Todennäköisyyslaskennan kertausta

Esimerkki 1

Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa on

a) 7

b) alle 7

c) vähintään 8?

Ratkaisu

Havainnollistetaan alkeistapauksia ruudukolla.

a) Merkitään ruudukkoon ne silmälukuparit, joiden summa on seitsemän.

Suotuisia alkeistapauksia on kuusi. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{summa } 7) = \frac{6}{36} = 0{,}1666\ldots \approx 0{,}17$$

b) Merkitään ruudukkoon ne silmälukuparit, joiden summa on alle seitsemän.

Todennäköisyyden laskeminen

Tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{\text{tapahtumalle } A \text{ suotuisten alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}.$$

Alkeistapauksia voi myös kuvata jokin geometrinen mitta, kuten janan pituus tai kuvion pinta-ala. Tilastoaineistosta todennäköisyyksiä lasketaan samalla tavalla kuin prosenttiosuuksia.

6		×	×	×	×	×
5			×	×	×	×
4				×	×	×
3					×	×
2						×
1						
	1	2	3	4	5	6

1. noppa

... noppaparit, joiden summa ... alkeistapauksia on 15. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{summa vähintään } 8) = \frac{15}{36} = 0{,}4166\ldots \approx 0{,}42$

Vastaus

a) ...

b) 0,42

Kertolaskusääntö

Todennäköisyys, että kaksi tapahtumaa A ja B molemmat tapahtuvat, on

$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$.

Esimerkki 2

Sini-, harmaa- ja vihreäsilmäiset ovat vaaleasilmäisiä. Suomalaisista noin 89 prosentilla on vaaleat silmät ja lopuilla on tummat silmät. Millä todennäköisyydellä kahdesta satunnaisesti valitusta suomalaisesta

a) molemmilla on vaaleat silmät

b) molemmilla on tummat silmät

c) toisella on vaaleat ja toisella tummat silmät?

Ratkaisu

a) Todennäköisyys, että satunnaisesti valitulla suomalaisella on vaaleat silmät, on 0,89.

Lasketaan todennäköisyys, että kahdella satunnaisesti valitulla suomalaisella on vaaleat silmät.

P(ensimmäisellä on vaaleat silmät ja toisella on vaaleat silmät)

$0{,}89 \cdot 0{,}89 = 0{,}7921 \approx 0{,}79$

b) Tummasilmäisiä on

$100\,\% - 89\,\% = 11\,\%$.

Lasketaan todennäköisyys, että kahdella satunnaisesti valitulla suomalaisella on tummat silmät.

P(ensimmäisellä on tummat silmät ja toisella on tummat silmät) =

... $1 = 0{,}0121 \approx 0{,}012$

c) Lasketaan todennäköisyys, että satunnaisesti valituista suomalaisista toisella on vaaleat silmät ja toisella tummat.

P(ensimmäisellä vaaleat ja toisella tummat tai ensimmäisellä tummat ja toisella vaaleat) =

$0{,}89 \cdot 0{,}11 + 0{,}11 \cdot 0{,}89 = 0{,}1958 \approx 0{,}20$

Yhteenlaskusääntö

Todennäköisyys, että kahdesta tapahtumasta A ja B toinen tapahtuu, on

$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$,

kun A ja B eivät voi tapahtua yhtä aikaa.

Esimerkki 3

Korttipakasta nostetaan neljä korttia. Millä todennäköisyydellä kaikki kortit ovat patoja?

Ratkaisu

Pakassa on 52 korttia, joista patoja on 13. Kun kortteja nostetaan pakasta, pakassa olevien korttien määrä vähenee. Lasketaan todennäköisyys, että pakasta nostetaan neljä pataa.

$P(\text{kaikki kortit patoja}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} = 0{,}002641\ldots \approx 0{,}0026$

Vastaus

Todennäköisyys on 0,0026.

Esimerkki 4

Kreikkalaisista 43 % asuu kaupungissa. Millä todennäköisyydellä neljästä satunnaisesti valitusta kreikkalaisesta ainakin yksi asuu kaupungissa?

Vastaus

Ratkaisu

öisyys on

a) 0,79

b) 0,012

c) 0,20.

Todennäköisyys, että yksi satunnaisesti valittu kreikkalainen ei asu kaupungissa, on

P(ei asu kaupungissa) = 1 – 0,43 = 0,57.

Tapahtuman ”ainakin yksi asuu kaupungissa” vastatapahtuma on, että ”kukaan neljästä ei asu kaupungissa”.

Todennäköisyys, että kukaan neljästä kreikkalaisesta ei asu kaupungissa, on

P(kukaan neljästä ei asu kaupungissa) =

$0{,}57 \cdot 0{,}57 \cdot 0{,}57 \cdot 0{,}57 = 0{,}57^4$.

Lasketaan todennäköisyys, että ainakin yksi asuu kaupungissa.

