Funktion merkki ja derivaatta

Funktion nollakohdat ja merkki

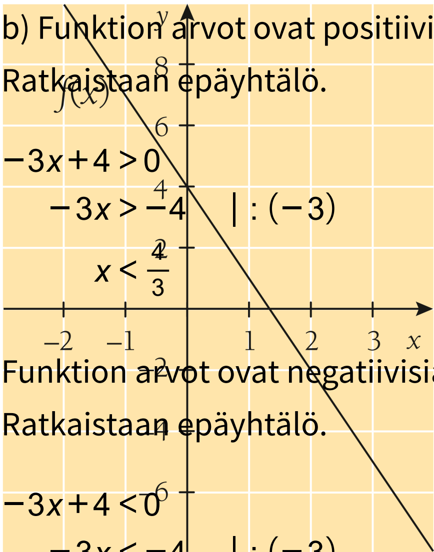
Polynomifunktion merkki voi vaihtua vain funktion nollakohdassa. Nollakohdassa kuvaaja leikkaa x-akselin. Funktion arvot ovat positiivisia niillä x:n arvoilla, joilla kuvaaja on x-akselin yläpuolella. Vastaavasti funktion arvot ovat negatiivisia niillä x:n arvoilla, joilla kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Esimerkki 1

Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = -3x + 4$ arvot ovat positiivisia ja millä negatiivisia? Selvitä se
a) kuvaajan avulla
b) laskennallisesti.

Ratkaisu

a) Kuvaajan perusteella funktion $f(x)$ arvot ovat positiivisia, kun $x < 1{,}3$ ja negatiivisia kun $x > 1{,}3$. Kuvasta rajakohtaa ei näe tämän tarkemmin.



b) Funktion arvot ovat positiivisia, kun $-3x + 4 > 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} -3x+4 &> 0 \\ -3x &> -4 \quad \mid :(-3) \\ x &< \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-3x + 4 < 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} -3x+4 &< 0 \\ -3x &< -4 \quad \mid :(-3) \\ x &> \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Laskennallisesti saatu vastaus on tarkka.

Vastaus

a) Arvot ovat positiivisia, kun $x < 1{,}3$ ja negatiivisia, kun $x > 1{,}3$.

b) Arvot ovat positiivisia, kun $x < \frac{4}{3}$ ja negatiivisia, kun $x > \frac{4}{3}$.

Esimerkki 2

Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 2x - 15$ arvot ovat positiivisia?

Ratkaisu

Tapa 1

Selvitetään funktion nollakohdat.

$x^2 + 2x - 15 = 0$

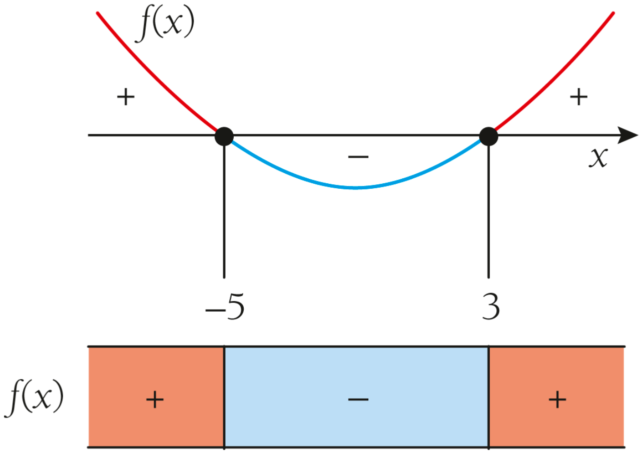
$a = 1$, $b = 2$ ja $c = -15$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$

$x = \frac{-2+8}{2} = 3$ tai $x = \frac{-2-8}{2} = -5$

Laaditaan merkkikaavio. Funktion $f(x)$ kuvaaja on paraabeli. Koska toisen asteen termin x^2 kerroin 1 on positiivinen, paraabeli aukeaa ylöspäin.



Merkkikaavion perusteella funktion arvot ovat positiivisia, kun

$x < -5$ tai $x > 3$.

Tapa 2

Ratkaistaan epäyhtälö $x^2 + 2x - 15 > 0$ laskentaohjelmalla.

$x < -5$ tai $x > 3$

Vastaus

Arvot ovat positiivisia, kun $x < -5$ tai $x > 3$.

Derivaatta

Funktion derivaatan arvon voi määrittää kuvaajasta tai laskemalla. Derivaatan arvo on kuvaajan tangentin kulmakerroin. Funktion $f(x)$ derivaatta merkitään $f'(x)$.

