Toistokoe ja binomijakauma

Esimerkki 1

Noppaa heitetään viisi kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan täsmälleen

a) yksi kuutonen

b) kolme kuutosta?

Ratkaisu

a) Kirjataan ylös viiden heiton sarjat, joissa on täsmälleen yksi kuutonen. Merkitään sarjaan kirjain M silloin, kun saatu silmäluku on jokin muu kuin kuutonen. Lasketaan kunkin sarjan todennäköisyys.

Sarja	**Todennäköisyys**
6MMMM	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$
M6MMM	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$
MM6MM	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$
MMM6M	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

MMMM6	$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Huomataan, että kaikkien sarjojen todennäköisyydet ovat samat. Kysytty todennäköisyys saadaan laskemalla sarjojen todennäköisyydet yhteen tai lyhyemmin kertomalla yhden suotuisan sarjan todennäköisyys sarjojen lukumäärällä viisi.

$P(\text{täsmälleen yksi kuutonen}) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}4018\ldots \approx$

$0{,}40$

b) Viiden heiton sarja, jossa on täsmälleen kolme kuutosta, on esimerkiksi 666MM. Tämän sarjan todennäköisyys on

$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2.$

Todennäköisyys on sama kaikille sarjoille, joissa on kolme kuutosta.

Kolme kuutosta voi esiintyä viiden heiton sarjassa

$\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys saadaan kertomalla yhden suotuisan sarjan todennäköisyys sarjojen lukumäärällä.

$P(\text{täsmälleen kolme kuutosta}) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$

$10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}03215\ldots \approx 0{,}032.$

Vastaus

Todennäköisyys on
a) 0,40
b) 0,032.

Toistokoe

Nopan heittäminen useita kertoja peräkkäin on esimerkki toistokokeesta. Toistokokeessa sama satunnaisilmiö toistuu eikä edellisellä tuloksella ole vaikutusta seuraavaan. Myös ihmisten arpomista ryhmään tai arpojen ostamista voidaan pitää toistokokeena, jos ihmisten ja arpojen määrä alkutilanteessa on niin suuri, että valinnan tulos ei oleellisesti muuta todennäköisyyksiä seuraavissa vaiheissa.

Esimerkin 1 b-kohdan laskutapa voidaan yleistää toistokokeen todennäköisyyden laskukaavaksi.

Todennäköisyys toistokokeessa on

$$P(A \text{ tapahtuu } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

missä
n on toistojen lukumäärä
p on tapahtuman A todennäköisyys
q on tapahtuman A vastatapahtuman todennäköisyys $1 - p$.

Lausekkeessa yhden suotuisan sarjan todennäköisyys kerrotaan suotuisten sarjojen lukumäärällä. Kaavaa voitaisiin käyttää myös esimerkin 1 a-kohdassa, jolloin suotuisten sarjojen lukumäärän ilmaiseva kerroin olisi

$$\binom{5}{1} = 5.$$

Esimerkki 2

Arpajaiskojussa on myynnissä suuri määrä arpoja, joista 20 % on voittoarpoja. Minttu ostaa seitsemän arpaa. Millä todennäköisyydellä
a) arvoista kaksi voittaa

b) yksikään arvoista ei voita?

Ratkaisu

a) Todennäköisyys, että yhdellä arvalla voittaa, on P(voitto) = 0,2.

Vastatapahtuman todennäköisyys on

P(ei voittoa) = 1 – 0,2 = 0,8.

Koska arpojen määrä on suuri, todennäköisyys ei muutu merkittävästi nostojen välillä. Käytetään toistokokeen todennäköisyyden kaavaa

$$P(A \text{ tapahtuu } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Sijoitetaan kaavaan $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 7$ ja $k = 2$, jolloin

$$P(\text{kaksi voittoarpaa}) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{7-2} =$$

$$\binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}2752512 \approx 0{,}28.$$

b) *Tapa 1*

Kun yksikään arpa ei voita, toistokokeen todennäköisyyden kaavaa ei tarvita. Kertolaskusäännöllä saadaan

P(ei voittoarpoja) = $0{,}8^7 = 0{,}2097\ldots \approx 0{,}21$.

Tapa 2

Toistokokeen todennäköisyyden kaavaa käyttämällä saadaan

$$P(\text{ei voittoarpoja}) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{7-0} = \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 =$$

$$0{,}2097\ldots \approx 0{,}21.$$

Kaava antaa saman tuloksen kuin lyhyempi laskutapa 1, koska

$\binom{7}{0} = 1$ ja $0{,}2^0 = 1$.

