

# Potensseihin liittyvät yhtälöt

## Potenssien laskusäännöt

Kun eksponenttina on pieni luku, voidaan potenssilausekkeet sieventää ilman laskusääntöjä kirjoittamalla potenssi kertolaskuksi. Suurilla eksponenteilla tai kun eksponenttina on kirjain, kannattaa käyttää potenssien laskusääntöjä.

Esimerkki 1

Sievennä.

a)  $a^{324} \cdot a^{656}$

b)  $\frac{b^{500}}{b^{720}}$

c)  $\frac{(x^n)^2}{x^{n-1}}$

Ratkaisu

a)  $a^{324} \cdot a^{656} = a^{324 + 656} = a^{980}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esimerkki 3  $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$  ja  $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Määritä yleinen potenssi-logaritmi määritellään potenssin avulla.

a)  $3^3 \cdot 3^0 + 3^{-2}$

b)  $\log_5 625 = 16$

a)  $\frac{1}{d} \cdot 0,25$

Ratkaisu

a)  $2^{\frac{n+1}{3}}$  on luku, joka viidenteen potenssiin korotettuna on

$3^2 \cdot 16$

Koska  $2^5 = 32$ ,  $\sqrt[5]{32} = 2$ .

b)  $\log_5 625$  on potenssi, johon korotettuna luku 5 on 625.

Koska  $5^4 = 625$ ,  $\log_5 625 = 4$ .

Vastaus

a) 2

b) 4

## Potenssiyhtälö

Yhtälö, jossa kantaluku on tuntematon, ratkaistaan yleisen juuren avulla.

Esimerkki 4

Ratkaise yhtälö. Anna b-kohdan vastaukseksi kaksidesimaalinen likiarvo.

a)  $x^4 = 4\,096$

b)  $k^9 = 1,99$

Ratkaisu

a)

**Koska eksponentti on parillinen, ratkaisuja on kaksi.**

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$\log_a x = y,$$

$$\text{kun } a^y = x$$

$$x^4 = 4\,096$$

$$x = \pm \sqrt[4]{4\,096}$$

$$x = \pm 8$$

b)

$$k^9 = 1,99$$

$$k = \sqrt[9]{1,99}$$

$$k = 1,0794\dots \approx 1,08$$

**Koska eksponentti on pariton, ratkaisuja on yksi.**

Vastaus

a)  $x = 8$  tai  $x = -8$

b)  $k \approx 1,08$

Esimerkki 5

Kupillinen kahvia maksoi kahvilassa 1,80 € vuonna 2006 ja

2,50 €

vuonna 2018. Kuinka monella prosentilla kahvikupillisen

hinta nousi keskimäärin vuodessa?

Ratkaisu

Vuodesta 2006 vuoteen 2018 on  $2018 - 2006 = 12$  vuotta.

Merkitään vuotuista prosentuaalista muutosta vastaavaa

kerrointa  $k$ :lla. Muodostetaan yhtälö, ja ratkaistaan se

laskentaohjelmalla.

$$k^{12} \cdot 1,80 = 2,50$$

$$k = 1,02775\dots \approx 1,028 \text{ tai } k = -1,02775\dots \approx -1,028$$

$$1,028 = 102,8 \%$$

$$102,8 \% - 100 \% = 2,8 \%$$

**Koska tehtävässä on kyse prosentuaalisesta muutoksesta, negatiivinen ratkaisu ei ole järkevä.**

Vastaus

Kahvikupillisen hinta nousi keskimäärin 2,8 % vuodessa.

## Eksponttiyhtälö

Yhtälö, jossa eksponentti on tuntematon, ratkaistaan yleensä logaritmin avulla.

