

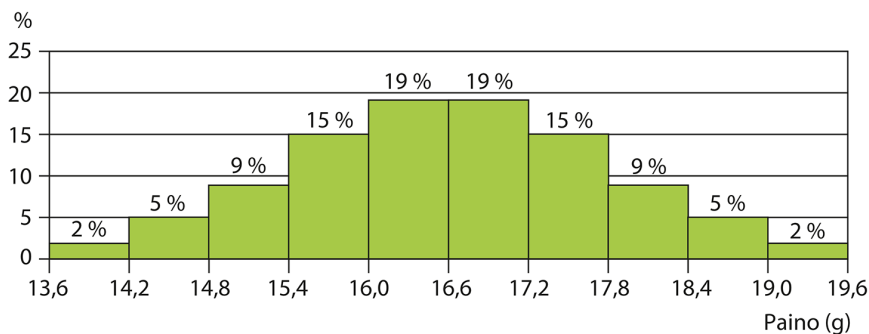
Normaalijakauma

Esimerkki 1

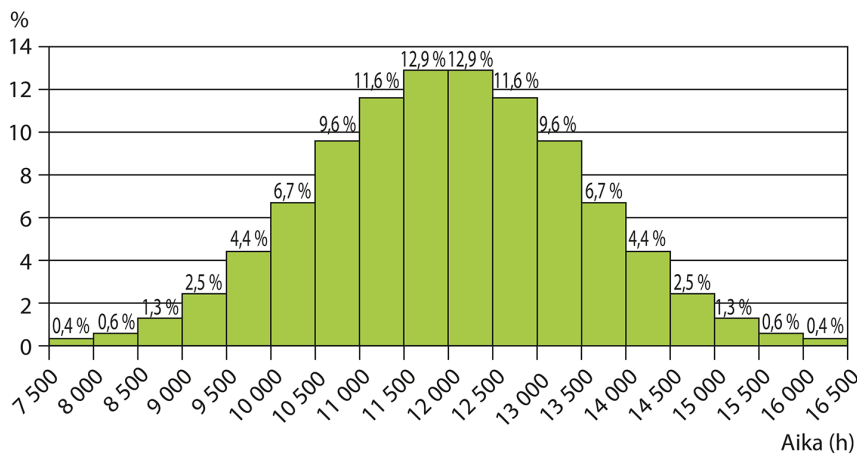
Vertaa toisiinsa alla olevia jakaumia.

- Mitä huomaat?
- Millä todennäköisyydellä punarinnan paino on alle 16,6 g?
- Millä todennäköisyydellä energiansäästölamppu palaa alle 15 500 tuntia?

Punarinnan paino



Energiansäästölamppujen palamisaika



Ratkaisu

a) Punarinnan painon ja energiansäästölamppun palamisajan jakaumat muistuttavat toisiaan. Molemmat jakaumat näyttävät symmetrisiltä.

b) Lasketaan viiden ensimmäisen luokan prosenttiluvut yhteen.

$$2 \% + 5 \% + 9 \% + 15 \% + 19 \% = 50 \%$$

Kysytty todennäköisyys on 0,5.

c) Lampuista 1 % palaa yli 15 500 tuntia. Alle 15 500 tuntia palavien lamppujen osuus on $100 \% - 1 \% = 99 \%$.

Kysytty todennäköisyys on 0,99.

Vastaus

a) Jakaumat ovat samankaltaiset.

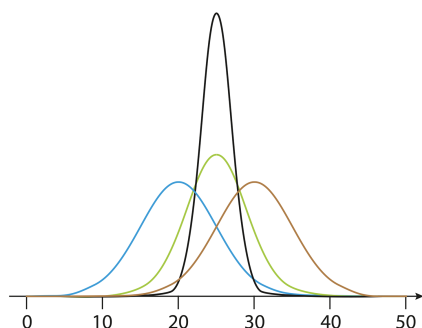
b) Todennäköisyys on 0,5.

c) Todennäköisyys on 0,99.

