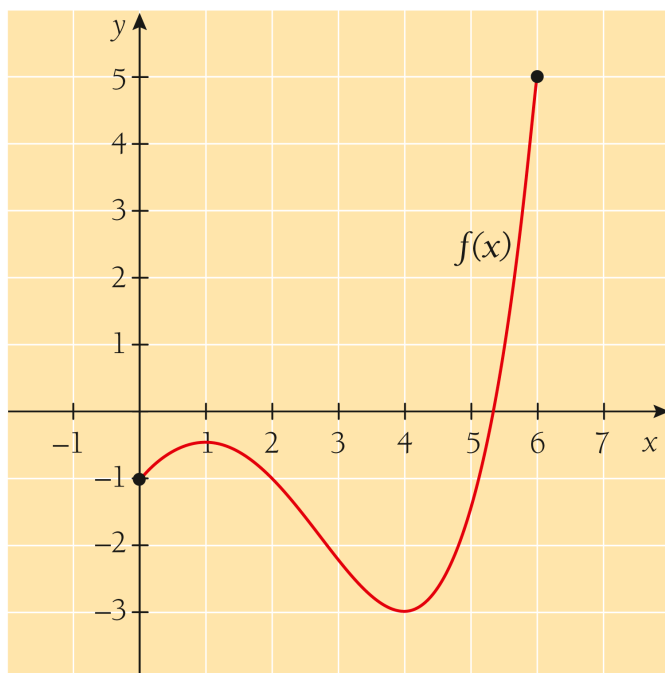


Suurin ja pienin arvo

Esimerkki 1

Kuvassa on funktion $f(x)$ kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 6$.



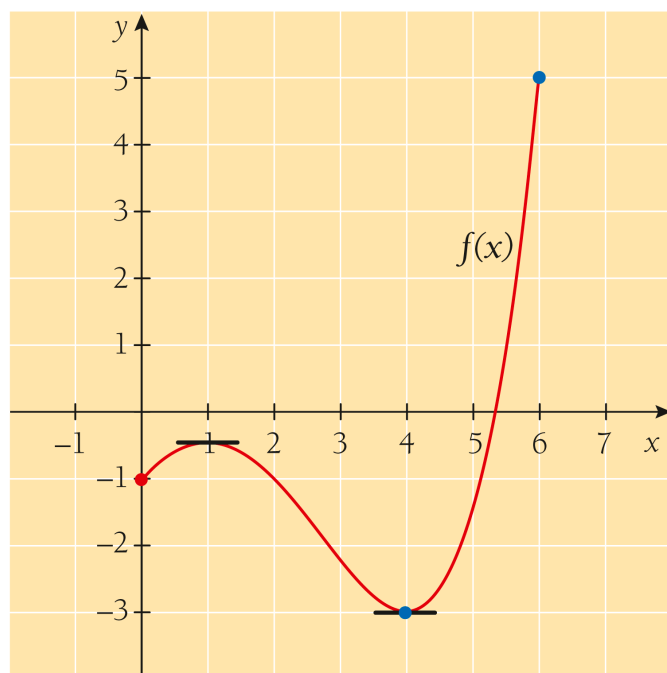
a) Määritä funktion $f(x)$ derivaatan nollakohdat.

b) Mikä on funktion suurin arvo tarkasteluvälillä? Millä arvoilla x arvolla funktio saa suurimman arvonsa?

c) Mikä on funktion pienin arvo tarkasteluvälillä? Millä muuttujan x arvolla funktio saa pienimmän arvonsa?

d) Mitä erityistä on niissä muuttujan x arvoissa, joilla funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

Ratkaisu



a) Derivaatan nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 4$.

b) Funktion suurin arvo tarkasteluvälillä on 5, ja funktio saa sen kohdassa $x = 6$.

c) Funktion pienin arvo tarkasteluvälillä on -3 , ja funktio saa sen kohdassa $x = 4$.

d) Kohta $x = 6$, jossa funktio saa suurimman arvonsa, on tarkasteluvälin toinen päätepiste. Kohta $x = 4$, jossa funktio saa pienimmän arvonsa, on toinen derivaatan nollakohdista.

Funktion suurin ja pienin arvo

Kohta c on funktion $f(x)$ suurin arvo kohdassa c , jos funktio ei

missään muussa kohdassa saa sitä suurempaa arvoa.

