

## TEORIAYHTEENVETO

### Suoran yhtälö

- Pisteiden  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin on 
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$
- Suoran yhtälön kaava on  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , missä  $k$  on kulmakerroin ja  $(x_0, y_0)$  on suoran piste.
- Suoran yhtälö esitetään yleensä muodossa  $y = kx + b$ . Luku  $k$  on suoran kulmakerroin ja luku  $b$  vakiotermin. Vakiotermin ilmaisee suoran ja  $y$ -akselin

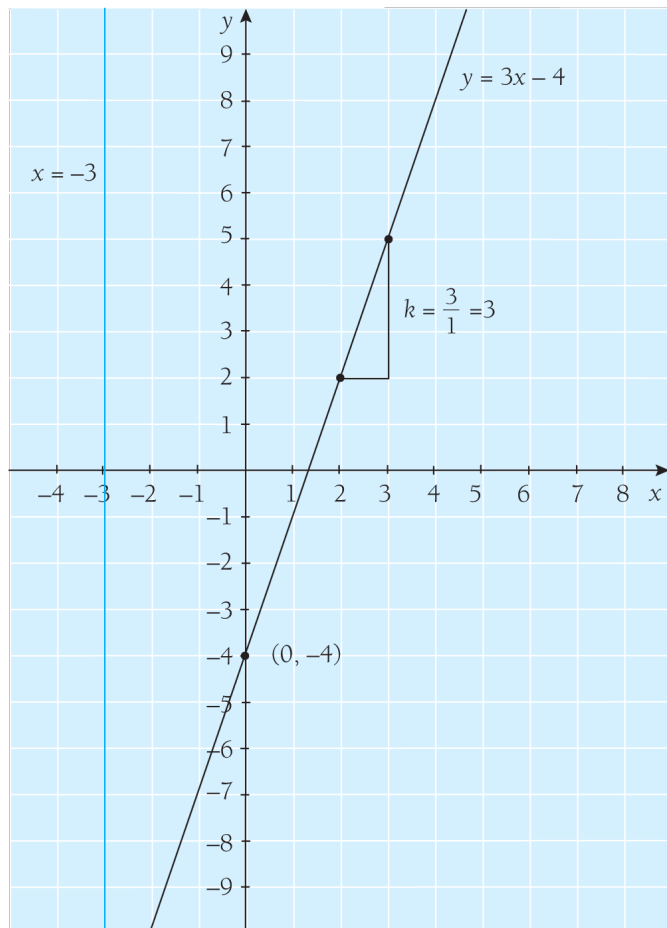
### Yhtälöpari

- Yhtälöparin ratkaisemisessa etsitään sellaiset lukuparit  $(x, y)$ , jotka toteuttavat yhtälöparin molemmat yhtälöt. Yhtälöpari voidaan ratkaista joko yhteenlasku- tai sijoitusmenetelmällä.
- Yhteenlaskumenetelmää käytettäessä muokatut yhtälöt lasketaan puolittain yhteen. Tavoitteena on toisen tuntemattoman kumoutuminen.

Esimerkiksi yhtälöparissa 
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

leikkauskohdan.

- Jos suorilla on sama kulmakerroin, suorat ovat yhdensuuntaiset.
- $y$ -akselin suuntaisen suoran yhtälö on muotoa  $x = a$ .



$y$ :t saadaan kumottua, kun ylempi yhtälö kerrotaan kolmella ja yhtälöt lasketaan yhteen.

- Sijoitusmenetelmää käytettäessä ilmaistaan jompikumpi tuntematon toisen tuntemattoman avulla lausekkeena, ja sijoitetaan lauseke toiseen yhtälöön. Esimerkiksi yhtälöparissa  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = x - 8 \end{cases}$  ylempään yhtälöön voidaan sijoittaa  $y$ :n paikalle  $x - 8$  alemman yhtälön perusteella. Sijoitettaessa pitää muistaa sulkeet.

## LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

- Kokeen B-osassa geometriaohjelman avulla voidaan tarkistaa, onko saatu suoran yhtälö oikein. Ohjelman avulla voidaan piirtää suora kahden pisteen kautta sekä jo piirretyn suoran kanssa yhdensuuntainen suora tai kohtisuora suora eli normaali. Suoran tai muun kuvaajan voi myös piirtää kirjoittamalla sen yhtälön syöttökenttään.
- Geometriaohjelmalla voidaan luoda suoran tai muun kuvaajan yhtälössä esiintyvälle vakiokirjaimelle liukusäädin, jonka avulla vakiokirjaimen arvo voidaan muuttaa. Jos ohjelmaan syöttää esimerkiksi suoran yhtälön  $y = 2x + b$ , se voi ehdottaa liukusäätimen luomista vakiolle  $b$ . Tämä toiminto on myös joissain muissa

laskentaohjelmissa.

- Jos suorat tai niihin liittyvät leikkauspisteet eivät näy ohjelman kuvassa, voidaan joutua muuttamaan näkymän asetuksia. Tämän voi tehdä joko *Lähennä/Loitonna*-toiminnoilla (*Zoom*) tai asettamalla näkyvien  $x$ :n ja  $y$ :n arvojen rajat. Toiminto voi löytyä esimerkiksi valikosta *Piirtoalue (Graphics)* tai *Näkymäikkuna/Ikkunan asetukset (Window)*.

- Yhtälöparit voidaan kokeen B-osassa ratkaista laskentaohjelman avulla. Toiminto voi olla esimerkiksi Solve  $\left( \begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}, x, y \right)$  tai

Ratkaise(  $\{x + y = 8, 2x - 3y = 1\}, \{x, y\}$  ).

- Pelkkä laskentaohjelman piirtotilasta saatu vastaus ei ole riittävä tehtävän ratkaisuksi, ellei tehtävässä nimenomaan pyydetä ratkaisua kuvaajan tai ohjelman avulla.