6 Avaruusgeometria

Tilavuuden yksikönmuunnokset

Tilavuuden yksikkönä käytetään joko kuutiomittoja tai vetomittoja. Peräkkäisten kuutiomittojen, kuten m^3 ja dm^3, suhdeluku on 1 000. Peräkkäisten vetomittojen, kuten litra ja desilitra, suhdeluku on 10. Yksi litra ja yksi kuutiodesimetri ovat yhtä suuret yksiköt.

Esimerkki 1

Muunna yksiköksi, joka on annettu sulkeissa.

a) 6,2 m^3 (dm^3)

b) 4 700 000 mm^3 (l)

Ratkaisu

a) $6{,}2\ \text{m}^3 = 6{,}2 \cdot 1\,000\ \text{dm}^3 = 6\,200\ \text{dm}^3$

b) Muunnetaan kuutiomillimetrit ensin kuutiodesimetreiksi.
Tämän jälkeen tehdään muunnos litroiksi.

$$4\,700\,000\ \text{mm}^3 = \frac{4\,700\,000}{1\,000}\ \text{cm}^3 = 4\,700\ \text{cm}^3$$

$$4\,700\ \text{cm}^3 = \frac{4\,700}{1\,000}\ \text{dm}^3 = 4{,}7\ \text{dm}^3$$

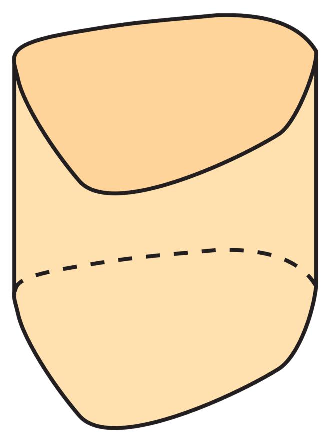
$4{,}7\ \text{dm}^3 = 4{,}7\ \text{l}$

Vastaus

a) $6\,200\ \text{dm}^3$
b) 4,7 l

Lieriö

Lieriö on tasapaksu kappale, jolla on kaksi samanlaista yhdensuuntaista pohjaa. Lieriön vaippa on pohjien välinen pinta.



Esimerkki 2

Yritys valmistaa hyppynaruja. Hyppynarun poikkileikkaus on ympyrä, jonka halkaisija on 4 mm. Kuinka monta 5,0 metrin pituista narua saadaan 8,0 litrasta muovia?

Ratkaisu

Lasketaan yhden hyppynarun tilavuus. Hyppynaru on suora ympyrälieriö, jonka pohjan säde on $r = \frac{4}{2} = 2$ (mm).

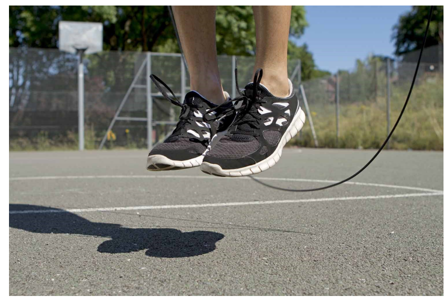
Muunnetaan yksiköt senttimetreiksi.

5 m = 500 cm
2 mm = 0,2 cm

Lieriön tilavuus on

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 500 = 62{,}8318\ldots \approx 62{,}83$ (cm^3).

$V = A_p \cdot h$



Muovia on käytettävissä
8,0 l = 8,0 dm^3 = 8 000 cm^3.

Hyppynaruja saadaan
$\frac{8\,000}{62{,}83} = 127{,}32\ldots \approx 130$ kappaletta.

Vastaus

8,0 l muovia riittää noin 130 hyppynarun valmistamiseen.

Esimerkki 3

Kuinka paljon teräslevyä tarvitaan pesukoneen rumpuun, kun rummun syvyys on 360 mm ja rummun tilavuus 42 litraa?

Ratkaisu

Pesukoneen rumpu on suora ympyrälieriö. Koneen syvyys 360 mm on lieriön korkeus h.

Rummun tilavuuden avulla voidaan laskea rummun säde. Muutetaan yksiköt toisiaan vastaaviksi.

42 l = 42 dm^3 = 42 000 cm^3
360 mm = 36 cm

Muodostetaan yhtälö lieriön tilavuuden avulla, ja ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

$\pi r^2 \cdot 36 = 42\,000$

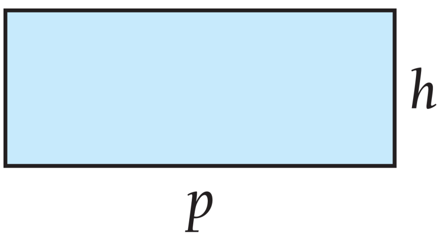
$r = 19{,}2707\ldots \approx 19{,}27$ (cm)

tai

$r = -19{,}2707\ldots \approx -19{,}27$ (cm)

Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi.

Rummun vaippa on tasoon levitettynä suorakulmio, jonka korkeus on lieriön korkeus ja kanta lieriön pohjaympyrän kehän pituus.



