Todennäköisyys ja lukumäärät

Todennäköisyys

Tapahtumien todennäköisyyksiä voidaan laskea suoraan alkeistapausten lukumäärien avulla tai käyttämällä todennäköisyyksien laskusääntöjä.

Esimerkki 1

Backgammon-pelissä heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä Ahmed saa ensimmäisellä heittovuorolla
a) parin eli molemmilla nopilla saman silmäluvun
b) ainakin toisella nopalla silmäluvun 6?

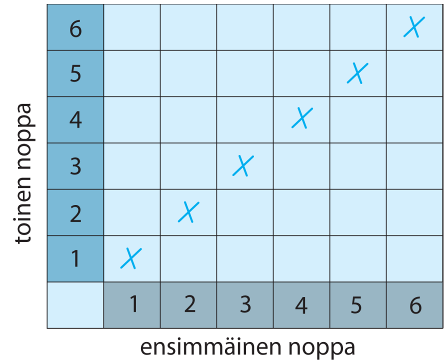
Ratkaisu

Havainnollistetaan kahden nopan heiton alkeistapauksia ruudukolla. Alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$.

a) Merkitään ruudukkoon ne silmälukuparit, joissa kummankin nopan silmäluvut ovat samat.

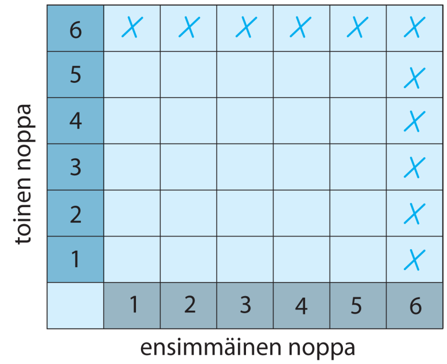
Suotuisia alkeistapauksia on kuusi. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{pari}) = \frac{6}{36} = 0{,}1666\ldots \approx 0{,}17$



b) Merkitään ruudukkoon ne silmälukuparit, joissa ainakin toisella nopalla saadaan silmäluku 6.

Suotuisia alkeistapauksia on 11. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.



$P(\text{ainakin toisella nopalla kuutonen}) = \frac{11}{36} = 0{,}3055\ldots \approx 0{,}31$

Vastaus

Todennäköisyys on a) 0,17, b) 0,31.

Esimerkki 2

Korttipakasta nostetaan kolme korttia. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi korteista on hertta, kun
a) nostettua korttia ei palauteta pakkaan
b) nostettu kortti palautetaan pakkaan ja pakka sekoitetaan ennen seuraavaa nostoa?

Ratkaisu

Korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on herttoja. Tapahtuma ”ainakin yksi hertta” toteutuu, kun nostetuista korteista 1, 2 tai 3 on herttoja. Tämän todennäköisyys on helpointa laskea vastatapahtuman ”ei yhtään herttaa” avulla.

a) Kun nostettua korttia ei palauteta pakkaan, todennäköisyys muun kuin hertan nostamiseen on eri jokaisella nostolla. Kortteja, jotka eivät ole herttoja, on pakassa aluksi 52 – 13 = 39.

Todennäköisyys, että mikään kolmesta kortista ei ole hertta, lasketaan kertolaskusäännöllä.

$P(\text{ei yhtään herttaa}) = \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50} = 0{,}413529\ldots \approx 0{,}4135$

Todennäköisyys, että saadaan ainakin yksi hertta, lasketaan vastatapahtuman avulla.

$P(\text{ainakin yksi hertta}) =$
$1 - 0{,}4135 = 0{,}5865 \approx 0{,}59$

$P(\text{tapahtuma}) =$
$1 - P(\text{vastatapahtuma})$

b) Todennäköisyys, että nostettu kortti ei ole hertta, on sama jokaisella nostolla.