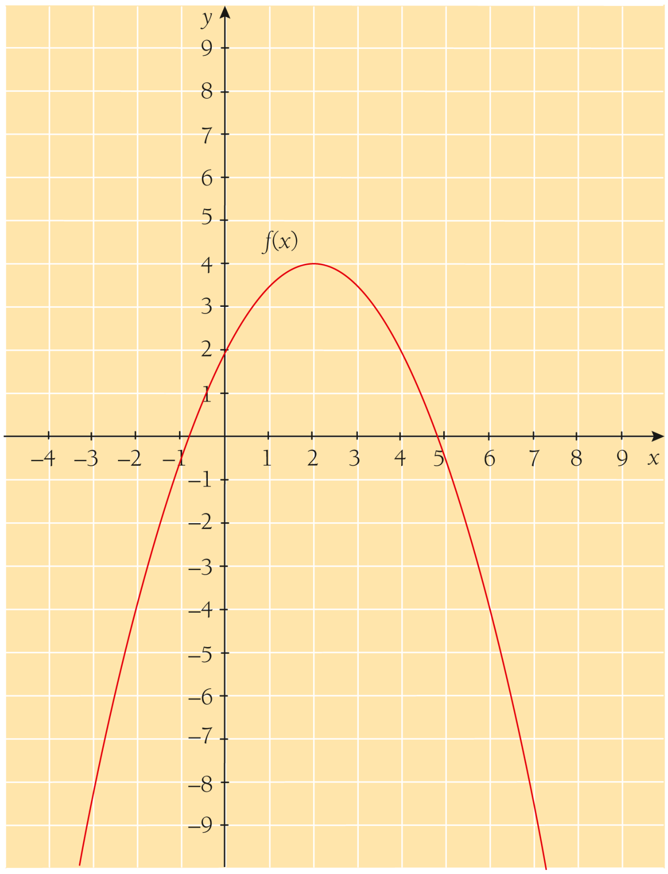
Esimerkki 3

Määritä kuvaajasta

a) $f(1)$ ja $f'(4)$

b) funktion $f(x)$ nollakohdat

c) funktion $f(x)$ derivaatan nollakohdat.



Ratkaisu

a) Merkintä $f(1)$ tarkoittaa funktion arvoa kohdassa $x = 1$.

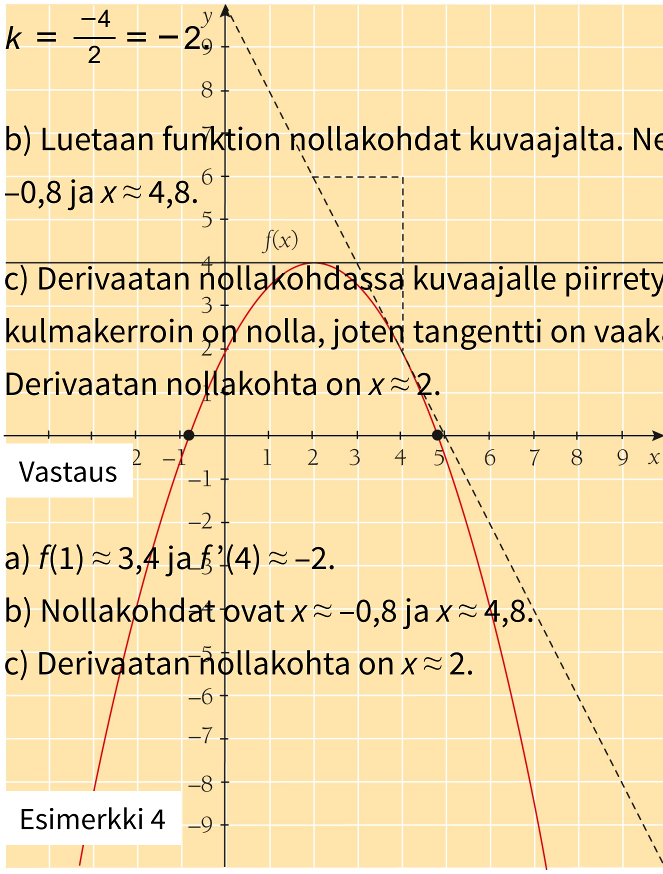
$f(1) \approx 3{,}4$

Merkintä $f'(4)$ tarkoittaa funktion derivaattaa kohdassa $x =$ 4.

Funktion derivaatta on kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentti on suora, joka sivuaa kuvaajaa tutkittavassa kohdassa. Piirretään tangentti.

