

Jakauman normittaminen

Esimerkki 1

Ihmisen pituus noudattaa normaalijakaumaa. Piia on 169 cm pitkä ja Paavo 181 cm. Naisten keskipituus on 166 cm ja keskihajonta 5,9 cm. Miesten keskipituus on 178 cm ja keskihajonta 6,4 cm. Laske, kuinka monen keskihajonnan verran

- a) Paavon pituus poikkeaa miesten keskipituudesta
- b) Piian pituus poikkeaa naisten keskipituudesta.
- c) Kumpi on suhteellisesti pidempi, Paavo vai Piia?



Ratkaisu

- a) Paavon pituus poikkeaa miesten keskipituudesta

$$\frac{181 - 178}{6,4} = \frac{3}{6,4} = 0,46875 \approx 0,47 \text{ keskihajontaa.}$$

- b) Piian pituus poikkeaa naisten keskipituudesta

$$\frac{169 - 166}{5,9} = \frac{3}{5,9} = 0,5084... \approx 0,51 \text{ keskihajontaa.}$$

- c) Sekä Paavo että Piia ovat molemmat keskimääräistä

pidempiä. Koska Piian pituuden poikkeama keskiarvosta on keskihajonnalla mitattuna suurempi kuin Paavon, Piia on suhteellisesti pidempi kuin Paavo.

Vastaus

- a) Paavon pituus on 0,47 keskihajontaa suurempi kuin keskiarvo.
- b) Piian pituus on 0,51 keskihajontaa suurempi kuin keskiarvo.
- c) Piia on suhteellisesti pidempi kuin Paavo.

Normitettu arvo ja normittaminen

Kun kahden eri satunnaismuuttujan arvot noudattavat normaalijakaumaa, mutta niiden odotusarvot ja keskihajonnat poikkeavat toisistaan, niitä ei voida suoraan verrata keskenään. Muuttujien arvoja voidaan verrata, kun lasketaan arvoja vastaavat normitetut arvot. Normitettu arvo kertoo, kuinka monen keskihajonnan verran ja kumpaan suuntaan muuttujan arvo poikkeaa odotusarvosta. Normaalijakaumaa, jossa odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1, kutsutaan normitetuksi normaalijakaumaksi.

Positiivinen normitettu arvo tarkoittaa sitä, että satunnaismuuttujan arvo on odotusarvoa suurempi. Negatiivinen normitettu arvo tarkoittaa vastaavasti, että satunnaismuuttujan arvo on keskiarvoa pienempi.

Normitettu arvo z on

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

missä

x on satunnaismuuttujan arvo

μ on odotusarvo

σ on muuttujan arvojen keskihajonta.

Esimerkiksi normitettu arvo $z = -1$ tarkoittaa sitä, että muuttujan arvo on yhden keskihajonnan verran pienempi kuin odotusarvo.

Mikäli normaalijakauman odotusarvoa tai keskihajontaa ei tunneta, mutta jokin jakaumaan liittyvä todennäköisyys tunnetaan, odotusarvo tai keskihajonta voidaan usein määrittää normitetun normaalijakauman avulla.

Normitettujen arvojen avulla voidaan verrata toisiinsa kahta samantyyppistä jakaumaa myös silloin, kun ne eivät ole normaalisti jakautuneita.

Esimerkki 2

Satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa. Määritä todennäköisyys

- a) $P(Z \leq 1)$
- b) $P(-1 \leq Z \leq 1)$
- c) $P(Z \geq 1)$.

Ratkaisu

Todennäköisyydet saadaan suoraan laskentaohjelmalla. Normitetun normaalijakauman odotusarvo on $\mu = 0$ ja keskihajonta on $\sigma = 1$.

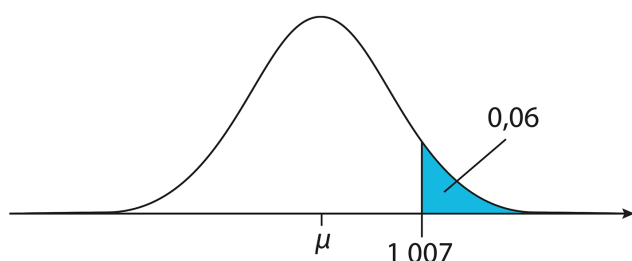
- a) $P(Z \leq 1) = 0,8413... \approx 0,84$
- b) $P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,6826... \approx 0,68$

Esimerkki 3

Todennäköisyys on määrä rasioissa muodattaa likimain
 a) 0,06 alijakaumaa, jonka keskihajonta on 19. Määritä
 tikkujen lukumäärän odotusarvo, kun tikkujen määrä on
 vähintään 1 007 todennäköisyydellä 0,06.

