Verrannollisuus ja lineaarinen malli

Verrannollisuus

Suureet ovat suoraan verrannollisia, kun niiden arvot muuttuvat samaan suuntaan samassa suhteessa. Kun kaksi suuretta ovat kääntäen verrannollisia, niiden arvot muuttuvat samassa suhteessa, mutta toisen suureen arvon kasvaessa toisen arvo pienenee.

Esimerkki 1

Jos $x = 12$, niin $y = 7$. Mikä on y:n arvo, kun $x = 54$ ja suureet x ja y ovat
a) suoraan verrannollisia
b) kääntäen verrannollisia?

Ratkaisu

Kootaan suureiden arvot taulukkoon.

x	y
12	7
54	z

a) Muodostetaan verranto.

$$\frac{12}{54} = \frac{7}{z}$$
$$12z = 7 \cdot 54 \quad | : 12$$
$$z = \frac{378}{12} = 31{,}5$$

Koska *x* ja *y* ovat suoraan verrannolliset, verrannon molemmissa suhteissa arvot ovat samoin päin kuin taulukossa.

b) Muodostetaan verranto.

$$\frac{12}{54} = \frac{z}{7}$$
$$54z = 12 \cdot 7 \quad | : 54$$
$$z = \frac{84}{54}^{(6} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$$

Koska *x* ja *y* ovat kääntäen verrannolliset, verrannon toisessa suhteessa arvot ovat toisin päin kuin taulukossa.

Vastaus

a) 31,5
b) $1\frac{5}{9}$

Esimerkki 2

Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Kynttilän valaistusvoimakkuus on 50 luksia yhden metrin etäisyydellä.
a) Kuinka suuri valaistusvoimakkuus on 30 cm:n etäisyydellä?
b) Kuinka kaukana valaistusvoimakkuus on 10 luksia?

Ratkaisu

a) Kootaan tehtävässä annetut arvot taulukkoon.

Valaistusvoimakkuus (lx)	**Etäisyys (m)**	**Etäisyyden neliö**
50	1	$1^2 = 1$
x	0,3	$0{,}3^2 = 0{,}09$

Muodostetaan verranto, ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\frac{50}{x} = \frac{0,09}{1}$$

$$x = 555,55... \approx 560 \text{ (lx)}$$

b) Kootaan tehtävässä annetut arvot taulukkoon.

Valaistusvoimakkuus (lx)	Etäisyys (m)	Etäisyyden neliö
50	1	$1^2 = 1$
10	y	y^2

Muodostetaan verranto, ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$$\frac{50}{10} = \frac{y^2}{1}$$

$y = 2,236\ldots \approx 2,2$ (m)

tai

$y = -2,236\ldots \approx -2,2$ (m)

Negatiivinen ratkaisu ei käy etäisyydeksi.

Vastaus

a) 560 lx
b) 2,2 m

Lineaarinen malli

Lineaarista mallia käytetään, kun muutos on likimain tasaista. Koordinaatistossa lineaarisen funktion kuvaaja on suora.

Esimerkki 3

Päivän pituus muuttuu lyhyellä aikavälillä likimain lineaarisesti. Funktiolla $f(t) = -5{,}97t + 872$ voidaan mallintaa päivän pituutta minuutteina Vaasassa. Funktiossa t on päivien lukumäärä syyskuun alusta. Laske mallin avulla päivän pituus Vaasassa

a) syyskuun 20. päivänä

b) seuraavan vuoden helmikuun 15. päivänä.

c) Mitä voidaan sanoa mallin toimivuudesta pidemmällä aikavälillä?