P(ainakin yksi asuu kaupungissa) =

1 – P(kukaan neljästä ei asu kaupungissa) =

$1 - 0{,}57^4 = 0{,}8944\ldots \approx 0{,}89$

Vastaus

Todennäköisyys on 0,89.

Vastatapahtuma

Tapahtuma ja vastatapahtuma kattavat satunnaisilmiön kaikki mahdolliset tulokset, eivätkä ne voi toteutua samanaikaisesti. Tapahtuman ja sen vastatapahtuman todennäköisyyksien summa on

P(tapahtuma) + P(vastatapahtuma) = 1.

Tapahtuman todennäköisyys voidaan laskea vastatapahtuman avulla.

P(tapahtuma) = 1 – P(vastatapahtuma)

Esimerkki 5

Veljekset Aapo, Onni, Toivo ja Väinö asettuvat jonoon.
a) Kuinka moneen eri järjestykseen he voivat asettua?
b) Millä todennäköisyydellä veljekset asettuvat jonoon nuorimmasta vanhimpaan?

Ratkaisu

a) Ensimmäisenä jonoon voi asettua kuka tahansa veljeksistä. Toisena voi olla kuka tahansa kolmesta jäljellä olevasta veljeksestä. Kolmantena voi olla kumpi tahansa kahdesta jäljellä olevasta.

Tuloperiaatteen mukaan eri järjestyksiä on
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Järjestysten lukumäärä voidaan merkitä lyhyesti luvun 4 kertomana.
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) Veljekset voivat asettua jonoon ikäjärjestyksessä nuorimmasta alkaen vain yhdellä tavalla.

Todennäköisyys, että veljekset asettuvat jonoon nuorimmasta vanhimpaan, on

$P(\text{nuorimmasta vanhimpaan}) = \frac{1}{24} = 0{,}04166\ldots \approx 0{,}042.$

Vastaus

a) Veljekset voivat asettua 24 eri järjestykseen.
b) Todennäköisyys, että veljekset asettuvat jonoon nuorimmasta vanhimpaan, on 0,042.

Kertoma ja jonojen lukumäärä

Luvun n kertoma on

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$

Erityistapauksena nollan kertoma on $0! = 1$.

n jäsenen joukko voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla.

Esimerkki 6

Laatikossa on yhteensä 17 numeroitua palloa, joista seitsemän on vihreitä ja loput ovat valkoisia. Laatikosta nostetaan silmät kiinni viisi palloa.
a) Kuinka monta erilaista viiden pallon yhdistelmää on?
b) Millä todennäköisyydellä kaikki nostetut pallot ovat vihreitä?
c) Millä todennäköisyydellä nostetaan kaksi vihreää ja kolme valkoista palloa?

Ratkaisu

a) Lasketaan, kuinka monta viiden pallon yhdistelmää saadaan 17 pallosta.

$$\binom{17}{5} = 6\ 188$$

b) *Tapa 1*

Vihreitä palloja on seitsemän. Seitsemästä pallosta voidaan valita viisi palloa $\binom{7}{5} = 21$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys, että nostetaan viisi vihreää palloa.

$$P(\text{kaikki pallot vihreitä}) = \frac{21}{6\ 188} = 0{,}003393\ldots \approx 0{,}0034$$

Tapa 2

Todennäköisyys voidaan laskea myös kertolaskusäännöllä.

$P(\text{kaikki pallot vihreitä}) = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} =$
$0{,}003393\ldots \approx 0{,}0034$

c) Vihreitä palloja on seitsemän. Seitsemästä pallosta voidaan valita kaksi palloa $\binom{7}{2} = 21$ tavalla.

Valkoisia palloja on 17 – 7 = 10. Niistä kolme voidaan valita $\binom{10}{3} = 120$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys, että nostetaan kaksi vihreää ja kolme valkoista palloa.

$P(\text{kaksi vihreää ja kolme valkoista palloa}) = \frac{21 \cdot 120}{6\,188} =$
$\frac{2\,520}{6\,188} = 0{,}4072\ldots \approx 0{,}41$

Vastaus

a) Erilaisia viiden pallon yhdistelmiä on 6 188.

b) Todennäköisyys on 0,0034.

c) Todennäköisyys on 0,41.

Ryhmien lukumäärä

Joukossa on n jäsentä, ja siitä valitaan pienempi ryhmä, jossa on k jäsentä. Erilaisten ryhmien lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}^{k \text{ kappaletta}}}{k!}.$$

$\binom{n}{k}$ lasketaan laskentaohjelmalla tai laskimella.

Laskettaessa toiminto voi olla esimerkiksi nCr, Kombinaatio tai Binomikerroin. Jos tällaista toimintoa ei löydy, voidaan käyttää taulukkokirjan kaavaa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Avainkäsitteet

- todennäköisyys
- alkeistapaus
- suotuisa alkeistapaus
- kertolaskusääntö
- yhteenlaskusääntö
- vastatapahtuma
- kertoma
- jonojen lukumäärä
- ryhmien lukumäärä