

# Sovelluksia

## Esimerkki 1

Pihla ja Kerttu rakentavat suorakulmion muotoisen karsinan, jota varten heillä on käytössään 40 m aitaa. Pihlan mielestä karsinan pinta-ala on suurin silloin, kun se on neliönmuotoinen ja sen jokaisen sivun pituus on 10 m. Kerttu ei kuitenkaan ole tästä täysin vakuuttunut. Tutki laskemalla, onko Pihla oikeassa.

## Ratkaisu

Muodostetaan funktio  $A(x)$ , joka ilmaisee karsinan pinta-alan neliömetreinä, kun  $x$  on yhden sivun pituus metreinä. Merkitään karsinan sivujen pituuksia  $x$ :llä ja  $y$ :llä. Karsinan pinta-ala on

$$A(x) = x \cdot y.$$

Jotta funktion suurimman arvon voi selvittää derivoimalla,  $y$  on ilmaistava  $x$ :n avulla. Koska aitaa on käytössä 40 m, saadaan yhtälö  $2x + 2y = 40$ . Ratkaistaan yhtälöstä  $y$ .

$$y = 40$$

$$2y = 40 - 2x \mid : 2$$

$$y = 20 - x$$

Pinta-ala on siis

$$A(x) = x \cdot y = x(20 - x) = 20x - x^2.$$

Selvitetään, mitkä muuttujan  $x$  arvot ovat tilanteessa mahdollisia. Kumpikaan karsinan sivujen pituuksista ei voi olla negatiivinen, joten muuttujan  $x$  alaraja on  $x = 0$  ja yläraja saadaan yhtälöstä  $20 - x = 0$ .

$$20 - x = 0$$

$$x = 20$$

Selvitetään, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $A(x) = 20x - x^2$  arvo on suurin välillä  $0 \leq x \leq 20$ . Derivoidaan funktio  $A(x)$ .

$$A'(x) = 20 - 2x$$

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$20 - 2x = 0$$

$$-2x = -20 \mid : (-2)$$

$$x = 10$$

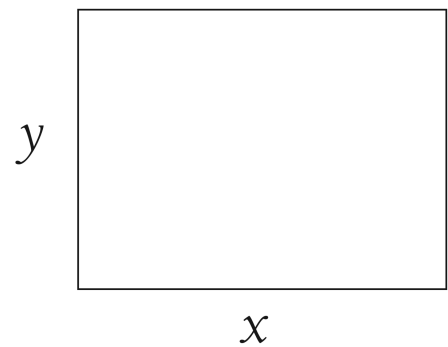
Lasketaan funktion  $A(x)$  arvo välin  $0 \leq x \leq 20$  päätepisteissä ja välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$$A(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$A(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 0$$

$$A(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 100$$

Funktion  $A(x)$  suurin arvo on kohdassa  $x = 10$ . Pinta-ala on suurin, kun yhden sivun pituus on 10 m. Toisen sivun



pituus on silloin  $20 - 10 = 10$  (m). Pinta-ala on suurimmillaan  $10 \cdot 10 = 100$  (m<sup>2</sup>).

Vastaus

Pihla on oikeassa.

## Sovellustehtävän ratkaiseminen

Suurin tai pienin arvo etsitään sovellustilanteessa seuraavasti:

1. Merkitään tuntematonta kirjaimella, esimerkiksi  $x$ :llä. Jos tuntemattomia on kaksi, toista tuntematonta voidaan merkitä ensin  $y$ :llä.
2. Muodostetaan kysyttyä asiaa ilmaiseva funktio, jonka lausekkeessa on vain yksi tuntematon.
3. Selvitetään sovellustilanteen asettamat rajoitukset  $x$ :n arvoille.
4. Derivoidaan funktio ja etsitään derivaattafunktion nollakohdat.
5. Jos mahdolliset  $x$ :n arvot muodostavat suljetun välin, lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Näistä arvoista suurin on funktion suurin arvo ja pienin funktion pienin arvo suljetulla välillä.
6. Tarkistetaan, mitä tehtävässä kysyttiin ja lasketaan tarvittaessa  $x$ :n arvoa vastaava kysytty arvo.