Ratkaisu

a) $f(20) = -5{,}97 \cdot 20 + 872 = 752{,}6$ (min)

$752{,}6$ min $= 12$ h $32{,}6$ min ≈ 12 h 33 min

b) Syyskuun alusta helmikuun 15. päivään on

$$\overset{\text{SYY}}{30} + \overset{\text{LOK}}{31} + \overset{\text{MAR}}{30} + \overset{\text{JOU}}{31} + \overset{\text{TAM}}{31} + \overset{\text{HEL}}{15} = 168 \text{ vuorokautta.}$$

$f(168) = -5{,}97 \cdot 168 + 872 = -130{,}96 \approx -131$ (min)

Päivän pituus on mallin mukaan –131 minuuttia.

c) Malli toimii korkeintaan muutaman kuukauden aikavälillä. Mallin mukaan päivän pituus lyhenee jatkuvasti ja menee ennen pitkää negatiiviseksi. Todellisuudessa päivän pituus lyhenee talvipäivän seisaukseen 22.12. asti ja sen jälkeen päivä pitenee.

Vastaus

a) 12 h 33 min

b) –131 min

c) Malli ei toimi pidemmällä aikavälillä.

Esimerkki 4

Jäätelökioskin pitäjän mukaan aurinkoisena kesäpäivänä myytyjen jäätelöiden määrä on lineaarisesti riippuvainen päivän korkeimmasta lämpötilasta. Eräänä päivänä korkein lämpötila oli 18 °C ja kioskin pitäjä myi 109 jäätelöä. Viikkoa myöhemmin lämpötila oli 24 °C ja hän myi 247 jäätelöä.

a) Muodosta päivän korkeimman lämpötilan *x* ja myytyjen jäätelöiden määrän *y* välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö.

b) Arvioi yhtälön avulla, kuinka paljon jäätelöä myytäisiin hellepäivänä, jona lämpötila nousisi 32 asteeseen.

c) Missä lämpötilassa jäätelöä ei mallin mukaan osteta lainkaan?

Ratkaisu

a) Taulukoidaan tehtävässä annetut tiedot.

Lämpötila *x* (°C)	**Jäätelön myynti *y* (kpl)**
18	109
24	247

Muodostetaan riippuvuutta kuvaava yhtälö. Lasketaan ensin suoran kulmakerroin *k*. Valitaan $(x_1, y_1) = (18, 109)$ ja $(x_2, y_2) = (24, 247)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{247 - 109}{24 - 18} = 23$$

Valitaan toinen suoran pisteistä, esimerkiksi $(x_0, y_0) = (18, 109)$, ja sijoitetaan sen koordinaatit ja suoran kulmakerroin $k = 23$ suoran yhtälön kaavaan.

$$\begin{aligned} y - 109 &= 23(x - 18) \\ y - 109 &= 23x - 414 \\ y &= 23x - 305 \end{aligned}$$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = 23x - 305$.

b) Kun $x = 32$, $y = 23 \cdot 32 - 305 = 431$ (jäätelöä).

c) Selvitetään yhtälön avulla, mikä on lämpötila x, kun myynti $y = 0$. Muodostetaan yhtälö, ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

$0 = 23x - 305$

$x = 13{,}26\ldots \approx 13$

Myynti loppuu, kun lämpötila on 13 astetta.

Vastaus

a) $y = 23x - 305$

b) 431 jäätelöä

c) 13 astetta

Esimerkki 5

Vesanto on kunta Pohjois-Savossa. Taulukossa on tilasto kunnan väkiluvusta viiden vuoden välein vuodesta 1980 vuoteen 2015.

Vuosi	**Väkiluku**
1980	3 575
1985	3 386
1990	3 245
1995	3 082
2000	2 812
2005	2 583
2010	2 426
2015	2 191

a) Muodosta laskentaohjelman avulla lineaarinen malli, joka kuvaa Vesannon väkiluvun kehitystä vuodesta 1980 vuoteen 2015. Mikä on mallia kuvaavan suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$?

b) Kuinka paljon Vesannon väkiluku muuttuu mallin mukaan keskimäärin vuodessa?

c) Minä vuonna Vesannon väkiluku alittaa mallin mukaan 1 000 asukasta?