Ratkaisu

Ratkaistaan odotusarvo jakaumalle, jossa 6 % arvoista on vähintään 1 007.

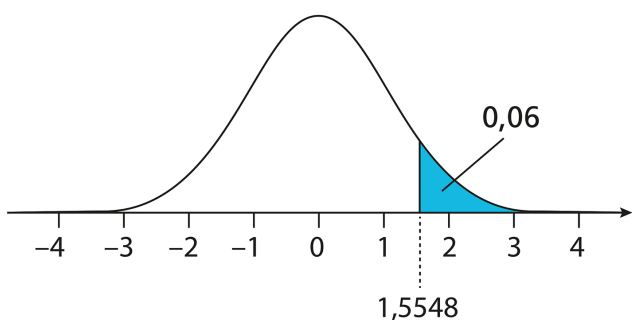


Laskentaohjelmat eivät yleensä laske suoraan odotusarvoa muiden tietojen perusteella. Selvitetään odotusarvo normitetun normaalijakauman avulla.

Syötetään laskentaohjelmaan odotusarvo 0 ja keskihajonta 1.

Selvitetään laskentaohjelmalla normitetun satunnaismuuttujan arvo a , jolle $P(Z \geq a) = 0,06$.

Saadaan $a = 1,554773... \approx 1,5548$.



Tapa 1

Yhtälön voi ratkaista myös

Käytetään normituskaavaa.

laskentaohjelmalla.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{1\,007 - \mu}{19} = 1,5548 \quad | \cdot 19$$

$$1\,007 - \mu = 29,5412$$

$$-\mu = 29,5412 - 1\,007$$

$$-\mu = -977,4588 \quad | : (-1)$$

$$\mu = 977,4588 \approx 977$$

Tapa 2

Lisätään odotusarvoon keskihajonta 1,5548-kertaisena ja muodostetaan yhtälö. Ratkaistaan yhtälöstä μ .

$$\mu + 1,5546 \cdot 19 = 1\,007$$

$$\mu + 29,5412 = 1\,007$$

$$\mu = 1\,007 - 29,5412$$

$$\mu = 977,4588 \approx 977$$

Vastaus

Cocktailtikkujen lukumäärän odotusarvo on 977.

Esimerkki 4

- a) Satunnaismuuttuja noudattaa normitettua normaalijakaumaa. Määritä odotusarvon suhteen symmetrinen väli, jolla satunnaismuuttujan arvo on todennäköisyydellä 95 %.
- b) Tuotannossa pakkauksen painon odotusarvo on 5 kg ja keskihajonta 100 g. Pakkauksista poistetaan ne 5 %, joiden paino poikkeaa eniten keskipainosta. Mitkä ovat ne painorajat, jotka johtavat pakkauksen hyväksyntään?

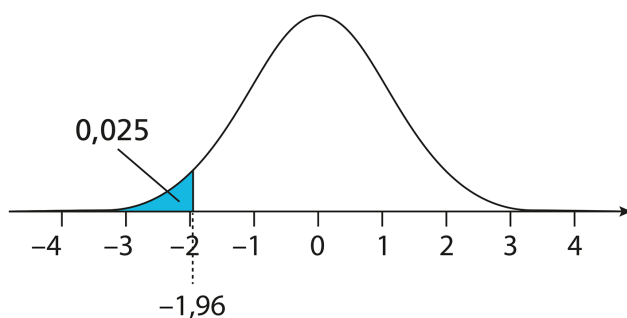
Ratkaisu

- a) Jakauma on symmetrinen, joten välin ulkopuolelle jää $100\% - 95\% = 5\%$ jakaumasta. Se jakautuu tasan välin kummallekin puolelle eli molemmille puolille jää $2,5\%$.

Syötetään laskentaohjelmaan odotusarvo $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$.

Selvitetään satunnaismuuttujan arvo a eli välin alaraja laskentaohjelmalla, kun alarajan vasemmalle puolelle jäävä todennäköisyys on 0,025.

$$P(Z \leq -1,96) = 0,025, \text{ joten } a = -1,96.$$



Selvitetään satunnaismuuttujan arvo b eli välin yläraja laskentaohjelmalla, kun ylärajan oikealle puolelle jäävä todennäköisyys on 0,025.

$$P(Z \geq 1,96) = 0,025, \text{ joten } b = 1,96.$$

Avainkäsitteet

- normitettu arvo
- normitettu normaalijakauma