Normaalijakauma

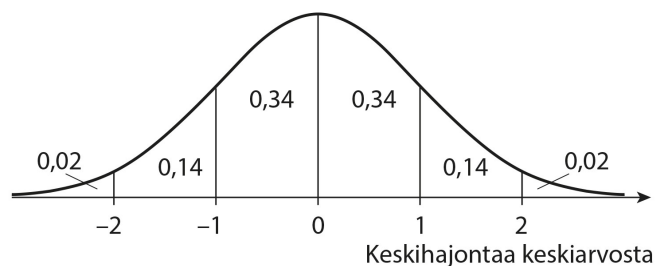
Punarinnan paino ja energiansäästölamppun palamisaika noudattavat normaalijakaumaa. Normaalijakaumassa keskialueen arvot ovat yleisempiä kuin kummankaan

ääripään arvot. Odotusarvo μ määrittää jakauman sijainnin ja keskihajonta σ muodon. Normaalijakauma on symmetrinen odotusarvon suhteen. Tämä nähdään myös normaalijakauman kuvaajasta, jota kutsutaan Gaussin käyräksi tai kellokäyräksi.



Normaalijakauma on tärkein ja tunnetuin jatkuva todennäköisyysjakauma. Sitä noudattavat yleensä muuttujat, joiden saamat havaintoarvot ovat riippuvaisia monista satunnaistekijöistä. Tällaisia muuttujia ovat esimerkiksi pituus, paino ja laitteiden käyttöikä.

Normaalijakaumaan liittyvä todennäköisyys voidaan tulkita Gaussin käyrän ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-alaksi. Kuvaajan ja x -akselin rajaaman koko alueen pinta-ala on 1. Jos satunnaismuuttuja noudattaa normaalijakaumaa, sen arvot poikkeavat odotusarvosta oheisen kuvan mukaisesti.



Merkintä $X \sim N(\mu, \sigma)$ tarkoittaa, että satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on μ ja keskihajonta on σ . Odotusarvo ilmoitetaan usein myös keskiarvona.

Esimerkki 3

arvo on

yhtä suuri

Todennäköisyys, että vauvojen syntymäpaino on ≤ 2500 g, on 0,036. Jos syntymäpainon keskiarvo on 3500 g ja keskihajonta 570 g, millä todennäköisyydellä vauvo painaa

a) korkeintaan 2 500 g

b) korkeintaan 4 000 g

c) 2 500–4 000 g?

Ratkaisu

Ratkaisu

Todennäköisyydet saadaan laskentaohjelmalla syöttämällä

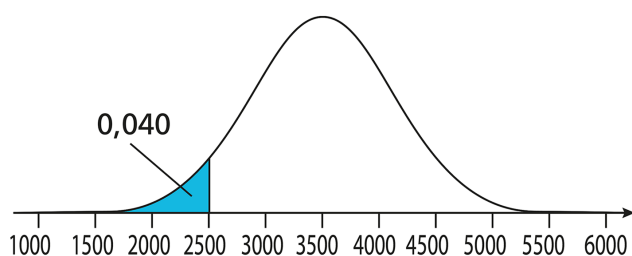
Todennäköisyydet saadaan laskentaohjelmalla syöttämällä

ojien keskiarvoksi $\mu = 3500$ ja keskihajontaksi $\sigma = 570$ ja

käytetään satunnaismuuttujaa X on vauvan syntymäpaino.

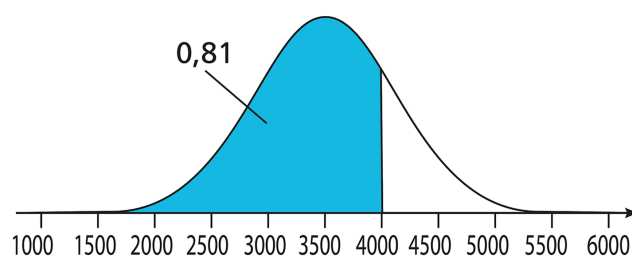
a) Todennäköisyys, että vauva painaa korkeintaan 2 500 g, pienempi tai yhtä suuri kuin 88, on

$$P(X \leq 2500) = 0,036 \approx 0,04.$$



b) Todennäköisyys, että vauva painaa korkeintaan 4 000 g, on

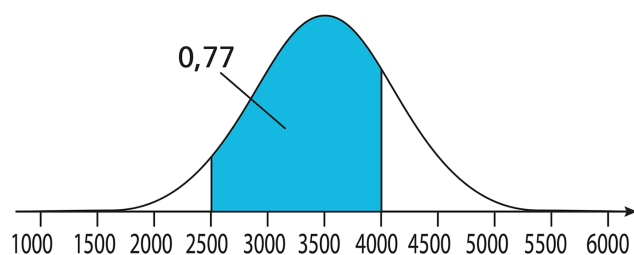
$$P(X \leq 4000) = 0,8098 \dots \approx 0,81.$$



c) Todennäköisyys, että vauvan paino on välillä 2 500–4 000

g, on

$$P(2\,500 \leq X \leq 4\,000) = 0,7701 \dots \approx 0,77.$$



c-kohdan todennäköisyyden voi laskea myös vähentämällä b-kohdan todennäköisyydestä a-kohdan todennäköisyys.