Pohjaympyrän kehän pituus on
$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 19{,}27$ (cm).

Vaipan ala on

$A_v = ph = 2\pi \cdot 19{,}27 \cdot 36 = 4\,358{,}7713\ldots \approx 4\,358{,}77$ (cm^2).

Pohjaympyrän ala on

$A_p = \pi r^2 = \pi \cdot 19{,}27^2 = 1\,166{,}5767\ldots \approx 1\,166{,}58$ (cm^2).

Teräslevyä tarvitaan

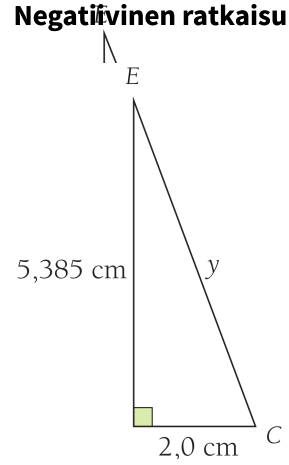
$A = A_v + 2A_p = 4\,358{,}77 + 2 \cdot 1\,166{,}58 = 6\,691{,}93 \approx 6\,700$ (cm^2).

$6\,700$ cm$^2 = 67$ dm^2

Vastaus

Teräslevyä tarvitaan 67 dm^2.

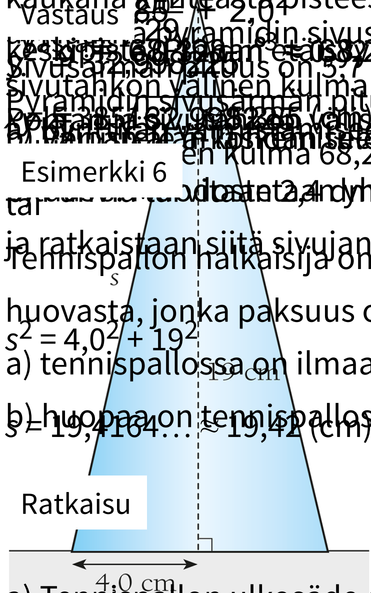
Negatiivinen ratkaisu ei käy.



Pallo

Vastaus

Esimerkki 6



ja ratkaistaan siitä sivujanan s pituus laskentaohjelmalla.

$s^2 = 4{,}0^2 + 19^2$

$s = 19{,}4164\ldots \approx 19{,}42$ (cm)

Tennispallon halkaisija on 7,0 cm. Pallo on valmistettu huovasta, jonka paksuus on 3 mm. Kuinka paljon

a) tennispallossa on ilmaa

b) huopaa on tennispallossa?

Ratkaisu

a) Tennispallon ulkosäde on $\frac{7{,}0}{2} = 3{,}5$ (cm).

Sisäsäde on $r = 3{,}5 - 0{,}3 = 3{,}2$ (cm).

Lasketaan pallon sisätilavuus.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3{,}2^3}{3} = 137{,}258\ldots \approx 140 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$140 \text{ cm}^3 = 140 \text{ ml} = 1{,}4 \text{ dl}$

b) Lasketaan tennispallon pinta-ala.

$A = 4 \cdot \pi \cdot 3{,}5^2 = 153{,}938\ldots \approx 150 \text{ (cm}^2\text{)}$

$A = 4\pi r^2$

$150 \text{ cm}^2 = 1{,}5 \text{ dm}^2$

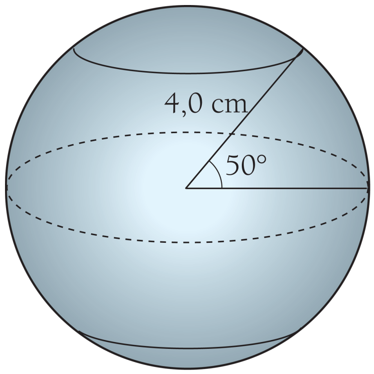
Vastaus

a) Ilmaa on 1,4 dl.

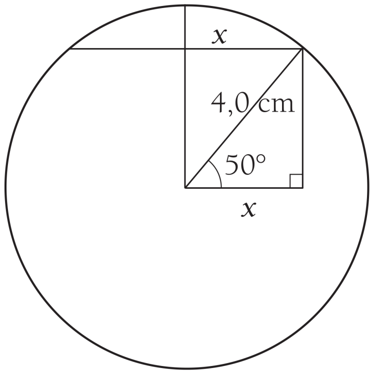
b) Huopaa tarvitaan 1,5 dm^2.

Esimerkki 7

Petankkipalloon, jonka halkaisija on 8,0 cm, on kaiverrettu urat kuvan mukaisesti. Kuinka pitkiä urat ovat?



Ratkaisu



Piirretään pallosta poikkileikkauskuva.
Ura on ympyrä, jonka säde x voidaan laskea poikkileikkauskuvaan piirretystä suorakulmaisesta kolmiosta.