Kuvassa funktion suurin arvo on $f(c)$.

Funktiolla $f(x)$ on **pienin arvo** kohdassa c , jos funktio ei missään muussa kohdassa saa sitä pienempää arvoa.

Kuvassa funktion pienin arvo on $f(c)$.

Funktio voi saada suurimman tai pienimmän arvon useassa tai ei yhdessäkään kohdassa. Kuvassa funktiolla on suurin arvo kahdessa kohdassa. Pienintä arvoa sillä ei ole lainkaan.

Polynomifunktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä

Suljetuksi väliksi sanotaan muotoa $a \leq x \leq b$ olevaa väliä, jossa molemmat päätepisteet ovat mukana. Suljettu väli voidaan merkitä myös $[a, b]$.

Polynomifunktiolla $f(x)$ on suljetulla välillä aina suurin arvo ja pienin arvo. Ne ovat joko **välin päätepisteessä** tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Suurin ja pienin arvo voidaan selvittää laskennallisesti seuraavalla tavalla:

1. Derivoidaan funktio $f(x)$.
2. Määritetään derivaatan nollakohdat.
3. Lasketaan funktion $f(x)$ arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa. Näistä arvoista suurin on funktion suurin arvo ja pienin funktion pienin arvo tarkasteluvälillä.

Toinen mahdollinen tapa selvittää polynomifunktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä on laatia funktion kulkukaavio, rajata se tarkasteluvälille ja määrittää arvot kulkukaavion avulla.

Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla on **pienin arvo** välillä $-1 \leq x \leq 4$ kohdassa $x = 1$. **Pienin arvo on**

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4.$$

Koska funktion arvoa tutkitaan välillä $-1 \leq x \leq 4$, kulkukaavioon lisätään myös välin päätepisteet -1 ja 4 .

Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla on **suurin arvo** välillä $-1 \leq x \leq 4$ joko kohdassa $x = -1$ tai kohdassa $x = 4$.

Lasketaan molemmat arvot.

$f'(x)$		-	+	
$f(-1)$	$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5 = 8$			
$f(x)$				

Määritetään derivaatan nollakohdat.

Koska 10 on arvoista suurempi, se on funktion **suurin arvo**

välillä $-1 \leq x \leq 4$.

$$2x = 2 \quad | : 2$$

Vastaus kannattaa tarkistaa piirtämällä funktion $f(x)$ kuvaaja.

Ohjelmissa on yleensä kuvaajan analysointitoiminto suurimman ja pienimmän arvon määrittämiseen välillä. Pelkkä kuvaajasta luettu vastaus ei kuitenkaan ole riittävä, ellei tehtävää nimenomaan pyydetä ratkaisemaan kuvaajan tai ohjelman avulla.

Vastaus

Suurin arvo funktion $f(x)$ **pienin arvo** välillä $-1 \leq x \leq 4$ päätepisteissä

sekä välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. **Suurin ja**

Esimerkki 3 ovat näiden arvojen joukossa.

Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ suurin arvo välillä $[-3,$

$6]$.

$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 5 = 13$$

Ratkaisu

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$$

Väli $[-3, 6]$ on epäyhtälömerkein ilmaistuna $-3 \leq x \leq 6$.

Funktion suurin arvo välillä $-1 \leq x \leq 4$ on 13 ja pienin arvo 4 .

Derivoidaan funktio $f(x)$.

Tapa 2

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

Itään funktion $f(x)$ kulkukaavio. Derivaattafunktion f

erään muotoon suora nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$6x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 3$$

Molemmat derivaatan nollakohdat ovat tarkasteltavalla välillä $[-3, 6]$.

Lasketaan funktion $f(x)$ arvo välin $[-3, 6]$ päätepisteissä sekä välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

Laskentaohjelmalla saadaan

$$f(-3) = 27 \quad f(-2) = 44$$

$$f(6) = 108 \quad f(3) = -81.$$

Näistä arvoista suurin on 108, joka on funktion suurin arvo välillä $[-3, 6]$.

Vastaus

Suurin arvo on 108.