Avaa OpenOffice-tiedosto →

Ratkaisu

a) Syötetään aineisto laskentaohjelman taulukkonäkymään. Sijoitetaan arvoja vastaavat pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan siihen suora. Ohjelma määrittää suoralle yhtälön.

Suoran yhtälö on $y = -39{,}817x + 82\,446$.

b) Yhtälössä kerroin on $k = -39{,}817 \approx -40$. Tämä tarkoittaa, että väkiluku on pienentynyt keskimäärin 40 asukkaalla vuodessa.

c) Selvitetään yhtälön avulla, milloin Vesannon väkiluku laskee alle 1 000 asukkaan. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskentaohjelmalla.

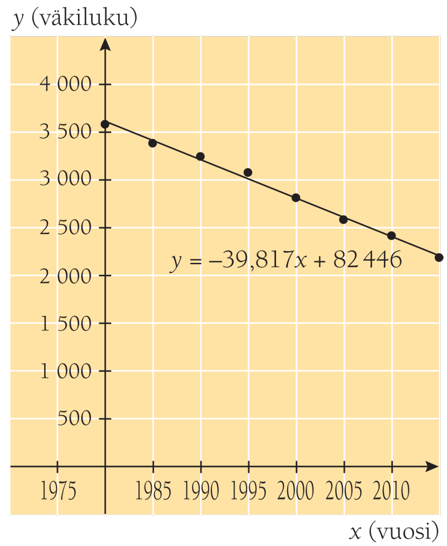
$$\begin{aligned} -39{,}817x + 82\,446 &= 1\,000 \\ x &= 2\,045{,}5082 \end{aligned}$$

Mallin mukaan Vesannon väkiluku alittaa 1 000 asukkaan rajan vuonna 2046.

Vastaus

a) $y = -39{,}817x + 82\,466$
b) pienenee keskimäärin 40 asukkaalla vuodessa
c) vuonna 2046

Vesannon väkiluvun kehitys



TEORIAYHTEENVETO

- Tehtävät, jotka perustuvat suoraan tai kääntäen verrannollisuuteen, ratkaistaan verrannon avulla.
- Lineaarinen malli kuvaa tasaista kasvamista tai vähenemistä.
- Lineaarisessa mallintamisessa funktio kirjoitetaan muodossa $f(x) = kx + b$,
  jossa k on muutoksen määrä yhtä x:n yksikköä kohden.
  Funktion kuvaaja koordinaatistossa on suora.

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

• Lineaarisen mallin ja muiden mallien sovittaminen kokeen B-osassa tehdään useimmissa laskentaohjelmissa tilastotoiminnoilla. Geometriaohjelmassa toiminto on *Kahden muuttujan regressioanalyysi*. Taulukkolaskentaohjelmassa piirretään ensin hajontakuvio toiminnolla *Lisää/Kaavio/XY* (hajonta) ja sovitetaan aineistoon trendiviiva.

• Geometria- ja taulukkolaskentaohjelma antavat lineaarista mallia kuvaavan suoran yhtälön sellaisenaan. Muissa laskentaohjelmissa yhtälö annetaan yleensä muodossa $y = ax + b$, johon kertoimien a ja b arvot poimitaan ohjelman laskemista tunnusluvuista. Ohjelmat ilmoittavat samalla periaatteella myös muita malleja kuvaavat yhtälöt.

• Lineaarisen mallin muodostaminen tehdään ohjelman avulla, jos malli pitää sovittaa taulukon aineistoon, jossa on useita *xy*-lukupareja. Mikäli näitä *xy*-lukupareja on vain kaksi, kuten esimerkissä 4, ratkaisussa voidaan myös kokeen B-osassa vaatia kirjoittamaan mallin muodostamisen laskennalliset välivaiheet. Näitä ovat esimerkiksi kulmakertoimen laskeminen ja suoran yhtälön kaavan käyttö.