Lukujonoja ja summia

Lukujono

Lukujonon jäsenet eli termit määräytyvät jonkin säännön mukaan. Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on sama. Geometrisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde on sama.

Esimerkki 1

Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 4$ ja $a_2 = 6$.
Mikä on jonon yhdeksäs jäsen, jos jono on
a) aritmeettinen
b) geometrinen?

Ratkaisu

a) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$d = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$

Lasketaan aritmeettisen jonon 9. jäsen a_9.

$a_9 = a_1 + (9 - 1) \cdot d = 4 + (9 - 1) \cdot 2 = 20$

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhde.

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{4} = 1,5$

Lasketaan geometrisen jonon 9. jäsen a_9.

$a_9 = a_1 \cdot q^{9-1} = 4 \cdot 1,5^{9-1} = 4 \cdot 1,5^8 =$
$102,515625$

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Vastaus

Jonon 9. jäsen on
a) 20
b) 102,515625.

Esimerkki 2

Tutkitaan aritmeettista lukujonoa 51, 44, 37, …
a) Onko luku –63 jonon jäsen?
b) Kuinka moni jonon jäsenistä on suurempi kuin –300?

Ratkaisu

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 51$ ja peräkkäisten jäsenten erotus on
$d = 44 - 51 = -7$.

Määritetään jonon yleinen jäsen.

$a_n = 51 + (n - 1) \cdot (-7) = 51 - 7n + 7 = 58 - 7n$

Selvitetään, millä n:n arvolla $58 - 7n = -63$. Jos yhtälön ratkaisu on positiivinen kokonaisluku, luku –63 on jonon jäsen.

$$\begin{aligned} 58 - 7n &= -63 \\ -7n &= -121 \quad | : (-7) \\ n &= \frac{-121}{-7} = 17\tfrac{2}{7} \end{aligned}$$

Koska $17\frac{2}{7}$ ei ole kokonaisluku, luku –63 ei ole jonon jäsen.

b) Ratkaistaan, millä *n*:n arvolla 58 – 7*n* = –300.

$$
\begin{aligned}
58 - 7n &= -300 \\
-7n &= -358 \qquad | : (-7) \\
n &= \frac{-358}{-7} = 51\frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Jonon jäsenet pienenevät koko ajan. Viimeinen lukua –300 suurempi jäsen on a_{51}.

Vastaus

a) Luku –63 ei ole jonon jäsen.
b) Jonon 51 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin luku –300.

Esimerkki 3

Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$ ja kuudes jäsen $a_6 = 972$. Määritä jonon kolmas jäsen a_3.

Ratkaisu

Muodostetaan geometrisen lukujonon yleisen jäsenen kaavan avulla yhtälö, josta ratkaistaan lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde q.

$$
\begin{aligned}
a_6 &= a_1 \cdot q^{6-1} \\
4 \cdot q^5 &= 972 \qquad | : 4 \\
q^5 &= 243 \\
q &= \sqrt[5]{243} \\
q &= 3
\end{aligned}
$$

Lasketaan jonon kolmas jäsen a_3.

$a_3 = 4 \cdot 3^{3-1} = 4 \cdot 3^2 = 36$

Vastaus

Jonon kolmas jäsen on $a_3 = 36$.

Esimerkki 4

Lukujonon sääntö on $a_1 = 5$ ja $a_n = 6a_{n-1} + n$, kun $n \geq 2$.
Määritä lukujonon neljäs jäsen a_4.

Ratkaisu

Lukujonon sääntö on annettu rekursiokaavana. Kaava ilmaisee, millä tavalla lukujonon seuraava jäsen voidaan laskea, kun edellinen jäsen tunnetaan. Neljännen jäsenen selvittämistä varten on siksi laskettava ensin lukujonon toinen ja kolmas jäsen.

$a_2 = 6a_1 + 2 = 6 \cdot 5 + 2 = 32$

$a_3 = 6a_2 + 3 = 6 \cdot 32 + 3 = 195$

$a_4 = 6a_3 + 4 = 6 \cdot 195 + 4 = 1\,174$

Vastaus

Lukujonon neljäs jäsen on $a_4 = 1\,174$.

