Funktion kulku ja ääriarvot

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktion kasvamista ja vähenemistä voidaan tutkia derivaatan avulla.

Esimerkki 1

Missä funktio $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ on kasvava ja missä vähenevä?

Ratkaisu

Derivoidaan funktio.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x - 9 \cdot 1 - 0 = 3x^2 - 6x - 9$

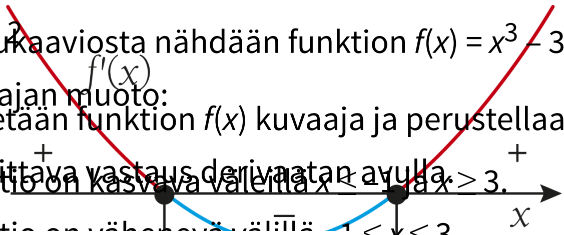
Ratkaisua voidaan jatkaa kahdella tavalla.

Tapa 1

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 6x - 9 = 0$ **$a = 3$, $b = -6$ ja $c = -9$**

Kulkukaaviosta nähdään funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ kuvaajan muoto:

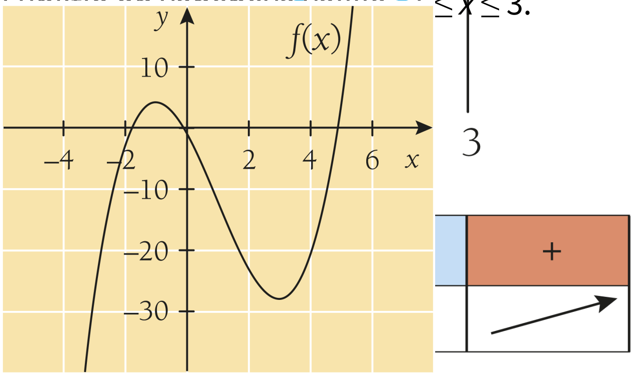


Funktio on kasvava väleillä $x \leq -1$ ja $x \geq 3$.

Funktio on vähenevä välillä $-1 \leq x \leq 3$.

Tapa 2

Piirretään funktion $f(x)$ kuvaaja ja perustellaan kuvasta havaittava vastaus derivaatan avulla.



Funktio on kasvava siellä, missä derivaatta $f'(x) \geq 0$.
Ratkaistaan epäyhtälö laskentaohjelmalla.

$3x^2 - 6x - 9 \geq 0$

$x \leq -1$ tai $x \geq 3$

Funktio on vähenevä siellä, missä derivaatta $f'(x) \leq 0$.
Ratkaistaan epäyhtälö laskentaohjelmalla.

$3x^2 - 6x - 9 \leq 0$

$-1 \leq x \leq 3$

Vastaus

Funktio on kasvava väleillä $x \leq -1$ ja $x \geq 3$ ja vähenevä välillä $-1 \leq x \leq 3$.

Suurin ja pienin arvo

Funktion suurinta ja pienintä arvoa voidaan etsiä derivaatan avulla. Usein suurinta ja pienintä arvoa etsitään joltain väliltä.

Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = -x^2 + 16x - 20$ suurin ja pienin arvo välillä $5 \leq x \leq 10$.

Ratkaisu

Derivoidaan funktio $f(x)$.

$f'(x) = -2x + 16$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
-2x + 16 &= 0 \\
-2x &= -16 \quad | : (-2) \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Derivaatan nollakohta $x = 8$ on tutkittavalla välillä.

Ratkaisua voidaan jatkaa kahdella tavalla.

Tapa 1

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan nämä arvot.

