Eksponentiaalinen malli ja muita malleja

Eksponentiaalista mallia käytetään, kun muutos on suhteellisesti samansuuruista. Tällöin jokaisella muutoskerralla suure muuttuu prosentuaalisesti yhtä paljon.

Esimerkki 1

Kesämökin keittiön kaapissa muurahaisten määrä lisääntyy kesäkuussa 10 % viikossa. Kesäkuun alussa muurahaisia havaittiin olevan 250 kappaletta.
a) Muodosta funktio $f(x)$, joka ilmaisee muurahaisten määrän x viikkoa kesäkuun alun jälkeen.
b) Laske funktion avulla muurahaisten määrä sekä neljän viikon että kymmenen päivän kuluttua kesäkuun alusta.
c) Jos muurahaiset lisääntyivät toukokuussa samalla nopeudella, kuinka monta muurahaista kaapissa voidaan arvioida olleen kolme viikkoa ennen kesäkuun alkua?

Ratkaisu

a) Määrän lisääntyminen 10 prosentilla tarkoittaa, että muurahaisten määrä tulee 1,1-kertaiseksi. Muurahaisten määrää kuvaava funktio on

$f(x) = 1{,}1^x \cdot 250.$

b) Neljän viikon kuluttua muurahaisia on

$f(4) = 1{,}1^4 \cdot 250 = 366{,}025 \approx 370.$

Kymmenen päivää on $\frac{10}{7}$ viikkoa. Kymmenen päivän kuluttua muurahaisia on

$$f\left(\frac{10}{7}\right) = 1{,}1^{\frac{10}{7}} \cdot 250 = 286{,}46\ldots \approx 290.$$

c) Kun siirrytään ajassa taaksepäin, eksponentti on negatiivinen.

$f(-3) = 1{,}1^{-3} \cdot 250 = 187{,}82\ldots \approx 190$

Vastaus

a) $f(x) = 1{,}1^x \cdot 250$
b) 370 ja 290
c) 190

Esimerkki 2

Radioaktiivisen aineen määrää tarkkailtiin kymmenen vuoden ajan. Alussa ainetta oli 100,0 g. Viiden vuoden kuluttua sen määräksi mitattiin 77,4 g. Mikä on aineen puoliintumisaika?

Ratkaisu

Puoliintumisaika tarkoittaa aikaa, jossa aineen määrä vähenee puoleen alkuperäisestä.

Radioaktiivisen aineen väheneminen on eksponentiaalista, joten aineen määrä vähenee yhtä monella prosentilla joka vuosi. Merkitään muutoskerrointa *k*:lla. Muodostetaan yhtälö, ja ratkaistaan siitä *k* laskentaohjelmalla.

$$k^5 \cdot 100{,}0 = 77{,}4$$
$$k = 0{,}9500537... \approx 0{,}95005$$

Välitulosta ei saa pyöristää liikaa.

Merkitään puoliintumisaikaa vuosina *x*:llä. Muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan *x* laskentaohjelmalla.

$$0{,}95005^x \cdot 100{,}0 = \frac{100{,}0}{2}$$
$$x = 13{,}527... \approx 13{,}5$$

Vastaus

Puoliintumisaika on 13,5 vuotta.

Esimerkki 3

1.1.2014 Helsingin väkiluku oli 616 690 asukasta ja 1.1.2018 se oli 643 272. Ennusta Helsingin väkiluku vuoden 2060 alussa käyttämällä

a) lineaarista mallia

b) eksponentiaalista mallia.

Ota mallin aloitusvuodeksi 2014. Anna vastaus tuhannen asukkaan tarkkuudella.

Ratkaisu

a) Muodostetaan riippuvuutta kuvaava yhtälö laskentaohjelmalla. Kun vuosi 2014 on tarkastelujakson alku, vuotta 2018 merkitään arvolla 4.

Neljässä vuodessa väkiluku on kasvanut 643 272 – 616 690 = 26 582 asukkaalla.