$P(\text{ei yhtään herttaa}) = \frac{39}{52} \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{39}{52} = \left(\frac{39}{52}\right)^3 = 0{,}421875$

Todennäköisyys, että saadaan ainakin yksi hertta, lasketaan vastatapahtuman avulla.

$P(\text{ainakin yksi hertta}) = 1 - 0{,}421875 = 0{,}578125 \approx 0{,}58$

Vastaus

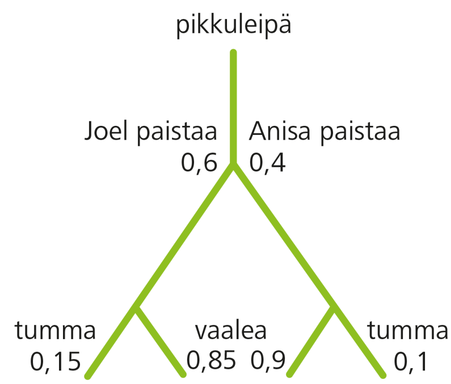
Todennäköisyys on a) 0,59, b) 0,58.

Esimerkki 3

Joel ja Anisa leipovat yhdessä suuren määrän pikkuleipiä juhliinsa. Joel paistaa 60 % pikkuleivistä, ja niistä 15 % paistuu tavallista tummemmiksi. Anisan pikkuleivistä 10 % paistuu tummiksi.
a) Millä todennäköisyydellä juhlavieras saa Anisan paistaman tumman pikkuleivän?
b) Millä todennäköisyydellä juhlavieraan pikkuleipä ei ole tavallista tummempi?

Ratkaisu

Käytetään apuna puumallia, johon kirjataan tehtävänannon mukaiset todennäköisyydet.



a) Puumallin mukaan Anisan paistaman tumman pikkuleivän todennäköisyys on

P(Anisan tumma pikkuleipä) = 0,4 · 0,1 = 0,04.

b) Vaaleaan pikkuleipään johtaa puumallissa kaksi eri reittiä. Todennäköisyys, että pikkuleipä ei ole tumma, saadaan käyttämällä yhteenlaskusääntöä.

P(pikkuleipä ei ole tumma) =
P(Joelin vaalea pikkuleipä) + P(Anisan vaalea pikkuleipä) =
0,6 · 0,85 + 0,4 · 0,9 = 0,87

Vastaus

Todennäköisyys on a) 0,04, b) 0,87.

Lukumäärien laskeminen

Suuremmasta joukosta voidaan valita pienempi joukko joko jonona tai ryhmänä. Jonon jäsenet ovat järjestyksessä, kun taas ryhmän jäsenten järjestyksellä ei ole väliä. Ero on tärkeä, kun lasketaan jonoihin ja ryhmiin liittyviä lukumääriä.

Esimerkki 4

Kuinka monella tavalla 18 opiskelijasta voidaan muodostaa
a) neljän hengen jono
b) neljän hengen ryhmä
c) jono, jossa ovat kaikki opiskelijat?

Ratkaisu

a) Jonon ensimmäinen opiskelija voidaan valita 18:sta opiskelijasta, toinen 17:sta, kolmas 16:sta ja neljäs 15:sta opiskelijasta. Erilaisia neljän hengen jonoja on

$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73\,440$ kappaletta.

b) Mahdollisuuksia valita 18 opiskelijasta neljän hengen ryhmä

on $\binom{18}{4} = 3\,060$.

c) Mahdollisuuksia asettaa kaikki opiskelijat jonoon on $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Lasku voidaan lyhentää kertoma-merkinnän avulla.

$18! = 6{,}402\ldots \cdot 10^{15} \approx 6{,}4 \cdot 10^{15}$

Vastaus

Tapoja on a) 73 440, b) 3 060, c) 6,4 · 1015.

Esimerkki 5

Viking Lotossa on 48 numeroa, joista arvotaan kuuden numeron lottorivi. Millä todennäköisyydellä rivissä on
a) kaikki oikein
b) neljä numeroa oikein?
Pelissä esiintyvää viking- ja plusnumeroa ei oteta huomioon.