$\cos 50° = \frac{x}{4{,}0}$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

$x = 2{,}57115\ldots \approx 2{,}571$ (cm)

Uran pituus on

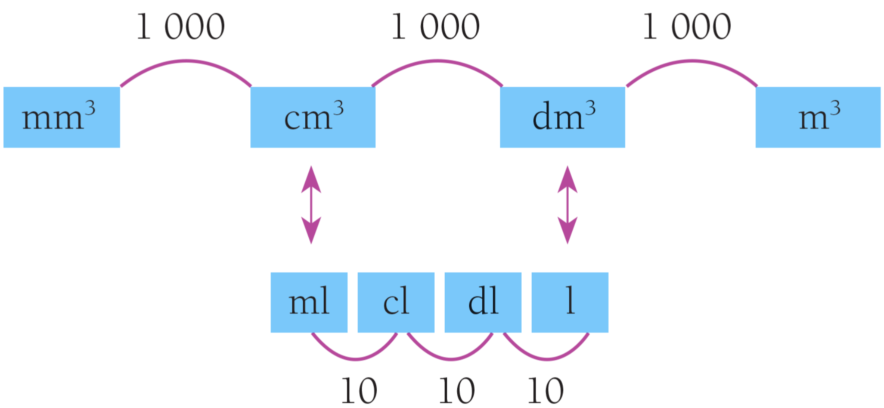
$p = 2\pi \cdot 2{,}571 = 16{,}15\ldots \approx 16$ (cm).

Vastaus

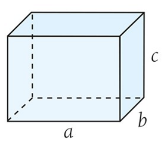
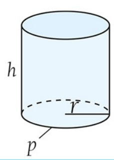
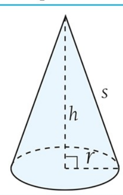
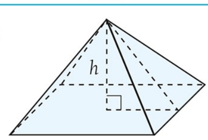
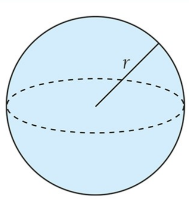
Uran pituus on 16 cm.

TEORIAYHTEENVETO

Tilavuuden yksiköt



Avaruusgeometrian kappaleisiin liittyviä pinta-aloja ja tilavuuksia

Kappale	Pinta-ala	Tilavuus
Suorakulmainen särmiö 	$A = 2ab + 2ac + 2bc$	$V = abc$
Suora lieriö 	$A_v = ph$ $A_{kok} = A_v + 2A_p$ Jos pohja on ympyrä, $A_p = \pi r^2$.	$V = A_p \cdot h$
Suora ympyräkartio 	$A_v = \pi rs$ $A_p = \pi r^2$ $A_{kok} = A_v + A_p = \pi rs + \pi r^2$	$V = \frac{A_p \cdot h}{3}$
Säännöllinen pyramidi 	$A_{kok} = A_v + A_p$	$V = \frac{A_p \cdot h}{3}$
Pallo 	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Taulukkokirjassa kartion tilavuuden kaava on muodossa $V = \frac{1}{3}Ah$ ja pallon tilavuuden kaava muodossa $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

• Kokeen A-osassa kappaleiden mallikuvat piirretään jollain piirto-ohjelmalla. Esimerkiksi toimisto-ohjelman piirto-ohjelmassa (*Draw*) on yksinkertaiset valmiit kuvat monille peruskappaleille. Kokeen B-osassa mallikuvia voidaan piirtää myös geometriaohjelman 3D-grafiikkatilassa.

• Geometriaohjelmalla piirretystä kuvasta voidaan tarkistaa kappaleen tilavuus, jos kuva on piirretty oikean kokoisena.

• Kuvasta saa usein selkeämmän näköisen, kun näkymästä piilottaa akselit ja tason. Jos kappaleen pohja on monikulmio, pohja kannattaa piirtää tavallisen *xy*-koordinaatiston piirtoalueeseen ja sen jälkeen käyttää toimintoa *Laajenna särmiöksi tai lieriöksi* tai *Laajenna pyramidiksi tai kartioksi*.

• Geometriaohjelmalla kappaleisiin voidaan piirtää tarvittavia lisäjanoja, kuten korkeusjana, ja tarkistaa niiden pituuksia. Ohjelmalla voidaan myös mitata kappaleen kulmien suuruuksia.

• Geometriaohjelman 3D-grafiikkatilassa näkymää voidaan kiertää, jolloin kappaletta voidaan tarkastella eri suunnista. Kappaleista, joiden pinta muodostuu monikulmioista, voidaan tehdä tasolevitys. Tasolevityksen avulla voidaan tarkistaa esimerkiksi kappaleen vaipan pinta-ala.

• Kappaleen mittojen, kuten tilavuuden, määrittäminen pelkästään geometriaohjelman avulla ei ole riittävä tehtävän ratkaisuksi vaan vastaus pitää perustella laskuilla. Jos tehtävässä erityisesti pyydetään ratkaisua ohjelman avulla, silloin pelkkä ohjelman antama vastaus riittää.