Vuotuinen väestönkasvu on ollut keskimäärin

$$\frac{26\ 584}{4} = 6\ 645{,}5.$$

Väkilukua kuvaava funktio lineaarista mallia käytettäessä on

$f(t) = 616\,690 + 6\,645{,}5t$,

missä t on aika vuosina vuoden 2014 alusta.

Vuoden 2014 alusta vuoden 2060 alkuun on 46 vuotta.
Väkiluku vuoden 2060 alussa on
$f(46) = 616\,690 + 6\,645{,}5 \cdot 46 = 922\,383 \approx 922\,000$.

b) Eksponentiaalisessa mallissa väkiluku kasvaa joka vuosi yhtä monella prosentilla. Merkitään kasvukerrointa k:lla. Muodostetaan yhtälö, ja ratkaistaan siitä k laskentaohjelmalla.

$k^4 \cdot 616\,690 = 643\,272$

$k = 1{,}01060614\ldots \approx 1{,}01061$

tai

$k = -1{,}01060614\ldots \approx -1{,}01061$ **Negatiivinen ratkaisu ei käy.**

Väkilukua kuvaa funktio $g(t) = 1{,}01061^t \cdot 616\,690$, missä t on aika vuosina vuoden 2014 alusta.

Vuoden 2014 alusta vuoden 2060 alkuun on 46 vuotta.
Väkiluku vuoden 2060 alussa on
$g(46) = 1{,}01061^{46} \cdot 616\,690 = 1\,002\,102{,}40... \approx 1\,002\,000$.

Vastaus

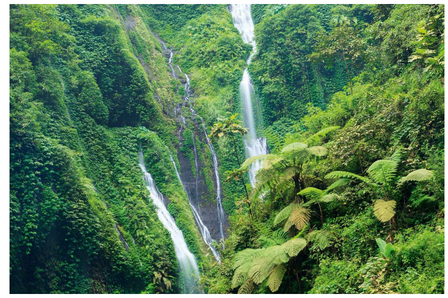
a) 922 000
b) 1 002 000

Esimerkki 4

Alla olevassa taulukossa on esitetty Indonesian metsäpinta-ala vuodesta 1990 vuoteen 2015.

Vuosi	**Metsäpinta-ala (km^2)**
1990	1 314 000

2000	1 101 000
2005	1 065 000
2010	1 048 000
2015	1 009 000



Avaa OpenOffice-tiedosto →

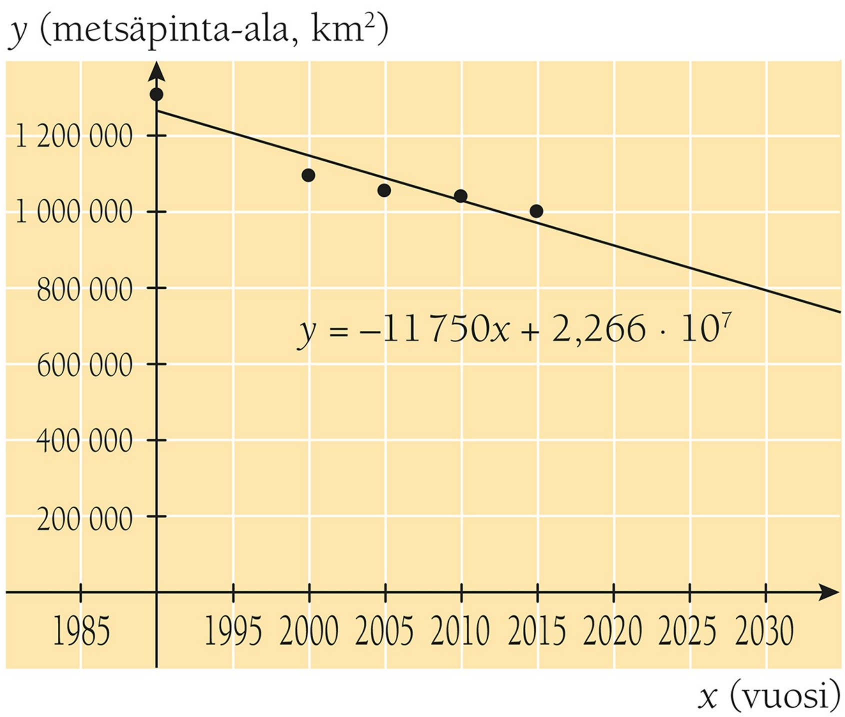
a) Mallinna Indonesian metsäpinta-alaa lineaarisen mallin avulla vuosina 1990–2035. Piirrä kuvaaja ja määritä sitä vastaava yhtälö.
b) Mallinna Indonesian metsäpinta-alaa eksponentiaalisen mallin avulla vuosina 1990–2035. Piirrä kuvaaja ja määritä sitä vastaava yhtälö.
c) Laske kummankin mallin avulla metsäpinta-ala vuonna 2035. Vertaa ennusteita.

