

# Satunnaismuuttuja ja sen odotusarvo

## Esimerkki 1

Heitetään kahta noppaa. Mitä arvoja silmälukujen summa voi saada?

### Ratkaisu

Pienin mahdollinen silmälukujen summa on  $1 + 1 = 2$ .

Suurin mahdollinen silmälukujen summa on  $6 + 6 = 12$ .

Mahdollisia silmälukujen summan arvoja ovat myös kaikki kokonaisluvut näiden lukujen väliltä.

### Vastaus

Silmälukujen summan arvo on jokin kokonaislukuista 2, 3, 4, ..., 11 ja 12.

## Satunnaismuuttuja

Satunnaisilmiöön liittyvää muuttujaa kutsutaan satunnaismuuttujaksi. Samaan satunnaisilmiöön voi liittyä useampia satunnaismuuttujia. Jos satunnaisilmiö on

kahden nopan heitto, satunnaismuuttuja voi ilmaista esimerkiksi silmälukujen summan, silmälukujen tulon tai kuutosten lukumäärän.

Vastaavalla tavalla kuin tilastollinen muuttuja myös satunnaismuuttuja voi olla diskreetti tai jatkuva.

Esimerkissä 1 silmälukujen summa kahden nopan heitossa on diskreetti satunnaismuuttuja, koska se voi saada vain erillisiä arvoja. Jatkuva satunnaismuuttuja on esimerkiksi satunnaisesti valitun suomalaisen miehen pituus, joka voi saada mitä tahansa arvoja esimerkiksi väliltä 150 cm... 220 cm.

Satunnaismuuttujan jakauma muodostuu satunnaismuuttujan mahdollisista arvoista ja näiden arvojen todennäköisyyksistä.

#### Esimerkki 2

Tietokonepelissä heitetään virtuaalista noppaa. Jos pelaaja saa silmäluvuksi 5 tai 6, hän saa kahdeksan pistettä. Silmäluvuilla 1–4 pelaaja menettää kaksi pistettä. Alussa pelaajan pistemäärä on nolla.

- a) Arvioi pelaajan pistemäärä 60 pelikierroksen jälkeen.
- b) Kuinka monta pistettä pelaaja saa keskimäärin yhtä pelikierrosta kohden?
- c) Miten b-kohdan tulos voidaan laskea suoraan mahdollisista yhden kierroksen pistemääristä ja niiden todennäköisyyksistä?

#### Ratkaisu

a) Todennäköisyys, että pelaaja saa yhdellä kierroksella kahdeksan pistettä, on  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Voidaan arvioida, että tämä tapahtuu noin  $\frac{1}{3}$ :lla pelikierroksista. Kahdeksan pisteen pelikierroksia on arvion mukaan

$$\frac{1}{3} \cdot 60 = 20.$$

Lopuilla pelikerroksilla pelaaja menettää kaksi pistettä.

Näitä on noin  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  kaikista pelikierroksista. Kahden menetetyn pisteen pelikierroksia on arvion mukaan

$$\frac{2}{3} \cdot 60 = 40.$$

Lasketaan arvio pelaajan saamien pisteiden yhteismäärälle.

$$20 \cdot 8 = 160$$

Lasketaan arvio pelaajan menettämien pisteiden yhteismäärälle.

$$40 \cdot 2 = 80$$

Pelaajan pistemäärä 60 pelikierroksen jälkeen on tällöin

$$160 - 80 = 80.$$

b) Jaetaan a-kohdassa saatu pistemääräarvio pelikierrosten lukumäärällä.

$$\frac{80}{60} = 1,333... \approx 1,3$$

Keskimääräinen pistemäärä kierrosta kohden on 1,3.

c) b-kohdan tulos voidaan laskea myös ilman a-kohdan välituloksia, kun kumpikin mahdollinen yhden kierroksen pistemäärä kerrotaan todennäköisyydellään ja nämä tulot lasketaan yhteen. Tällöin tulkitaan, että kahden pisteen menetys tarkoittaa -2 pisteen lisäystä.

$$\frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3} \cdot (-2) = \frac{4}{3} = 1,333... \approx 1,3$$

Vastaus

- a) 80 pistettä
- b) 1,3 pistettä
- c) Kertomalla kumpikin mahdollinen yhden kierroksen pistemäärä todennäköisyydellään ja laskemalla näiden summa.

## Satunnaismuuttujan odotusarvo

Diskreetin satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo lasketaan sen mahdollisten arvojen ja niiden todennäköisyyksien avulla.

Satunnaismuuttujan odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n,$$

missä

$x_1, x_2, \dots, x_n$  ovat satunnaismuuttujan mahdolliset arvot

$p_1, p_2, \dots, p_n$  ovat mahdollisten arvojen todennäköisyydet.

Odotusarvon tunnus  $E$  tulee sen englanninkielisestä nimityksestä *expected value*. Odotusarvon tunnuksena käytetään myös kreikkalaista kirjainta  $\mu$ .

Odotusarvo kuvaa satunnaismuuttujan saamien arvojen keskiarvoa, kun satunnaisilmiön toistojen määrä on suuri. Satunnaismuuttujan odotusarvo vastaa tilastollisen muuttujan keskiarvoa.