$f(5) = -5^2 + 16 \cdot 5 - 20 = 35$

$f(10) = -10^2 + 16 \cdot 10 - 20 = 40$

$f(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 20 = 44$

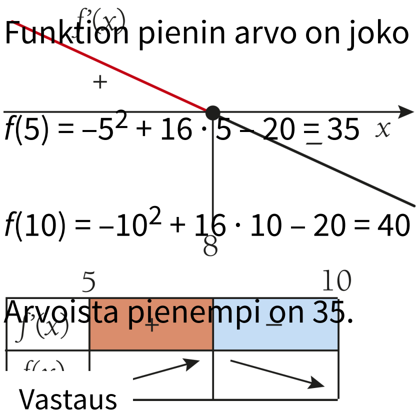
Arvoista suurin on 44 ja pienin 35.

Tapa 2

Laaditaan funktion $f(x)$ kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on laskeva suora.

Kulkukaavion perusteella funktion suurin arvo on derivaatan nollakohdassa $x = 8$.

$f(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 20 = 44$



Funktion pienin arvo on joko kohdassa $x = 5$ tai $x = 10$.

$f(5) = -5^2 + 16 \cdot 5 - 20 = 35$

$f(10) = -10^2 + 16 \cdot 10 - 20 = 40$

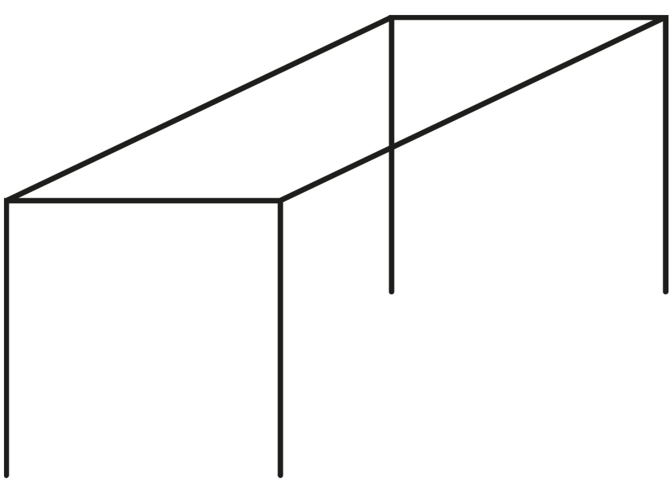
Arvoista pienempi on 35.

Vastaus

Funktion suurin arvo välillä $5 \leq x \leq 10$ on 44 ja pienin arvo 35.

Esimerkki 3

Alumiinilangasta valmistetaan elintarvikkeiden hyönteissuojan rungoksi kuvan mukainen kehikko, jonka päädyt ovat neliöitä. Alumiinilankaa on käytössä 2,2 m. Miten kehikon mitat pitää valita, jotta suojan tilavuus olisi mahdollisimman suuri?

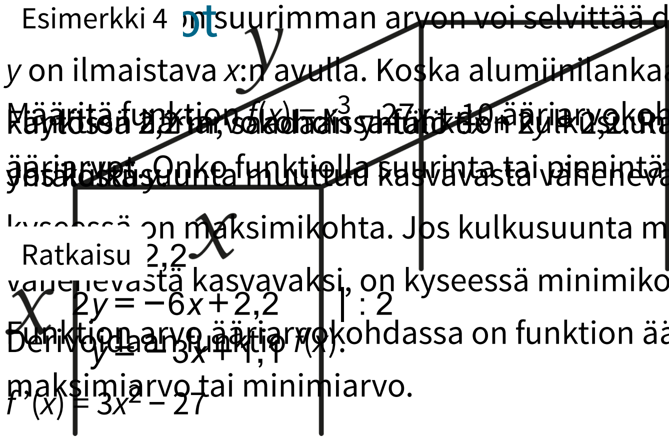


Ratkaisu

Merkitään kehikon päätyneliön sivun pituutta x:llä ja kehikon leveyttä y:llä. Kehikon tilavuus on

$V(x) = A_p \cdot h = x \cdot y \cdot x = x^2y$.