Ratkaisu

a) *Tapa 1*
Selvitetään erilaisten lottorivien määrä. Se saadaan laskemalla, kuinka monella tavalla 48 numerosta voidaan valita kuusi eri numeroa.

$$\binom{48}{6} = 12\,271\,512$$

Rivejä, joissa on kaikki oikein, on vain yksi. Todennäköisyys on

$$P(\text{kaikki oikein}) = \frac{1}{12\,271\,512} = 8{,}148\ldots \cdot 10^{-8} \approx 8{,}1 \cdot 10^{-8}.$$

Tapa 2

Käytetään kertolaskusääntöä.

P(kaikki oikein) =

$$\frac{6}{48} \cdot \frac{5}{47} \cdot \frac{4}{46} \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44} \cdot \frac{1}{43} \cdot = 8{,}148\ldots \cdot 10^{-8} \approx 8{,}1 \cdot 10^{-8}$$

b) Kun rivissä on tasan neljä oikeaa numeroa, siinä on kaksi numeroa väärin. Todennäköisyys kannattaa laskea lottorivien lukumäärän avulla. Silloin ei tarvitse ottaa huomioon eri järjestyksiä, joissa oikeat ja väärät numerot voidaan saada.

Kuudesta oikeasta numerosta voidaan valita rivin neljä oikeaa numeroa $\binom{6}{4}$ eri tavalla.

Koska vääriä numeroita on yhteensä 48 – 6 = 42, rivin kaksi väärää numeroa voidaan valita $\binom{42}{2}$ eri tavalla.

Rivejä, joissa on neljä oikeaa ja kaksi väärää numeroa, on yhteensä

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{42}{2} = 15 \cdot 861 = 12\,915.$$

Todennäköisyys, että Viking Loton rivissä on neljä oikein, on

$$P(\text{neljä oikein}) = \frac{12\,915}{12\,271\,512} = 0{,}001052\ldots \approx 0{,}0011.$$

Vastaus

Todennäköisyys on a) $8{,}1 \cdot 10^{-8}$, b) 0,0011.

TEORIAYHTEENVETO

$$P(\text{tapahtuma}) = \frac{\text{suotuisien alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}$$

Alkeistapauksia voi myös kuvata jokin geometrinen mitta, kuten janan pituus tai kuvion pinta-ala. Tilastoaineistosta todennäköisyyksiä lasketaan samalla tavalla kuin prosenttiosuuksia.

Todennäköisyyden laskusääntöjä

- Kertolaskusääntö: $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$
- Yhteenlaskusääntö: $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$, kun A ja B eivät voi tapahtua yhtä aikaa
- Todennäköisyys vastatapahtuman avulla:
  $P(\text{tapahtuma}) = 1 - P(\text{vastatapahtuma})$

Lukumäärien laskeminen

- Tuloperiaate: Kun kokonaisuus valitaan n vaiheessa, se voidaan valita $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ eri tavalla, missä $k_1, k_2, \ldots$ ja k_n ovat vaihtoehtojen määrät eri vaiheissa.
- Jonojen lukumäärä: Joukko, jossa on n jäsentä, voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla.
- Ryhmien lukumäärä: Joukosta, jossa on n jäsentä, voidaan valita k jäsenen ryhmä $\binom{n}{k}$ eri tavalla.

Avaa appletti →

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

• A-osan peruslaskimessa kertoma saadaan näppäimellä *x*! ja ryhmien lukumäärä $\binom{n}{k}$ näppäimellä *nCm*.

• B-osan laskentaohjelmissa kertoman huutomerkki syötetään yleensä suoraan näppäimistöltä. Ryhmien lukumäärä voidaan laskea esimerkiksi toiminnolla *Binomikerroin (Binomial coefficient)*, *nCr* tai *Kombinaatio (Combin)*.