Vastaus

Todennäköisyys on

a) 0,28

b) 0,21.

Esimerkki 3

Ranskan kuuntelukokeessa on 20 kohtaa, joista kussakin on vastausvaihtoehdot A, B ja C. Väsynyt Ukri ei jaksa keskittyä ja arpoo kaikki vastauksensa. Millä todennäköisyydellä Ukri vastaa ainakin neljään kohtaan oikein?

Ratkaisu

Tehtävässä kysytään todennäköisyyttä, että oikeita vastauksia on 4, 5, 6, …, 19 tai 20. Todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman ”korkeintaan kolme oikeaa vastausta” avulla.

Korkeintaan kolme oikeaa vastausta tarkoittaa, että oikeita vastauksia on 0, 1, 2 tai 3. Lasketaan kunkin vaihtoehdon todennäköisyys.

Yhden kohdan vastaus on

- oikein todennäköisyydellä $P(\text{oikein}) = \frac{1}{3}$

- väärin todennäköisyydellä $P(\text{väärin}) = \frac{2}{3}$.

Todennäköisyys, että Ukrilla ei ole yhtään oikeaa vastausta, voidaan laskea ilman toistokokeen todennäköisyyden kaavaa.

$$P(0 \text{ oikein}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{20} = 0{,}000300728\ldots \approx 0{,}0003007$$

Muut todennäköisyydet lasketaan toistokokeen todennäköisyyden kaavalla. Sijoitetaan kaavaan $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ ja $n = 20$ sekä vuorotellen arvot $k = 1$, $k = 2$ ja $k = 3$.

$$P(1 \text{ oikein}) = \binom{20}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19} = 0{,}00300728\ldots \approx 0{,}003007$$

$$P(2 \text{ oikein}) = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{18} = 0{,}0142846\ldots \approx 0{,}01428$$

$$P(3 \text{ oikein}) = \binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{17} = 0{,}0428538\ldots \approx 0{,}04285$$

Todennäköisyys, että Ukri vastaa korkeintaan kolmeen kohtaan oikein, on

$P(\text{korkeintaan } 3 \text{ oikein}) =$
$P(0 \text{ oikein}) + P(1 \text{ oikein}) + P(2 \text{ oikein}) + P(3 \text{ oikein}) =$

0,0003007 + 0,003007 + 0,01428 + 0,04285 = 0,0604377.

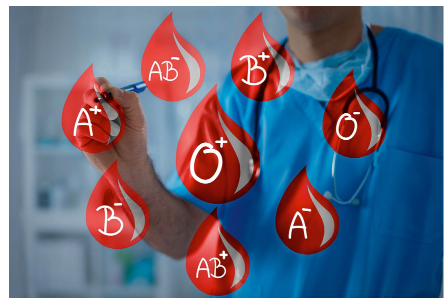
Kysytty todennäköisyys on

P(ainakin 4 oikein) = 1 – P(korkeintaan 3 oikein) =
1 – 0,0604377 = 0,9395623 ≈ 0,94.

Vastaus

Todennäköisyys on 0,94.

Esimerkki 4



Suomalaisista 42 % kuuluu veriryhmään A. Valitaan satunnaisesti kolmen suomalaisen ryhmä.
a) Määritä satunnaismuuttujan ”veriryhmään A kuuluvien lukumäärä” mahdolliset arvot ja todennäköisyydet.
b) Laske veriryhmään A kuuluvien lukumäärän odotusarvo.
c) Havainnollista a-kohdan jakaumaa pylväskuviolla.

Ratkaisu

a) Mahdolliset satunnaismuuttujan arvot ovat 0, 1, 2 ja 3.

Satunnaisesti valittu suomalainen kuuluu veriryhmään A todennäköisyydellä P(kuuluu) = 0,42.

Hän ei kuulu veriryhmään A todennäköisyydellä

P(ei kuulu) = 1 – 0,42 = 0,58.

Lasketaan todennäköisyydet, että 0, 1, 2 tai 3 satunnaisesti valittua suomalaista kuuluu veriryhmään A.