### Esimerkki 3

Arpajaisissa on myynnissä kahden euron hintaisia arpoja, joissa on voittoja oheisen taulukon mukaisesti.

| Voitto (€) | Osuus kaikista arvoista |
|------------|-------------------------|
| 10         | 4 %                     |

|            |      |
|------------|------|
| 5          | 20 % |
| Ei voittoa | 76 % |

Avaa OpenOffice-tiedosto →

a) Määritä satunnaismuuttujan ”yhdeällä arvalla saatava voitto” mahdolliset arvot ja todennäköisyydet, kun voitossa otetaan huomioon arvan hinta.

b) Laske yhdellä arvalla saatavan voiton odotusarvo.

c) Tulkitse b-kohdan tulosta.

Ratkaisu

a) Vähennetään kustakin voitosta arvan hinta 2 €.

Todennäköisyydet saadaan suoraan arpojen osuuksista.

| Satunnaismuuttujan arvo (€) | Todennäköisyys |
|-----------------------------|----------------|
| 8                           | 0,04           |
| 3                           | 0,20           |
| -2                          | 0,76           |

b)  $E(\text{voitto}) = 0,04 \cdot 8 + 0,20 \cdot 3 + 0,76 \cdot (-2) = -0,6 \text{ (€)}$

Odotusarvo on -0,6 €.

c) Jos ostaa useita arpoja, jää pidemmän päälle tappiolle keskimäärin 0,6 euroa arpaa kohden. Arpajaisten järjestäjälle arpojen myyminen sen sijaan on kannattavaa, koska järjestäjä saa voittoa keskimäärin 0,6 euroa arvalta.



## Esimerkki 4

Karkkipussissa on neljä hedelmämakeista ja viisi salmiakkimakeista. Pussista nostetaan sinne katsomatta kolme makeista. Laske salmiakkimakeisten määrän odotusarvo.

## Ratkaisu

Mahdolliset salmiakkimakeisten määrät ovat 0, 1, 2 ja 3.

Lasketaan näiden määrien todennäköisyydet ryhmien avulla. Koska makeisia on  $4 + 5 = 9$ , kaiken kaikkiaan

pussista voidaan nostaa kolmen makeisen ryhmä  $\binom{9}{3} = 84$

eri tavalla.

| Salmiakkimakeisten lukumäärä | Suotuisten alkeistapausten lukumäärä | Todennäköisyys |
|------------------------------|--------------------------------------|----------------|
|                              |                                      |                |

|   |                                                     |                                                     |
|---|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 0 | $\binom{4}{3} = 4$                                  | $\frac{4}{84} = 0,047619\dots$<br>$\approx 0,0476$  |
| 1 | $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot 6 = 30$  | $\frac{30}{84} = 0,357142\dots$<br>$\approx 0,3571$ |
| 2 | $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = 10 \cdot 4 = 40$ | $\frac{40}{84} = 0,476190\dots$<br>$\approx 0,4762$ |
| 3 | $\binom{5}{3} = 10$                                 | $\frac{10}{84} = 0,119047\dots$<br>$\approx 0,1190$ |

Lasketaan satunnaismuuttujan ”salmiakkimakeisten lukumäärä” odotusarvo.

$E(\text{salmiakkimakeisten lukumäärä}) =$

$$0,0476 \cdot 0 + 0,3571 \cdot 1 + 0,4762 \cdot 2 + 0,1190 \cdot 3 = 1,6665 \approx 1,7$$

Vastaus

Salmiakkimakeisten määrän odotusarvo on 1,7.

## Satunnaismuuttujan keskihajonta

Vastaavalla tavalla kuin tilastolliselle muuttujalle myös satunnaismuuttujalle voidaan laskea keskihajonta.

Satunnaismuuttujan keskihajonta kuvaa sitä, miten tiiviisti jakauma sijoittuu odotusarvon ympärille.

Satunnaismuuttujan keskihajonta määritetään laskentaohjelman avulla.

Esimerkki 5

Taulukossa on esitetty satunnaismuuttujan  $X$  jakauma.

a) Määritä satunnaismuuttujan odotusarvo ja keskihajonta.

b) Havainnollista jakaumaa pylväskuviolla.

| Satunnaismuuttujan arvo<br>$x_i$ | Todennäköisyys<br>$p_i$ |
|----------------------------------|-------------------------|
| 1                                | 0,05                    |
| 2                                | 0,4                     |
| 3                                | 0,1                     |
| 4                                | 0,25                    |
| 5                                | 0,2                     |

Avaa OpenOffice-tiedosto →

Ratkaisu

a) Syötetään taulukon tiedot laskentaohjelman taulukkonäkymään. Määritetään yhden muuttujan tilastotoiminnoilla jakauman tunnusluvut niin, että todennäköisyydet ovat frekvensseinä.

Odotusarvo on ohjelman antama keskiarvo.

$$E(X) = \bar{x} = 3,15$$

Keskihajonta on

$$\sigma = 1,2757... \approx 1,28.$$

b) Piirretään jakaumaa kuvaava pylväskuvio.

Avainkäsitteet

- satunnaismuuttuja
- satunnaismuuttujan odotusarvo
- satunnaismuuttujan keskihajonta