Aritmeettinen ja geometrinen summa

Sekä aritmeettisen että geometrisen lukujonon peräkkäisistä jäsenistä muodostettujen summien laskemiseen on omat laskukaavansa. Kaavat helpottavat pitkien summien laskemista. Kaavojen avulla voidaan myös selvittää yksittäinen yhteenlaskettava tai yhteenlaskettavien lukumäärä, jos summan arvo tunnetaan.

Esimerkki 5

Laske summa $\sum_{n=1}^{11}(94+6n)$.

Ratkaisu

Merkintä tarkoittaa summaa
$(94 + 6 \cdot 1) + (94 + 6 \cdot 2) + \ldots + (94 + 6 \cdot 11)$.

Tapa 1 Summalausekkeen avulla

Muodostetaan summalauseke ja lasketaan sen arvo.
Summaksi saadaan
100 + 106 + 112 + 118 + 124 + 130 + 136 + 142 + 148 + 154 + 160 = 1 430.

Tapa 2 Aritmeettisen summan avulla

Koska summan yhteenlaskettavat ovat aritmeettisen lukujonon peräkkäisiä jäseniä, voidaan käyttää aritmeettisen summan kaavaa. Sijoitetaan kaavaan $a_1 = 100$, $a_n = 160$ ja $n = 11$.

$$S_{11} = 11 \cdot \frac{100+160}{2} = 1\,430$$

Aritmeettinen summa:
$$S_n = n \cdot \frac{a_1+a_n}{2}$$

Vastaus

1 430

Esimerkki 6

Eero aloittaa kuntonsa parantamisen päivittäisillä kävelylenkeillä. Hän kävelee ensimmäisenä päivänä 300 metrin pituisen lenkin ja seuraavina päivinä aina 10 % pitemmän lenkin kuin edellisenä päivänä.
a) Kuinka pitkän matkan Eero on kävellyt lenkeillään 20 ensimmäisen päivän aikana yhteensä?
b) Kuinka monentena päivänä kävelylenkkien yhteispituus ylittää 1 000 km?

Ratkaisu

a) Kävelylenkin pituus on aina 100 % + 10 % = 110 % edellisen päivän lenkin pituudesta eli 1,1-kertainen verrattuna edellisen päivän lenkin pituuteen.

20 ensimmäisen päivän kävelylenkkien yhteispituus on

$300 + 1{,}1 \cdot 300 + 1{,}1^2 \cdot 300 + \ldots + 1{,}1^{19} \cdot 300$ (m).

Summa on geometrinen. Käytetään geometrisen summan kaavaa ja sijoitetaan siihen $a_1 = 300$, $q = 1{,}1$ ja $n = 20$.

$$S_{20} = \frac{300(1 - 1{,}1^{20})}{1 - 1{,}1} = 17\,182{,}49\ldots \approx 17\,000 \text{ (m)}$$

Geometrinen summa:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

b) Muutetaan ensin annettu matka metreiksi.
1 000 km = 1 000 000 m

Muodostetaan geometrisen summan kaavan avulla yhtälö, josta ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n laskentaohjelmalla.

$$\begin{aligned} \frac{300(1 - 1{,}1^n)}{1 - 1{,}1} &= 1\,000\,000 \\ n &= 60{,}9811\ldots \approx 60{,}98 \end{aligned}$$

1 000 km ylittyy 61. päivänä.

Vastaus

a) Matka on 17 km.
b) 1 000 km ylittyy 61. päivänä.

