Suorakulmainen kolmio

Pythagoraan lause

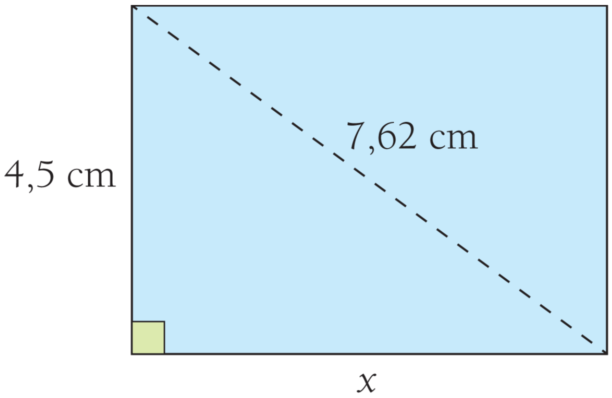
Kun suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kahden sivun pituus, kolmannen sivun pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseen avulla.

Esimerkki 1

Kameran näytön lävistäjän pituuden tiedetään olevan 3,0 tuumaa. Näytön korkeudeksi mitataan 4,5 cm. Laske näytön leveys. Yksi tuuma on 2,54 cm.

Ratkaisu

3 tuumaa = $3 \cdot 2{,}54$ cm = 7,62 cm



Näytön leveys saadaan ratkaistuksi Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
4{,}5^2 + x^2 &= 7{,}62^2 \\
20{,}25 + x^2 &= 58{,}0644 \\
x^2 &= 37{,}8144 \\
x &= \pm\sqrt{37{,}8144} \qquad \text{Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.} \\
x &= 6{,}149... \approx 6{,}1 \text{ (cm)}
\end{aligned}
$$

Vastaus

Näytön leveys on 6,1 cm.

Esimerkki 2

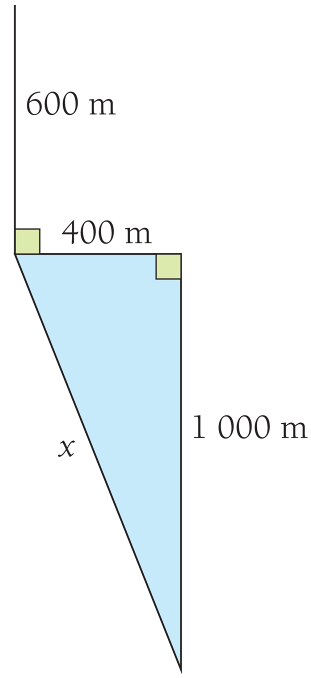
Kerttu ja Pirkko lähtivät mansikkapaikalta kohti mökkiä eri reittejä pitkin. Ensin molemmat kävelivät suoraan etelään 600 m ladon nurkalle. Sen jälkeen Kerttu kääntyi itään ja kulki pellon reunaa pitkin ensin 400 m ja sitten helppokulkuisen metsän läpi suoraan etelään 1 000 m. Pirkko valitsi vaikeampikulkuisen reitin ja suunnisti suoraan ladolta mökille. Kertun matkaan mansikkapaikalta mökille kului 30 min ja Pirkon matkaan 2 min 20 s vähemmän. Laske molempien reittien pituudet ja kummankin tytön keskinopeus yksikössä km/h.

Ratkaisu

Piirretään tilanteesta mallikuva.

Kertun kulkema matka on

600 + 400 + 1 000 = 2 000 (m).



2 000 m = 2 km
30 min = 0,5 h

Kertun keskinopeus on
$v_K = \frac{2}{0,5} = 4$ (km/h)

Pirkon kulkeman matkan loppuosan laskemiseksi täytyy laskea suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla, ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$x^2 = 400^2 + 1\,000^2$

$x = 1\,077{,}03\ldots \approx 1\,077$ (m)

tai

$x = -1\,077{,}03\ldots \approx -1\,077$ (m) **Negatiivinen ratkaisu ei käy**

Pirkon kulkeman reitin pituus on
600 m + 1 077 m = 1 677 m ≈ 1 700 m.

Pirkon käyttämä aika on
30 min – 2 min 20 s =
27 min 40 s = 27,666… min = 0,46111… h.