Esimerkki 4

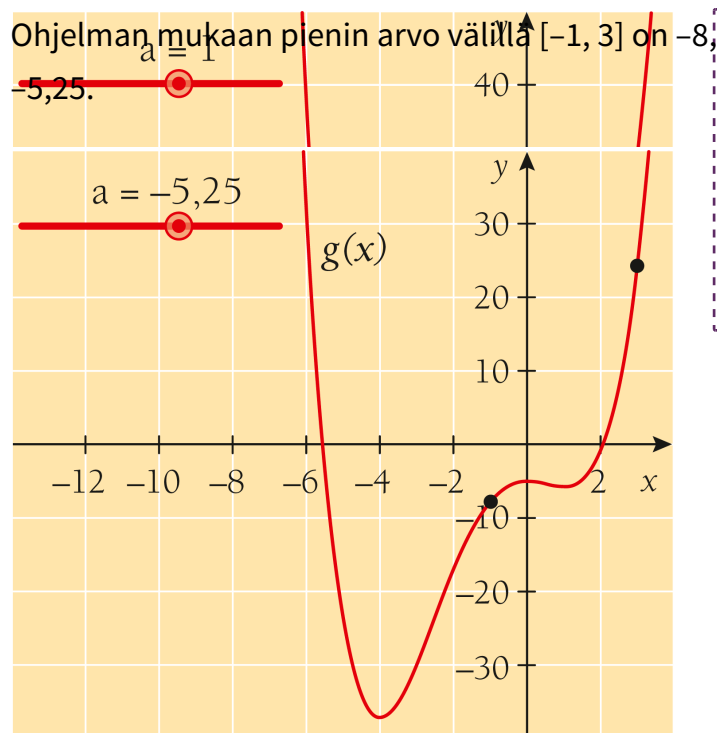
Määritä laskentaohjelman avulla vakiolle a sellainen arvo, että funktion $g(x)$ pienin arvo välillä $[-1, 3]$ on -8 . Perustele tulos laskennallisesti.

Piirretään funktion $g(x)$ kuvaaja geometria- tai laskentaohjelmalla ja luodaan vakiolle a liukusäädin. Kuvaan on merkitty tarkasteluvälin päätepisteet.

Vakion a muuttaminen nostaa ja laskee kuvaajaa, mutta ei muuta sen muotoa. Funktio saa aina pienimmän arvonsa tarkasteluvälillä kohdassa $x = -1$.

Muutetaan vakion a arvoa niin, että $g(-1) = -8$.

Säätimen asetuksia (rajat ja askel) voidaan joutua muuttamaan.



Funktion kuvaajan voi piirtää myös pelkästään välillä $[-1, 3]$. Toiminto voi olla ohjelmasta riippuen esimerkiksi

Funktio($\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + a, -1, 3$) tai

Piecewise($\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + a, -1 \leq x \leq 3$).

Laskennallisessa perustelussa täytyy varmistaa, että ohjelmasta saatu vakion a arvo on tarkka eikä pelkkä likiarvo. Lisäksi pitää perustella, miksi pienin arvo saadaan juuri välin alkupisteessä $x = -1$.

Derivoidaan funktio $g(x)$.

$$g'(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$$

Määritetään derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0$$

$$x = -4 \text{ tai } x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Derivaatan nollakohdista vain $x = 0$ ja $x = 1$ kuuluvat tarkasteluvälille $[-1, 3]$.

Lasketaan funktion $g(x)$ arvo välin päätepisteissä sekä välillä olevissa derivaatan nollakohdissa laskentaohjelman avulla.

a

Arvoista pienin on se, jossa vakiota a edeltävä luku on pienin. Tämä on arvo

Koska pienimmän arvon pitää olla -8 , vakion a arvo saadaan yhtälön avulla.

Ohjelmasta saatu vakion a arvo oli siis tarkka.

Vastaus

$$a = -5,25$$

Polynomifunktion yleinen suurin ja pienin arvo

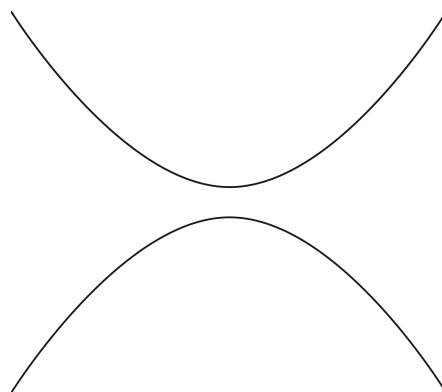
Jos tarkastelua ei ole rajattu suljetulle välille, polynomifunktiolla ei välttämättä ole suurinta arvoa, pienintä arvoa tai kumpaakaan.