Jos kohdassa 5 mahdolliset  $x$ :n arvot eivät muodosta suljettua väliä, funktion suurin tai pienin arvo perustellaan kulkukaaviolla tai kuvaajan muodon avulla. Tällaista menetelmää voi käyttää myös suljetun välin tapauksessa.

## Esimerkki 2

Mikä on tilavuudeltaan suurin suorakulmainen kanneton rasia, joka voidaan taittaa A4-paperiarkista, kun siitä on leikattu neliön muotoiset kulmat pois? A4-paperiarkin sivujen pituudet ovat 29,7 cm ja 21,0 cm.

## Ratkaisu

Merkitään kulmista leikattujen neliöiden sivun pituutta  $x$ :llä. Rasian korkeus on  $x$ , ja sen pohjana on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat  $29,7 - 2x$  ja  $21,0 - 2x$ . Rasian tilavuus on  $V(x) = (29,7 - 2x)(21,0 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 101,4x^2 + 623,7x$ .

Poisleikattujen neliöiden sivun pituus  $x$  ei voi olla negatiivinen, joten pienin mahdollinen muuttujan  $x$  arvo on  $x = 0$ . Suurin mahdollinen muuttujan  $x$  arvo on puolet A4-arkin lyhyen sivun pituudesta eli 10,5.

Tutkitaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $V(x)$  arvo on suurin välillä  $0 \leq x \leq 10,5$ . Derivoidaan funktio  $V(x)$ .

$$V'(x) = 12x^2 - 202,8x + 623,7$$

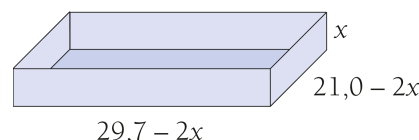
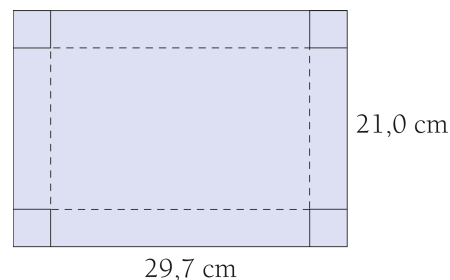
Määritetään derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$12x^2 - 202,8x + 623,7 = 0$$

$$x = 4,04233... \approx 4,042 \text{ tai } x = 12,8576... \approx 12,86$$

Näistä vain  $x \approx 4,042$  on välillä  $0 \leq x \leq 10,5$ .

Lasketaan funktion  $V(x)$  arvo välin  $0 \leq x \leq 10,5$  päätepisteissä ja välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Laskentaohjelmalla saadaan



$$V(10,5) = 0$$

$$V(4,042) = 1\,128,49... \approx 1\,130.$$

Suurin mahdollinen tilavuus on  $1\,130\text{ cm}^3$ .

$$1\,130\text{ cm}^3 = 1,13\text{ l}$$

Vastaus

Suurin mahdollinen rasian tilavuus on 1,13 litraa.

Esimerkki 3

Minkä positiivisen luvun kuution ja neliön erotus on pienin?

Ratkaisu

Merkitään kysyttyä lukua  $x$ :llä. Sen kuution ja neliön erotus on  $x^3 - x^2$ . Tarkastellaan siis funktiota  $f(x) = x^3 - x^2$ .

Selvitetään, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f(x)$  arvo välillä  $x > 0$  on pienin. Derivoidaan funktio  $f(x)$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

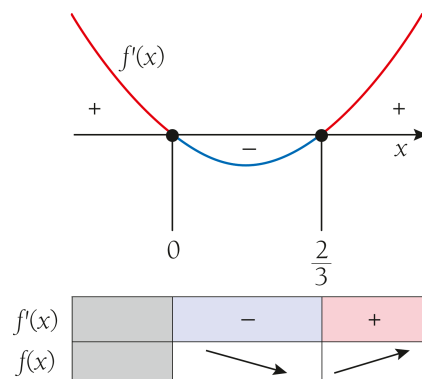
Määritetään derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{2}{3}$$

Koska mahdolliset muuttujan  $x$  arvot eivät muodosta suljettua väliä, perustellaan pienin arvo kulkukaavion avulla. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  saavuttaa  
 \_\_\_\_\_nmän arvonsa välillä  $x > 0$  kohdassa  $x = \frac{2}{3}$



Luvun  $\frac{2}{3}$  kuution ja neliön erotus on siis pienempi kuin minkään muun positiivisen luvun.