Esimerkki 6

Ratkaise yhtälö. Anna b-kohdan vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

a)  $4^x = 4\,096$

b)  $1,05^n = 1,12$

c)  $\log_7 x = 4$

Ratkaisu

a)

$$4^x = 4\,096$$

$$x = \log_4 4\,096$$

$$x = \frac{\lg 4\,096}{\lg 4}$$

$$x = 6$$

**Peruslaskin laskee vain 10-kantaisia logaritmeja.**

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$$

b)

$$1,05^n = 1,12$$

$$n = \log_{1,05} 1,12$$

$$n = \frac{\lg 1,12}{\lg 1,05} = 2,3227... \approx 2,32$$

c)

$$\log_7 x = 4$$

$$x = 7^4$$

$$x = 2\,401$$

Vastaus

a)  $x = 6$

b)  $n \approx 2,32$

c)  $x = 2\,401$

Esimerkki 7

Ratkaise yhtälö.

a)  $2^{3x+4} = 4^{x-1}$

b)  $5^{4x+3} = 1$

Ratkaisu

Koska eksponenttina on muuttujan  $x$  lauseke, yhtälöitä ei kannata ratkaista logaritmin avulla.

a) Kirjoitetaan luku 4 luvun 2 potenssina.

$$2^{3x+4} = 4^{x-1}$$

$$2^{3x+4} = (2^2)^{x-1}$$

$$2^{3x+4} = 2^{2(x-1)}$$

$$2^{3x+4} = 2^{2x-2} \quad \text{Eksponentit merkitään yhtäsuuriksi.}$$

$$3x + 4 = 2x - 2$$

$$x = -6$$

b) Koska  $1 = 5^0$ , yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa luvun 5 potenssina.

$$5^{4x+3} = 1$$

$$5^{4x+3} = 5^0$$

$$4x + 3 = 0$$

$$4x = -3$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Vastaus

a)  $x = -6$

b)  $x = -\frac{3}{4}$

Pienen järven vesistö on tällä hetkellä ravinteikasta. Uusien ravinteiden pääsy järveen estetään. Kuinka monta vuotta kuluu, että ravinteiden määrä laskee alle 25 prosenttiin,

Potenssikaavataikutuksesta ravinteiden määrä ja Potenssiyhtälö vähenee 10 % vuodessa?

<b>Tulon potenssi</b>	$(ab)^n = a^n b^n$
<b>Osamäärän potenssi</b>	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ , kun $b \neq 0$
<b>Samankantaisten potenssien tulo</b>	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
<b>Samankantaisten potenssien osamäärä</b>	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ , kun $a \neq 0$
<b>Potenssin potenssi</b>	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

$x = 13,1576\dots$

## Logaritmi

Vastaus

$\log_a x = y$ , kun  $a^y = x$

Ravinteiden määrä on laskenut alle 25 prosenttiin 14

vuodessa  $\log_{10} x$   
 $\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = \frac{\lg x}{\lg a}$

Potenssiyhtälö  $x^n = a$  ratkaistaan yleisen juuren avulla.

• Kun  $n$  on parillinen ja  $a > 0$ , ratkaisuja on kaksi:  $x = \pm \sqrt[n]{a}$ .

Kun  $n$  on pariton, ratkaisuja on yksi:

$x = \sqrt[n]{a}$

## Eksponenttiyhtälö

Eksponenttiyhtälö  $a^x = b$ , missä eksponentti on tuntematon, ratkaistaan yleensä logaritmin avulla. Jos eksponenttiyhtälön molemmat puolet saadaan saman kantaluvin potensseiksi käyttämällä potenssikaavoja, yhtälön voi ratkaista myös ilman logaritmia.

## LASKIMET JA LASKENTAOHJELMAT

• Kokeen A-osan peruslaskimessa yleinen juuri saadaan näppäimellä

$x^{1/y}$ . Esimerkiksi  $\sqrt[5]{32}$  näppäillään  $32 x^{1/y} 5$ .

• A-osan peruslaskimeen ei voi syöttää logaritmin kantalukua, vaan logaritmit määritetään 10-kantaisen logaritmin näppäimen log avulla. Esimerkiksi  $\log_5 625$  näppäillään  $625 \log \div 5 \log$ .