Ratkaisu

Syötetään tiedot laskentaohjelman taulukkonäkymään.

a) Sovitetaan arvoja vastaaviin pisteisiin lineaarinen malli.

Lineaarinen malli



Suoran yhtälö on $y = -11\,750x + 22\,660\,000$.

b) Sovitetaan arvoja vastaaviin pisteisiin eksponentiaalinen malli.

TEORIAYHTEENVETO

- Eksponentiaalisessa mallintamisessa funktio kirjoitetaan muodossa

  $f(x) = k^x \cdot a$, missä k on muutoskerroin, a on suureen alkuperäinen arvo ja x muutosten lukumäärä.
- Eksponentiaalisessa mallissa käytetään toisinaan kantalukuna Neperin lukua e. Sen likiarvo on 2,718.

LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

Kun kokeen B-osassa sovitetaan eksponentiaalista mallia, monet laskentaohjelmat käyttävät kantalukuna Neperin lukua *e*. Geometriaohjelmassa regressiomalli *Eksponentiaalinen* käyttää kantalukuna Neperin lukua. Regressiomalli *Kasvu* on sama eksponentiaalinen malli, mutta siinä kantalukuna on malliin liittyvä muutoskerroin. Taulukkolaskentaohjelma ilmaisee eksponentiaalisen mallin yhteydessä Neperin luvun muodossa exp. Esimerkiksi ohjelman antama yhtälö $f(x) = 4{,}5\ \exp(0{,}023x)$ tarkoittaa yhtälöä $f(x) = 4{,}5e^{0{,}023x}$.

Kuvaajan yhtälössä esiintyvä $e \approx 2{,}718$ on Neperin luku, jota käytetään usein eksponentiaalisen mallin kantalukuna.

Eksponentiaalisen mallin muodostaminen tehdään ohjelman avulla, jos malli pitää sovittaa taulukon aineistoon, jossa on useita *xy*-lukupareja. Mikäli näitä *xy*-lukupareja on vain kaksi, kuten esimerkissä 3, ratkaisussa voidaan vaatia myös kokeen B-osassa kirjoittamaan mallin muodostamisen laskennalliset välivaiheet. Tällainen välivaihe on esimerkiksi muutoskertoimen ratkaiseminen yhtälön avulla.

Eksponentiaalisessa mallissa yhtälön kertoimien pyöristäminen vaikuttaa merkittävästi mallin antamiin ennusteisiin. Ohjelman pyöristysasetuksia voi joutua muuttamaan riittävän tarkkuuden saavuttamiseksi.

Laskentaohjelmien regressiomalleissa on myös muita malleja, joista tavallisimmin käytetään toisen ja kolmannen asteen polynomisia malleja. Näiden mallien muodostaminen tehdään aina ohjelman avulla.

743 108,10… ≈ 743 000 km² ja eksponentiaalisen mallin mukaan se on 804 260,42… ≈ 804 000 km². Lineaarisen mallin mukaan pinta-ala pienenee vuoteen 2035 mennessä noin 61 000 km² enemmän kuin eksponentiaalisen mallin mukaan.