Vastaus

Luku on  $\frac{2}{3}$

Esimerkki 4

Kaupustelija myy silkkisolmioita kävelykadun varrella. Hän huomaa, että jokainen yhden euron hinnankorotus pienentää päivittäistä myyntiä 8 solmiolla. Millä hinnalla myyntitulo on suurin, kun 18 euron hinnalla kaupustelija saa myytyä 40 solmiota päivässä?



Ratkaisu

Merkitään hinnankorotusta euroina  $x$ :llä.

Havainnollistetaan myyntitulon riippuvuutta hinnasta taulukolla. Myyntitulo saadaan kertomalla hinta ja päivittäinen myynti keskenään.

| Hinta (€) | Päivittäinen myynti (kpl) | Myyntitulo (€)      |
|-----------|---------------------------|---------------------|
| 18        | 40                        | $18 \cdot 40 = 720$ |
| 19        | $40 - 8 = 32$             | $19 \cdot 32 = 608$ |
| 20        | $40 - 2 \cdot 8 = 24$     | $20 \cdot 24 = 480$ |
| $18 + x$  | $40 - 8x$                 | $(18 + x)(40 - 8x)$ |

Myyntitulon riippuvuutta hinnan korotuksesta kuvaa funktio

$$f(x) = (18 + x)(40 - 8x) = -8x^2 - 104x + 720.$$

Tutkitaan, mitkä hinnankorotuksen  $x$  arvot ovat

mahdollisia. Koska solmion hinta ei voi olla negatiivinen, mahdollinen muuttujan  $x$  arvo saadaan yhtälöstä 18

$$+x=0.$$

$$18+x=0$$

$$x=-18$$

Koska myytyjen solmioiden määrä ei voi olla negatiivinen, suurin mahdollinen muuttujan  $x$  arvo saadaan yhtälöstä  $40-8x=0$ .

$$40-8x=0$$

$$x=5$$

Määritetään funktion  $f(x)$  suurin arvo välillä  $-18 \leq x \leq 5$ .  
Derivoidaan funktio  $f(x)$ .

$$f'(x) = -16x - 104$$

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$-16x - 104 = 0$$

$$-16x = 104 \mid : (-16)$$

$$x = -6,5$$

Lasketaan funktion  $f(x)$  arvo välin  $-18 \leq x \leq 5$  päätepisteissä ja välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.  
Laskentaohjelmalla saadaan

$$f(-18) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f(-6,5) = 1\,058.$$

Funktio  $f(x)$  saa suurimman arvon välillä  $-18 \leq x \leq 5$  kohdassa  $x = -6,5$ . Solmion hinta on tällöin

$$x = 18 - 6,5 = 11,5 \text{ (€)}.$$

Vastaus

Myyntitulo on suurin, kun hinta on 11,50 €.

Esimerkki 5

Suorakulmion yksi kärkipiste on origossa ja kaksi sivua positiivisilla koordinaattiakseleilla. Yksi kärkipiste on paraabelilla  $y = 9 - x^2$ .

**a)** Määritä laskentaohjelman avulla suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala kahden desimaalin tarkkuudella.