Toisen asteen polynomifunktiolla on aina joko suurin arvo tai pienin arvo, mutta ei molempia.

- Jos funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, funktiolla on pienin arvo, mutta ei suurinta arvoa.
- Jos funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktiolla on suurin arvo, mutta ei pienintä arvoa.

Jos tarkastelua ei ole rajattu suljetulle välille, toisen asteen polynomifunktion suurin tai pienin arvo perustellaan joko kulkukaaviolla tai kuvaajan muodon avulla.

Kolmannen asteen polynomifunktiolla ei ole koskaan suurinta eikä pienintä arvoa, ellei tarkastelua rajoiteta jollekin välille.



Määritä funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 6$ suurin ja pienin arvo, jos ne ovat olemassa.

Ratkaisu

Koska toisen asteen termin kerroin 3 on positiivinen, funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktiolla on siis pienin arvo mutta ei suurinta arvoa. Etsitään funktion pienin arvo derivaatan avulla.

Derivoidaan funktio $f(x)$.

$$f'(x) = 6x - 12$$

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12 \quad | :6$$

$$x = 2$$

Ratkaisua voidaan jatkaa kahdella eri tavalla.

Tapa 1

Laaditaan funktion kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja on nouseva suora.

Kulkukaavion perusteella funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 2$.

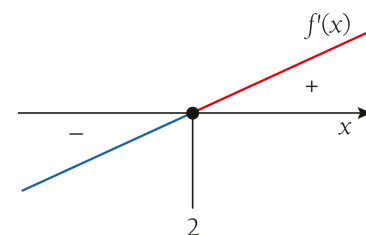
$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 6 = -6$$

Tapa 2

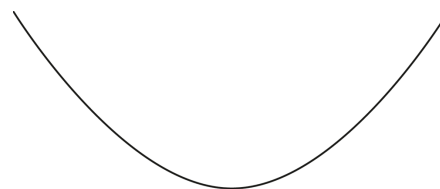
Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktion pienin arvo on kuvaajan huipun kohdalla.

Huipun x -koordinaatti on derivaatan nollakohta $x = 2$.

ion pienin arvo on huipun y -koordinaatti eli funktion



$f'(x)$	-	+
$f(x)$		



arvo kohdassa $x = 2$.

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 6 = -6$$

Vastaus

Pienin arvo on -6 , suurinta arvoa ei ole.

Esimerkki 6

Määritä funktion $f(x)$ derivaatan suurin arvo.

Ratkaisu

Derivoidaan funktio $f(x)$.

$$f'(x) = -2x^2 + 12x$$

Koska tehtävänä on selvittää derivaattafunktion suurin arvo, derivoidaan toistamiseen. Derivaattafunktion derivaatan merkintä on $f''(x)$.

$$f''(x) = -2 \cdot 2x + 12 \cdot 1 = -4x + 12$$

Määritetään derivaattafunktion derivaatan $f''(x)$ nollakohdat ratkaisemalla yhtälö $f''(x) = 0$.

$$-4x + 12 = 0$$

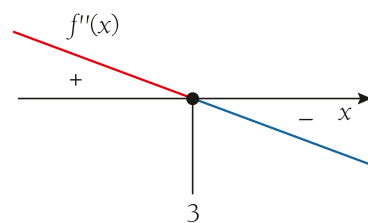
$$-4x = -12 \mid : (-4)$$

$$x = 3$$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x)$ kulkukaavio. Funktion $f''(x)$ kuvaaja on laskeva suora.

Kulkukaaviosta nähdään, että derivaattafunktion $f'(x)$ suurin arvo on kohdassa $x = 3$.

$$f'(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 18$$



$f''(x)$	+	-
$f'(x)$	↗	↘

Saatu tulos kertoo, että alkuperäisen funktion kuvaaja nousee jyrkimmin kohdassa $x = 3$. Derivaattafunktion suurin arvo 18 on funktion suurin kasvunopeus.

Vastaus

Derivaatan suurin arvo on 18.

Avainkäsitteet:

- suurin arvo
- pienin arvo
- suljettu väli
- välin päätepiste