Vastaus

Vauva painaa

- a) korkeintaan 2 500 g todennäköisyydellä 0,040
- b) korkeintaan 4 000 g todennäköisyydellä 0,81
- c) 2 500–4 000 g todennäköisyydellä 0,77.

Esimerkki 4

Puutarhurin tutkimuksen mukaan ison auringonkukan korkeus noudattaa likimain normaalijakaumaa. Viime vuonna korkeuden keskiarvo oli 210 cm ja keskihajonta 38 cm. Millä todennäköisyydellä

- a) auringonkukan korkeus on korkeintaan 226 cm
- b) seitsemästä auringonkukasta kaikkien korkeus on korkeintaan 226 cm?

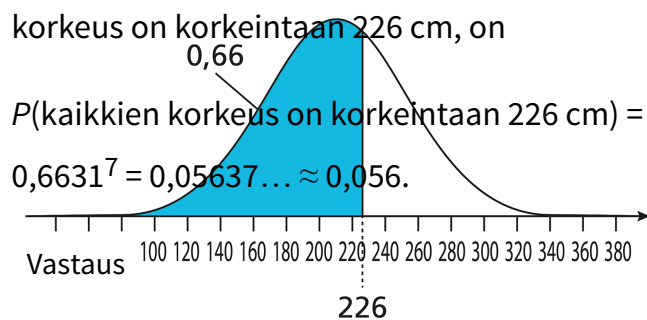
Ratkaisu

- a) Todennäköisyyden saa laskettua laskentaohjelmalla. Syötetään keskiarvo $\mu = 210$ ja keskihajonta $\sigma = 38$. Satunnaismuuttuja X on auringonkukan korkeus.

Todennäköisyys, että auringonkukan korkeus on korkeintaan 226 cm, on

$$P(X \leq 226) = 0,663141 \dots \approx 0,66.$$

- b) Todennäköisyys, että jokaisen seitsemän auringonkukan



a) Auringonkukan korkeus on korkeintaan 226 cm todennäköisyydellä 0,66.

b) Kaikkien seitsemän auringonkukan korkeus on korkeintaan 226 cm todennäköisyydellä 0,056.

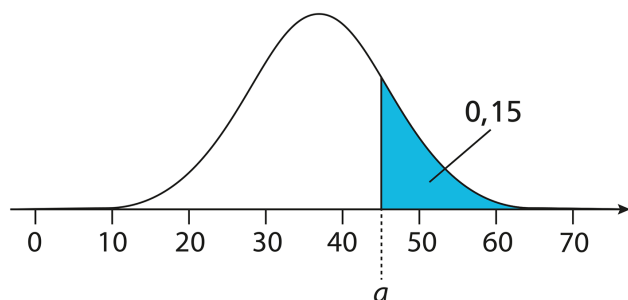
Esimerkki 5

Pääsykokeeseen osallistuneiden hakijoiden pistemäärät noudattavat normaalijakaumaa. Kokeen pistemäärän keskiarvo oli 37,0 ja keskihajonta 8,3. Mikä pistemäärä pitää asettaa hyväksymisrajaksi, kun 15 % hakijoista valitaan?

Ratkaisu

Syötetään laskentaohjelmaan pääsykokeen pistemäärien keskiarvo $\mu = 37,0$ ja keskihajonta $\sigma = 8,3$.

Haetaan ohjelman avulla pistemäärä a , jolle todennäköisyys $P(X \geq a) = 0,15$. Satunnaismuuttuja X on kokeen pistemäärä.



Pistemääräksi a saadaan $45,60 \dots \approx 46$.

Vastaus

Pääsykokeen hyväksymisraja on 46 pistettä.

Avainkäsitteet

- jatkuva jakauma
- normaalijakauma