Lasketaan tangentin kulmakerroin apukolmion avulla.

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 4$ on



$k = \frac{-4}{2} = -2.$

b) Luetaan funktion nollakohdat kuvaajalta. Ne ovat $x \approx -0{,}8$ ja $x \approx 4{,}8$.

c) Derivaatan nollakohdassa kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla, joten tangentti on vaakasuora. Derivaatan nollakohta on $x \approx 2$.

Vastaus

a) $f(1) \approx 3{,}4$ ja $f'(4) \approx -2$.
b) Nollakohdat ovat $x \approx -0{,}8$ ja $x \approx 4{,}8$.
c) Derivaatan nollakohta on $x \approx 2$.

Esimerkki 4

a) Derivoi $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 7x + 10$.

b) Määritä funktion $g(x) = -3x^3 + x^2 + 5x - 4$ kuvaajalle kohtaan $x = -2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Ratkaisu

a) Derivoidaan termi kerrallaan derivointisääntöjä käyttämällä.

$D c = 0$, kun c on vakio
$D x = 1$
$D x^n = nx^{n-1}$

$f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} + \frac{1}{3} \cdot 2x^{2-1} - 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + \frac{2}{3}x - 7$

b) Funktion kuvaajalle kohtaan $x = -2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo kohdassa $x = -2$. Derivoidaan funktio.

$g'(x) = -3 \cdot 3x^{3-1} + 2x^{2-1} + 5 \cdot 1 - 0 = -9x^2 + 2x + 5$

Lasketaan $g'(-2)$.

$g'(-2) = -9 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 5 = -35$

Vastaus

a) $f'(x) = 6x^2 + \frac{2}{3}x - 7$

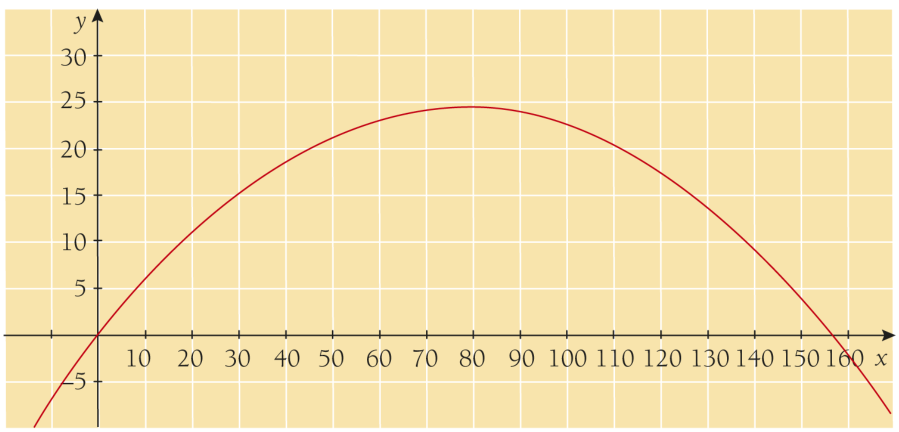
b) Tangentin kulmakerroin on –35.

Esimerkki 5

Anu pelaa mielellään golfia. Avauslyönnissä golfpallon lentorata on likimain x-akselin yläpuolella oleva osa paraabelista $y = -0{,}004x^2 + 0{,}625x$. Koordinaatiston yksikkö on metri.

a) Kuinka korkealla pallo käy lyönnin aikana?

b) Missä kulmassa maan pintaan nähden lyönti lähtee?



Ratkaisu

a) Pallo on korkeimmillaan paraabelin huipun kohdalla. Siinä paraabelille piirretty tangentti on vaakasuora, jolloin funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x)$ saa arvon 0.

Derivoidaan funktio $f(x)$.