Pirkon keskinopeus on
$v_P = \frac{1,677}{0,4611} = 3,636\ldots \approx 3,6$ (km/h).

Vastaus

Kertun kulkema matka on 2 000 m ja keskinopeus 4 km/h.
Pirkon kulkema matka on 1 700 m ja keskinopeus 3,6 km/h.

Sini, kosini ja tangentti

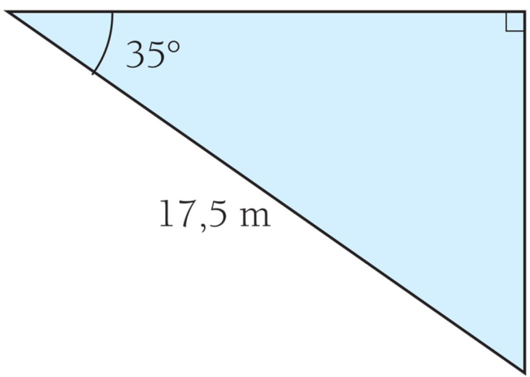
Kun suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan yhden sivun pituus ja yhden terävän kulman suuruus, voidaan laskea muiden sivujen pituudet sinin, kosinin tai tangentin avulla. Vastaavasti, jos tunnetaan kahden sivun pituus, voidaan laskea kulmien suuruudet.

Siniä, kosinia ja tangenttia voi käyttää ainoastaan suorakulmaisiin kolmioihin. Vaikka kuvio ei olisi suorakulmainen kolmio, sen voi usein jakaa suorakulmaisiksi kolmioiksi piirtämällä siihen sopivia apujanoja.

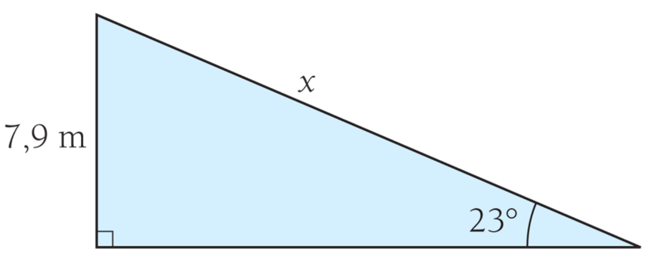
Esimerkki 3

Ratkaise *x*:llä merkityn sivun pituus.

a)



b)



Ratkaisu

a) Sivun pituus ratkaistaan kosinin avulla.

Esimerkki 4

a) Määritä kulmien α ja β suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.

b) Laske sivun x pituus.

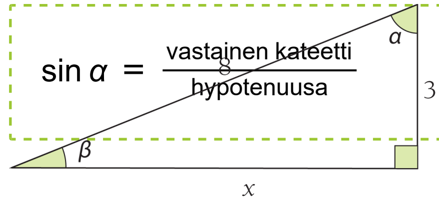
$\cos 35° = \frac{7,9}{x}$ | $\sin 23° = \frac{x}{17,5}$ | $\cdot x$

$x \cdot \sin 23° = 7,9 \cos 35°$ | : $\sin 23°$

$x = 14,335... \approx 14,3$ (m)

$x = \frac{...}{\sin 23°}$

$x = 20,218... \approx 20,2$ (m)



Ratkaisu

...ituus ratkaistaan sinin avulla.

Vastauksen voi pyöristää mittayksikön tarkkuuden sijasta merkitsevien numeroiden mukaan. Tällöin vastaus on 20 m.

Kulma α voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\alpha = 67,97568...° \approx 67,976°$$

Vastaus

a) $x = 14,3$ m

b) $x = 20,2$ m

Kulma β on

180° – 90° – 67,976° = 22,024° ≈ 22,0°.

Kulman β voi laskea myös sinin avulla.

b) Lasketaan sivun x pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 3^2 = 8^2$$
$$x^2 + 9 = 64$$
$$x^2 = 55$$
$$x = \pm\sqrt{55}$$

Negatiivinen ratkaisu ei käy.

Annetuissa sivun pituuksissa ei ole yksikköjä, joten sivujen pituudet ovat tarkkoja arvoja. Myös vastaus annetaan tarkkana arvona.