**b)** Perustele a-kohdan tulos laskennallisesti ja selvitä samalla suurimman mahdollisen pinta-alan tarkka arvo.

Ratkaisu

**a)** Piirretään tilanteesta kuva geometriaohjelmalla.

Merkitään  $f(x) = 9 - x^2$ . Kun suorakulmion kärkipisteet sijoitetaan pisteisiin  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, f(a))$  ja  $(0, f(a))$ , paraabelilla sijaitsevan kärkipisteen paikkaa voi muuttaa liukusäätimellä, jolloin suorakulmion pinta-ala muuttuu. Halutun tarkkuuden saamiseksi liukusäätimen askelasetuksia voi joutua muuttamaan.

Ohjelman mukaan suorakulmion suurin pinta-ala on kahden desimaalin tarkkuudella 10,39.

**b)** Kun paraabelilla sijaitseva suorakulmion kärkipiste on pisteessä  $(x, y) = (x, 9 - x^2)$ , suorakulmion kanta on  $x - 0 = x$  ja korkeus  $y - 0 = y = 9 - x^2$ .

Suorakulmion pinta-alafunktio on

$$A(x) = xy = x(9 - x^2) = 9x - x^3.$$

Kun suorakulmion kaksi sivua ovat positiivisilla



koordinaattiakseleilla, pienin mahdollinen muuttujan  $x$  arvo on  $x = 0$ .

Suurin mahdollinen muuttujan  $x$  arvo saadaan, kun  $y = 0$ .

$$9 - x^2 = 0$$

$x = -3$  tai  $x = 3$  **Negatiivinen ratkaisu ei käy.**

Tarkasteluväli on  $0 \leq x \leq 3$ . Määritetään pinta-alafunktion

$A(x)$  suurin arvo välillä  $0 \leq x \leq 3$ .

Derivoidaan funktio  $A(x)$ .

$$A'(x) = 9 - 3x^2$$

Määritetään derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$9 - 3x^2 = 0$$

tai

Näistä vain on tarkasteluvälillä  $0 \leq x \leq 3$ .

Lasketaan funktion  $A(x)$  arvo välin  $0 \leq x \leq 3$  päätepisteissä ja välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

Laskentaohjelmalla saadaan

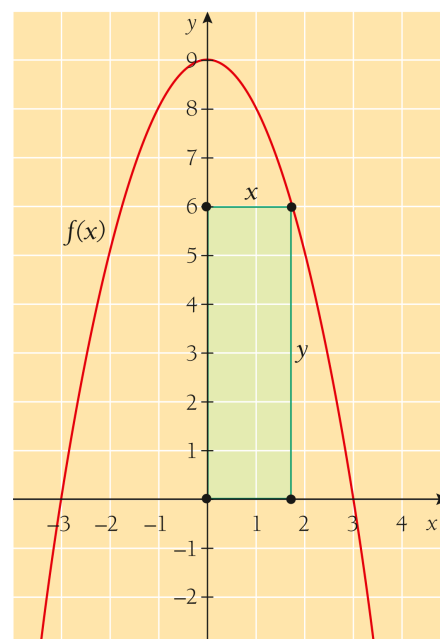
$$A(0) = 0$$

$$A(3) = 0$$

Pinta-alan suurin arvo on Näistä on tarkka arvo ja 10,39 kaksidesimaalinen likiarvo.

Vastaus

Pinta-ala on a) 10,39, b) 10,39



Rautalangan pituus on 30,0 cm. Langan toinen pää kierretään ympyräksi ja toinen pää jätetään suoraksi niin, että muodostuu kuvan mukainen vinon ympyräkartion kehikko.

Miten kehikon mitat pitää valita, jotta kartion tilavuus olisi mahdollisimman suuri? Mikä on suurimman mahdollisen kartion tilavuus?

Ratkaisu

Merkitään kehikon korkeutta  $h$ :lla ja pohjan sädettä  $r$ :llä.

Ympyräkartion tilavuus on  $V = \frac{A_p \cdot h}{3} = \frac{\pi^2 h}{3}$ .

Suurimman kartion mitat voidaan määrittää, kun kartion tilavuus ilmaistaan yhden muuttujan avulla. Luku  $\pi$  ei ole muuttuja vaan vakio, joka jää tilavuuden lausekkeeseen.