$P(0 \text{ kuuluu}) = 0{,}58^3 = 0{,}195112$

$P(1 \text{ kuuluu}) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}58^2 = 0{,}423864$

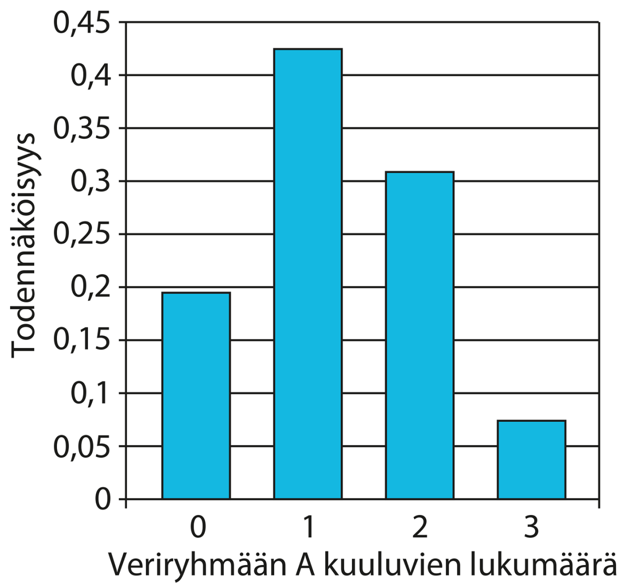
$P(2 \text{ kuuluu}) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}42^2 \cdot 0{,}58 = 0{,}306936$

P(3 kuuluu) = $0{,}42^3$ = 0,074088

b) E(veriryhmään A kuuluvien lukumäärä) =
0,195112 · 0 + 0,423864 · 1 + 0,306936 · 2 + 0,074088 · 3 =
1,26

Veriryhmään A kuuluvien odotusarvo on 1,26.

c) Piirretään jakaumasta pylväskuvio.



Binomijakauma

Kun satunnaismuuttuja X ilmaisee tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärän toistokokeessa, sen sanotaan noudattavan binomijakaumaa. Tällöin voidaan merkitä $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, missä n on toistojen lukumäärä ja p tapahtuman A todennäköisyys yksittäisessä toistossa. Lukuja n ja p kutsutaan jakauman parametreiksi.

Nimitys binomijakauma johtuu siitä, että toistokokeen todennäköisyyden laskukaavan kertoimilla $\binom{n}{k}$ on yhteys kaksitermisten polynomien, binomien, potensseihin. Koska satunnaismuuttujan mahdolliset arvot kuvaavat lukumääriä, binomijakauma on diskreetti todennäköisyysjakauma.

Laskentaohjelmat laskevat suoraan binomijakaumaan liittyviä todennäköisyyksiä. Laskut saa ohjelmasta riippuen joko valitsemalla jakaumatyypiksi binomijakauman tai käyttämällä toimintoa Binominen Pdf (Binomial Pdf).

Binomijakauman odotusarvo ja keskihajonta

Binomijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja keskihajonta voidaan laskea joko laskentaohjelmalla tai seuraavilla kaavoilla.

Binomijakauman odotusarvo on
$E(X) = np$.

Binomijakauman keskihajonta on
$\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Kaavoissa
n on toistojen lukumäärä
p on tapahtuman A todennäköisyys
q on tapahtuman A vastatapahtuman todennäköisyys $1 - p$.

Esimerkin 4 tilanteessa $n = 3$ ja $p = 0{,}42$, jolloin kaavan avulla saadaan odotusarvoksi $E(X) = 3 \cdot 0{,}42 = 1{,}26$ eli sama tulos kuin esimerkissä saatiin odotusarvon tavallisella laskutavalla.

Esimerkki 5

Heitetään viisi kertaa oktaedrin muotoista noppaa, jonka sivutahkoissa on silmäluvut 1–8. Satunnaismuuttuja X kuvaa silmäluvun 7 esiintymiskertojen lukumäärää.
a) Mitä jakaumaa satunnaismuuttuja noudattaa?
b) Määritä satunnaismuuttujan odotusarvo ja keskihajonta.

Ratkaisu

a) Kyseessä on tapahtuman esiintymiskertojen määrä toistokokeessa, joten satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa. Jakauman parametrit ovat $n = 5$ ja $p = \frac{1}{8}$.

b) Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta kaavojen avulla.

Odotusarvo on

$$E(X) = np = 5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Keskihajonta on

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}} = 0{,}7395... \approx 0{,}74.$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Jotkut laskentaohjelmat antavat odotusarvon ja keskihajonnan suoraan sen jälkeen, kun on syöttänyt arvot binomijakauman parametreille n ja p.

Vastaus

a) $X \sim \text{Bin}\left(5, \frac{1}{8}\right)$

b) $E(X) = 0{,}625$ ja $\sigma(X) = 0{,}74$

Avainkäsitteet

- toistokoe
- binomijakauma