Vastaus

a) $\alpha = 68,0°$ ja $\beta = 22,0°$

b) $x = \sqrt{55}$

Esimerkki 5

Kolmion kärjet ovat pisteissä $A = (3, 3)$, $B = (–2, 1)$ ja $C = (0, –6)$.

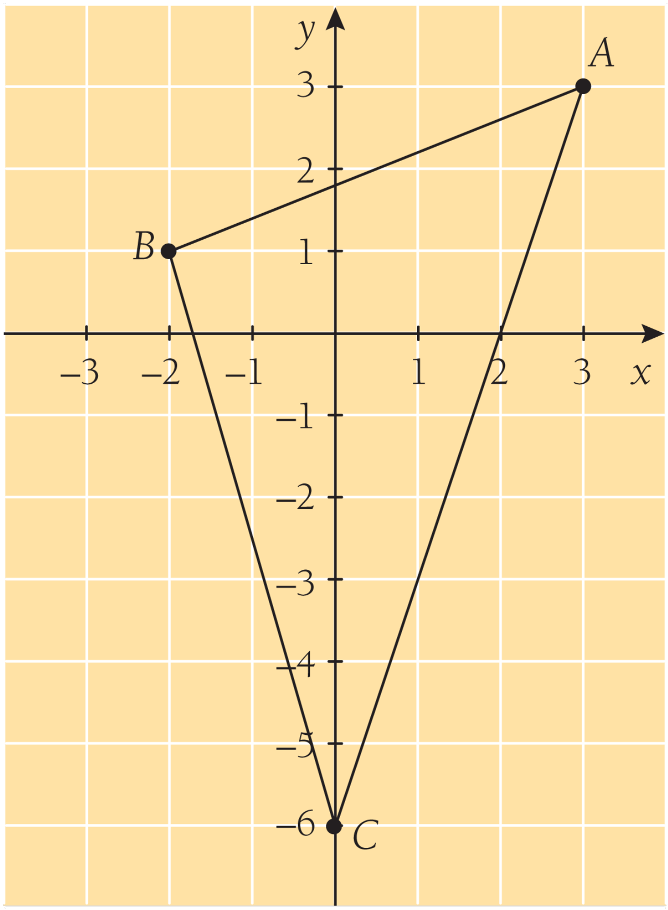
a) Piirrä kolmio koordinaatistoon.

b) Määritä laskentaohjelmalla kulman B suuruus. Anna

vastaus asteen tuhannesosan tarkkuudella.
c) Perustele kulman suuruus laskemalla.

Ratkaisu

a) Piirretään kolmio geometriaohjelmalla.



b) Määritetään kulman *B* suuruus ohjelman mittaustoiminnolla.

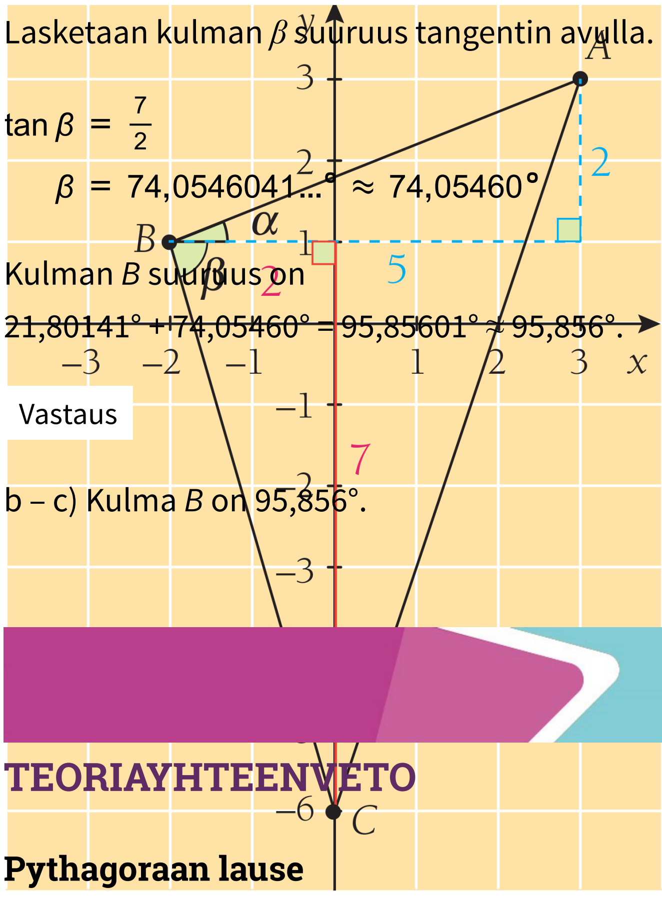
Kulman *B* suuruus on 95,856°.