TEORIAYHTEENVETO

Lukujonot

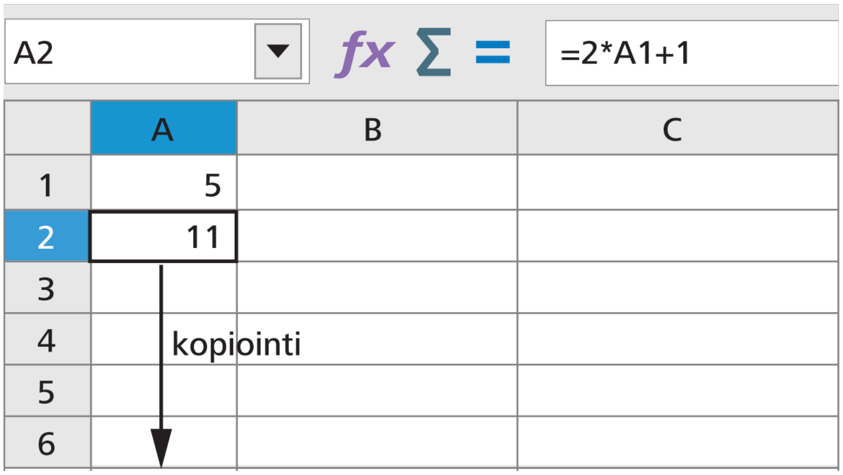
Summat

- Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Aritmeettisen lukujonon yleinen *n*:s jäsen on
  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$,
  missä a_1 on lukujonon ensimmäinen jäsen ja d peräkkäisten jäsenten erotus.
- Geometrisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Geometrisen jonon yleinen *n*:s jäsen on
  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
  missä a_1 on lukujonon ensimmäinen jäsen ja q peräkkäisten jäsenten suhde.
- Rekursiivisen lukujonon laskukaavassa viitataan yleensä edelliseen jäseneen a_{n-1} tai sitä edelliseen jäseneen a_{n-2}. Jonon ensimmäinen tai ensimmäiset jäsenet on ilmoitettava määrittelykaavan yhteydessä.
- Aritmeettisen summan arvo on
  $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$,
  missä a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava, a_n viimeinen yhteenlaskettava ja n yhteenlaskettavien lukumäärä.
- Geometrisen summan arvo on
  $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$,
  missä a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava, q peräkkäisten jäsenten suhde ($q \neq 1$) ja n yhteenlaskettavien lukumäärä.
- Summaa voidaan merkitä summamerkin avulla. Esimerkiksi summassa $\sum_{n=1}^{k} a_n$ lasketaan yhteen k ensimmäistä jonon a_n jäsentä.

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

Lukujonon erillisistä pisteistä muodostuva kuvaaja voidaan piirtää geometriaohjelmalla. Tällöin lukujonon jäsenet lasketaan ensin taulukkolaskentatoiminnolla ja jäseniä vastaavat pisteet siirretään koordinaatistoon toiminnolla *Luo pistelista*. Pisteiden nimet *A*, *B* jne piilotetaan lopuksi näkyvistä ottamalla asetus *Näytä nimi* pois päältä. Joissain laskentaohjelmissa on oma lukujonotoiminto, jonka kautta voi suoraan piirtää lukujonon kuvaajan. Toiminnon nimi voi olla esimerkiksi *Sekvenssi*.

Kokeen B-osassa rekursiivisesti määritellyn lukujonon jäseniä voidaan laskea taulukkolaskentaohjelmalla. Taulukkolaskentaohjelmaan kirjoitetaan jonon ensimmäinen tai ensimmäiset jäsenet sekä kaava, jolla seuraava jäsen saadaan. Kaava voidaan kopioida alempiin soluihin. Esimerkiksi lukujonon $a_1 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, kun $n \geq 2$ laskeminen taulukkolaskentaohjelmalla tapahtuu seuraavasti:



Jos laskentaohjelmassa on erillinen lukujonotoiminto, sen avulla voidaan usein laskea rekursiivisen jonon jäseniä myös suoraan rekursiokaavan avulla.

Kokeen B-osassa aritmeettisia ja geometrisia summia voidaan laskea kaavojen sijasta taulukkolaskentaohjelmalla. Tällöin ohjelmalla lasketaan kaikki yhteenlaskettavat ja valitaan funktiovalikosta funktio SUMMA.