Esimerkki 4 …n suurimman arvon voi selvittää derivoimalla, kun y on ilmaistava x:n avulla. Koska alumiinilankaa on käytössä 2,2 m, saadaan yhtälö 6x + 2y = 2,2. Ratkaistaan…



Määritä funktion $f(x) = x^3 - 27x + 10$ ääriarvokohdat ja ääriarvot. Onko funktiolla suurinta tai pienintä arvoa?

Jos kulkusuunta muuttuu kasvavasta vähenevaksi, kyseessä on maksimikohta. Jos kulkusuunta muuttuu vähenevästä kasvavaksi, on kyseessä minimikohta.

Ratkaisu

$2y = -6x + 2{,}2 \quad | :2$

$y = -3x + 1{,}1$

Funktion arvo ääriarvokohdassa on funktion ääriarvo eli maksimiarvo tai minimiarvo.

Derivoidaan funktio $f(x)$.

$f'(x) = 3x^2 - 27$

Tilavuus on siis

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat laskentaohjelmalla.

$V(x) = x^2(-3x + 1{,}1) = -3x^3 + 1{,}1x^2$.

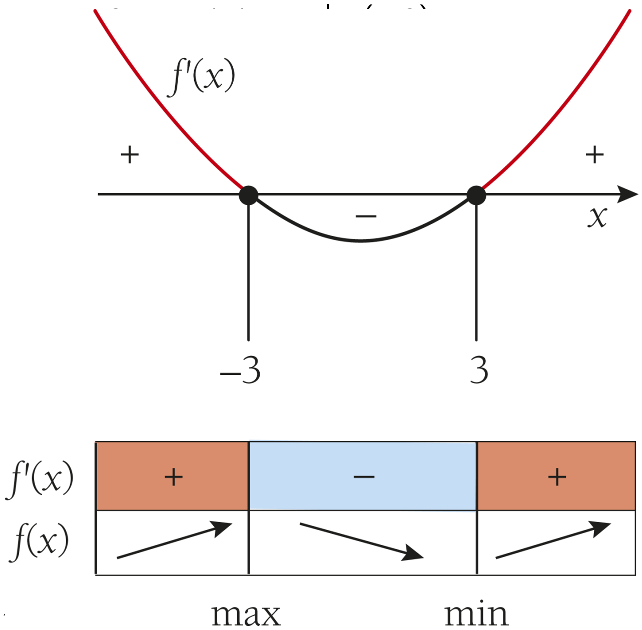
$3x^2 - 27 = 0$

Selvitetään, mitkä x:n arvot ovat tässä tilanteessa mahdollisia. Kumpikaan mitoista ei voi olla negatiivinen, joten x:n alaraja on $x = 0$ ja yläraja saadaan, kun $y = 0$.

$x = 3$ tai $x = -3$

Laaditaan funktion $f(x)$ kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$-3x + 1{,}1 = 0$



$^3 + 1{,}1x^2$

…hjelmalla.

Derivaatan nollakohdat ovat tutkittavalla välillä. $x = 0$ on samalla välin päätepiste.

Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimiarvo kohdassa $x = -3$, ja se on

$f(-3) = (-3)^3 - 27 \cdot (-3) + 10 = 64.$

Suurin arvo saadaan joko välillä olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin jommassakummassa päätepisteessä. Lasketaan arvot laskentaohjelmalla.