c) Kulma *B* jaetaan *x*-akselin suuntaisella suoralla kahdeksi kulmaksi, α ja β. Piirretään kuvaan apukolmiot kulmien suuruuden määrittämiseksi.

Lasketaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{2}{5}$$
$$\alpha = 21{,}8014094\ldots° \approx 21{,}80141°$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$$



Lasketaan kulman β suuruus tangentin avulla.

$$\tan \beta = \frac{7}{2}$$

$$\beta = 74{,}0546041... \approx 74{,}05460°$$

Kulman B suuruus on

$21{,}80141° + 74{,}05460° = 95{,}85601° \approx 95{,}856°$.

Vastaus

b – c) Kulma B on $95{,}856°$.

TEORIAYHTEENVETO

Pythagoraan lause

Suorakulmaisessa kolmiossa sivujen pituuksien välillä on voimassa Pythagoraan lause:

$a^2 + b^2 = c^2$,

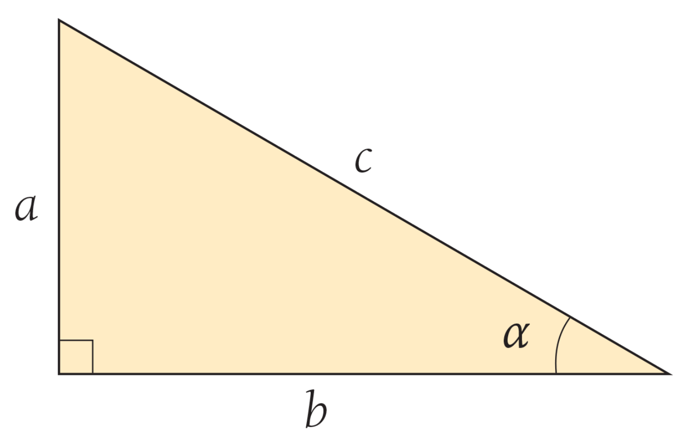
missä a ja b ovat kolmion kateettien pituudet ja c hypotenuusan pituus.

Trigonometriset funktiot

$$\sin \alpha = \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}} \qquad \sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{viereisen kateetin pituus}} \qquad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$



Avaa appletti →

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

• Kulman suuruus ratkaistaan trigonometrisestä yhtälöstä ohjelman mukaan joko toiminnoilla asin, acos ja atan tai $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ja $\tan^{-1}$.

• Kokeen A-osan peruslaskimella luvun neliöjuuri sekä trigonometristen funktioiden arvot näppäillään käänteisessä järjestyksessä. Esimerkiksi $\sqrt{26}$ näppäillään 26√, sin 57° näppäillään 57 sin ja kulma yhtälöstä $\tan \alpha = \frac{2}{7}$ saadaan näppäilemällä 2 ÷ 7 = atan.

• Kokeen B-osan laskentaohjelmissa kulman suuruuden oletusyksikkö voi olla jokin muu kuin aste. Tällöin kulman yksikkö täytyy ensin vaihtaa.

• Yhtälön ratkaisutoiminnon (*Solve*) käyttö trigonometrisille yhtälöille voi antaa hankalannäköisiä vastauksia. Ongelma yleensä ratkeaa, kun käyttää likimääräistä yhtälönratkaisutoimintoa (*RatkaiseNumeerisesti, nSolve*) tai rajaa vastaukseksi kelpaavat kulmien suuruudet. Komento voi olla esimerkiksi Solve(cos(x)=0.82,x) | 0 < x < 90.