$f'(x) = -0{,}004 \cdot 2x + 0{,}625 \cdot 1 = -0{,}008x + 0{,}625$

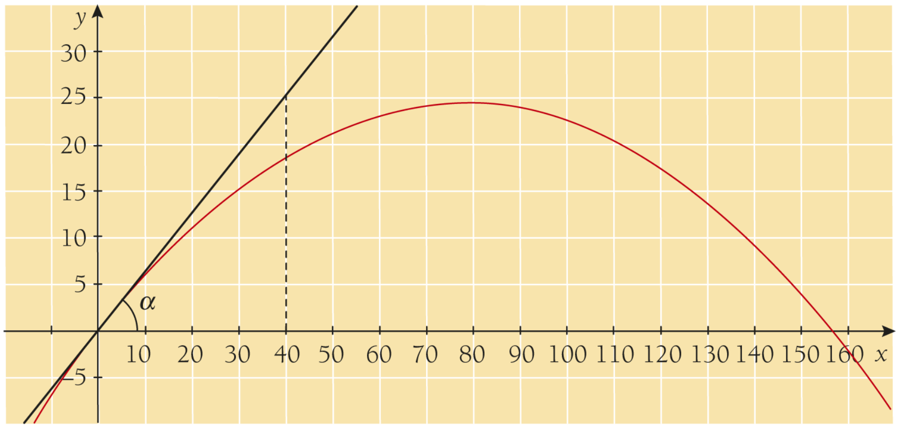
Ratkaistaan laskentaohjelmalla yhtälö $f'(x) = 0$.

$$-0{,}008x + 0{,}625 = 0$$
$$x = 78{,}125$$

Pallon korkeus on huipun y-koordinaatti.

$y = f(78{,}125) = -0{,}004 \cdot 78{,}125^2 + 0{,}625 \cdot 78{,}125 =$
$24{,}414\ldots \approx 24$ (m)

b) Golflyönnin lähtöpaikka on origo. Golfpallon lyöntikulma on lähtökohtaan piirretyn tangentin ja *x*-akselin välinen kulma.



Lähtökulma α saadaan tangentille piirretyn suorakulmaisen apukolmion avulla. Sen kateettien pituuksien suhde on tangentin kulmakerroin eli funktion $f(x) = -0{,}004x^2 + 0{,}625x$ derivaatta kohdassa $x = 0$.

$f'(0) = -0{,}008 \cdot 0 + 0{,}625 = 0{,}625$

Lasketaan lähtökulma α suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\tan \alpha = 0{,}625$$
$$\alpha = 32{,}00...° \approx 32°$$

Kulmakerroin on suhde $\dfrac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$ eli $\tan \alpha$.

Vastaus

a) Pallo käy 24 metrin korkeudella.
b) Lyönti lähtee 32 asteen kulmassa.

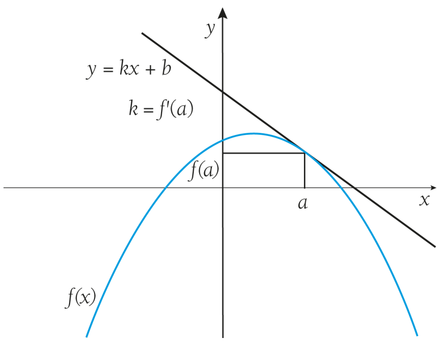
TEORIAYHTEENVETO

Funktion merkin tutkiminen

- Funktion arvojen positiivisuutta ja negatiivisuutta voi tutkia joko laskemalla funktion nollakohdat, hahmottelemalla kuvaajan ja laatimalla merkkikaavion tai ratkaisemalla laskentaohjelmalla vastaavan epäyhtälön.

Derivaatta

- Funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa $x = a$ on funktion kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Derivaatta ilmaisee funktion arvojen muutosnopeuden ja sitä merkitään $f'(a)$.



Avaa appletti →

- Funktion derivaatan arvoja voi määrittää ilman kuvaajaa derivaattafunktion avulla. Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan derivoimiseksi. Se suoritetaan käyttämällä derivoimissääntöjä.

Derivoimissäännöt

- $Dc = 0$, kun c on vakio
- $Dx = 1$
- $Dx^n = nx^{n-1}$
- Polynomi derivoidaan termi kerrallaan. Kussakin termissä vakiokertoimen saa siirtää suoraan derivaatan lausekkeeseen.

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

• Kokeen B-osassa epäyhtälö ratkaistaan samalla toiminnolla kuin yhtälö. Toiminto on *Ratkaise* (*Solve*).

• Derivaattafunktio voidaan määrittää laskentaohjelmalla. Esimerkiksi funktion $f(x) = x^3 + 4x^2$ derivaattafunktio määritetään ohjelmasta riippuen esimerkiksi toiminnolla *Derivaatta*($x^3 + 4x^2$, x), *Diff*($x^3 + 4x^2$) tai $\frac{d}{dx}(x^3 + 4x^2)$.

• Geometriaohjelmassa on toiminto, jolla voidaan piirtää funktion kuvaajalle tangentti merkittyyn pisteeseen. Tangentin kulmakerroin voidaan tällöin tarkistaa joko ohjelman antamasta suoran yhtälöstä tai erillisellä kulmakertoimen määritystoiminnolla.