$V(0) = 0$

$V\left(\frac{11}{45}\right) = \frac{1\,331}{60\,750} = 0{,}2190...$

$V\left(\frac{11}{30}\right) = 0$

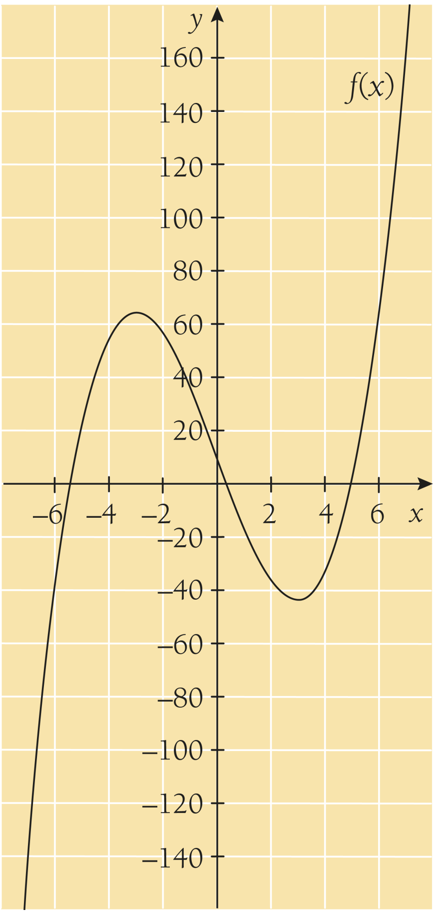
Funktiolla on minimiarvo kohdassa $x = 3$, ja se on

$f(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 + 10 = -44.$

Kehikon tilavuus on suurin, kun $x \approx 0{,}244$ (m). Leveys on tällöin $-3 \cdot 0{,}244 + 1{,}1 = 0{,}368$ (m).

Suurimman ja pienimmän arvon tutkimista varten piirretään laskentaohjelmalla funktion kuvaaja. Sen avulla voidaan myös tarkistaa saadut ääriarvokohdat ja ääriarvot.

eliön sivun pituus on 24 cm



Kuvaajan perusteella funktiolla ei ole suurinta tai pienintä arvoa. Esimerkiksi funktion arvo $f(7) = 164$ on suurempi kuin maksimiarvo 64 ja funktion arvo $f(-7) = -144$ pienempi kuin minimiarvo -44.

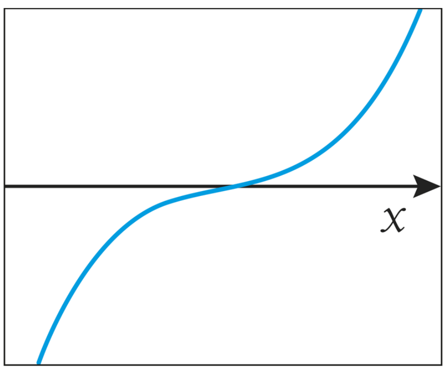
Vastaus

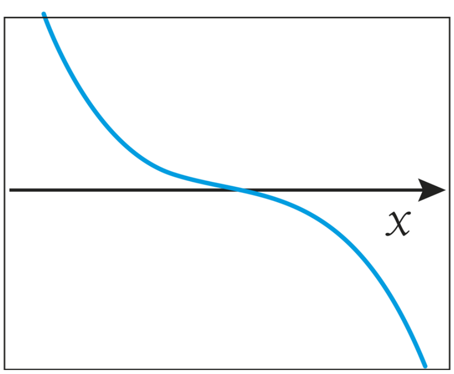
Ääriarvokohdat ovat maksimikohta $x = -3$, jossa maksimiarvo on $f(-3) = 64$, ja minimikohta $x = 3$, jossa minimiarvo on $f(3) = -44$. Funktiolla ei ole suurinta tai pienintä arvoa.

TEORIAYHTEENVETO

Funktion kasvaminen ja väheneminen

- Funktio on kasvava välillä, jolla sen kuvaaja nousee ylöspäin liikuttaessa vasemmalta oikealle.
- Funktio on vähenevä välillä, jolla sen kuvaaja laskee alaspäin liikuttaessa vasemmalta oikealle.