Rautalangan pituus 30,0 cm on ympyrän kehän pituuden  $p = 2\pi r$  ja korkeuden  $h$  summa.

$$2\pi r + h = 30$$

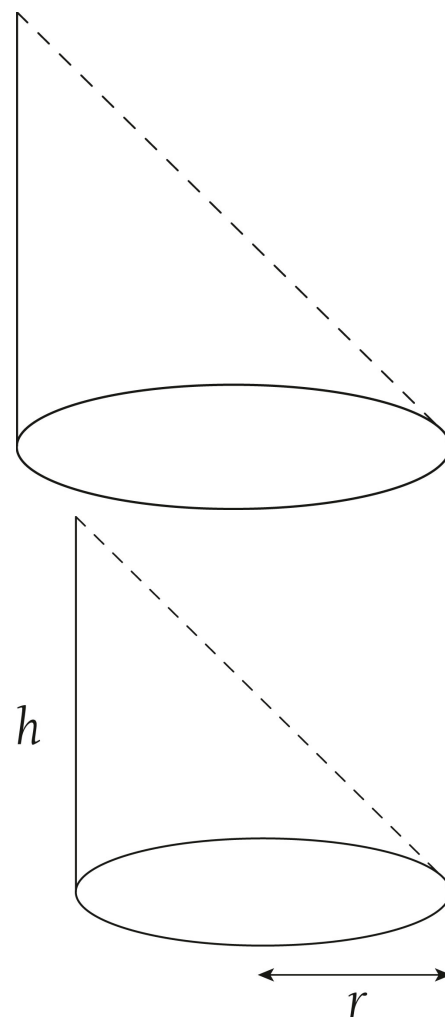
$$h = 30 - 2\pi r$$

Kartion tilavuuden ilmaisee funktio

$$V(r) = \frac{\pi^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 (30 - 2\pi r)}{3} = 10\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi^2 r^3.$$

Selvitetään mahdolliset muuttujan  $r$  arvot. Ympyrän säde ei voi olla negatiivinen, joten alaraja mahdollisille arvoille on  $r = 0$ .

Yläraja mahdollisille arvoille saadaan, kun kaikki rautalanka käytetään pohjaympyrään.



$$2\pi r = 30 \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{30}{2\pi} = 4,7746... \approx 4,77$$

Selvitetään, millä muuttujan  $r$  arvolla funktion  $V(r)$  arvo välillä  $0 \leq r \leq \frac{30}{2\pi}$  on suurin.

Derivoidaan funktio  $V(r)$  laskentaohjelmalla.

$$V'(r) = 20\pi r - 2\pi^2 r^2$$

Määritetään derivaatan nollakohdat laskentaohjelman avulla.

$$20\pi r - 2\pi^2 r^2 = 0$$

$$r = 0 \text{ tai } 2 = \frac{10}{\pi} \approx 3,183098... \approx 3,1831$$

Kirjainten  $\pi$  ja  $r$  väliin täytyy laittaa laskentaohjelmalla derivoitaessa kertomerkki.

Derivaatan nollakohdista molemmat ovat välillä

$$0 \leq r \leq \frac{30}{2\pi} \text{ Kohta } r = 0 \text{ on samalla välin päätepiste.}$$

Lasketaan funktion  $V(r)$  arvo välin  $0 \leq r \leq \frac{30}{2\pi}$

päätepisteissä ja välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

Laskentaohjelmalla saadaan

$$V(0) = 0$$

$$V\left(\frac{30}{2\pi}\right) = 0$$

$$V\left(\frac{10}{\pi}\right) = 106,10... \equiv 106.$$

Suurin tilavuus on  $106 \text{ cm}^3$ . Pohjan säde on tällöin

$$\text{pohjikorkeus on } h = 30 - 2\pi \cdot \frac{10}{\pi} = 10,0 \text{ (cm).}$$



## Vastaus

Kartion suurin mahdollinen tilavuus on  $106 \text{ cm}^3$ , kun  
kehikon korkeus on  $10,0 \text{ cm}$  ja pohjaympyrän säde  $3,2 \text{ cm}$ .