Funktion kasvamista ja vähenemistä voidaan tutkia derivaatan avulla:

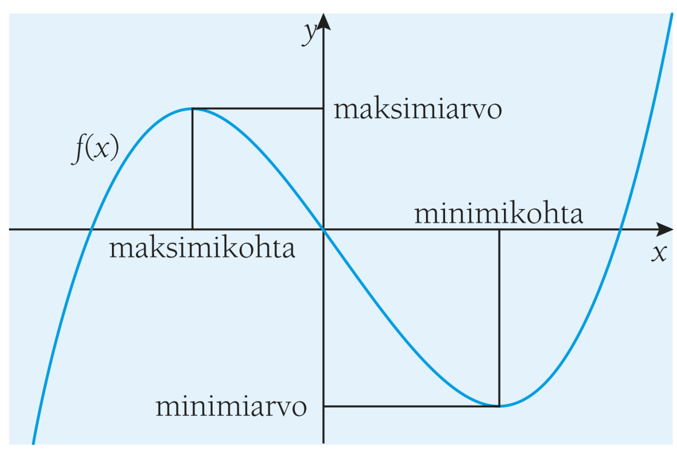
- Funktio $f(x)$ on kasvava sellaisella välillä, jossa derivaatta $f'(x) > 0$.
- Funktio $f(x)$ on vähenevä sellaisella

Funktion ääriarvot

Funktion ääriarvokohdissa funktion kulkusuunta muuttuu. Ääriarvokohta voi olla maksimikohta tai minimikohta.

- Maksimikohdassa funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi. Funktion arvoa tällaisessa kohdassa kutsutaan maksimiarvoksi.
- Minimikohdassa funktion muuttuu vähenevästä kasvavaksi. Funktion arvoa tällaisessa kohdassa kutsutaan minimiarvoksi.

Funktion maksimiarvo ei välttämättä ole funktion suurin arvo eikä minimiarvo välttämättä ole pienin arvo.



Lukuvälien merkitseminen

Lukuvälejä voidaan merkitä epäyhtälömerkkien tai hakasulkeiden välillä, jossa derivaatta $f'(x) < 0$.

Välillä saa olla yksittäisiä kohtia, joissa derivaatta on nolla. Tällaisia voivat olla esimerkiksi välin päätepisteet.

Funktion suurin ja pienin arvo

- Funktion suurin tai pienin arvo voidaan etsiä derivaatan ja kulkukaavion avulla.
- Tyyppiä $a \leq x \leq b$ olevalla suljetulla välillä funktion suurin ja pienin arvo on joko välillä olevassa derivaatan nollakohdassa tai jommassakummassa välin päätepisteessä. Tällöin kulkukaaviota ei välttämättä tarvita, vaan riittää laskea kaikki nämä arvot ja valita niistä suurin ja pienin.

avulla. Esimerkiksi väli $[1, 4]$ tarkoittaa väliä $1 \leq x \leq 4$ ja väli $]2, \infty[$ väliä $x > 2$.

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

• Funktion kulkukaavio voidaan piirtää joko koejärjestelmän kaavaeditorin taulukkotoiminnolla (*Array*), piirto-ohjelmalla tai laskentaohjelmalla. Koejärjestelmän kaavaeditoria käytettäessä derivaattafunktion kuvaaja voidaan hahmotella jollain muulla ohjelmalla tai kuvaajan muoto voidaan selittää sanoin.

• Geometriaohjelman ja muiden laskentaohjelmien piirtotiloissa on toiminto, joilla voidaan tarkistaa esimerkiksi lasketut suurimmat ja pienimmät arvot. Toiminnon nimi voi olla esimerkiksi *Ääriarvot (Turning Point)* tai *Maksimimipiste/Minimipiste (Maximum/Minimum)*. Nämä piirtotilan toiminnot antavat toisinaan vastaukset pyöristettyinä likiarvoina.

• Joidenkin laskentaohjelmien laskentatilassa on myös funktion suurimman ja pienimmän arvon suorat määritystoiminnot, jotka antavat vastaukset tarkkoina arvoina. Toiminnot voivat olla esimerkiksi *fMax* ja *fMin*. Ohjelmasta riippuen toiminnot antavat joko pelkän x:n arvon, jossa suurin tai pienin arvo saavutetaan tai x:n arvon lisäksi kysytyn suurimman tai pienimmän arvon.