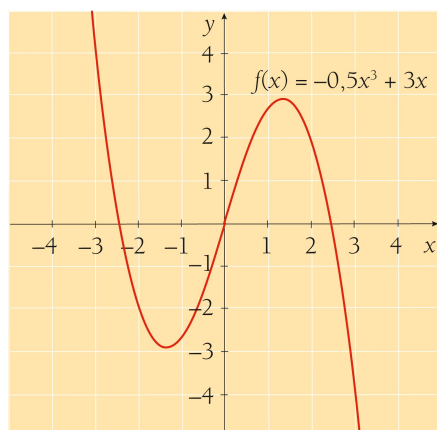


Polynomifunktiot

Esimerkki 1

- a)** Määritä kuvaajasta $f(2)$ ja $f(-2)$.
- b)** Millä muuttujan x arvolla $f(x) = 3$?
- c)** Määritä funktion nollakohdat.



Ratkaisu

Funktio arvo on kuvaajan pisteen y -koordinaatti.



a) Kuvaajan perusteella $f(2) = 2$ ja $f(-2) = -2$.

b) Kuvaajan perusteella $f(x) = 3$, kun $x \approx -2,8$.

c) Funktion nollakohtia ovat ne muuttujan x arvot, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin. Kuvaajan perusteella funktiolla on kolme nollakohtaa: $x \approx -2,4$, $x \approx 0$ ja $x \approx 2,4$.

Vastaus

a) $f(2) = 2$ ja $f(-2) = -2$

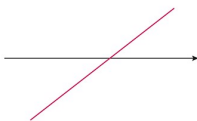
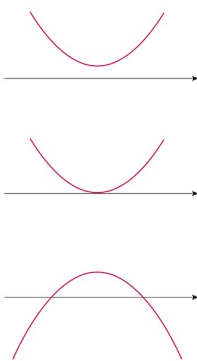
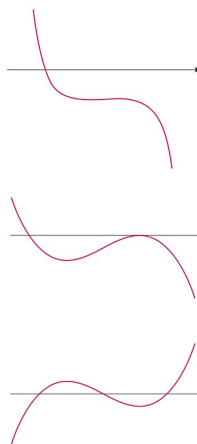
b) $f(x) = 3$, kun $x \approx -2,8$

c) $x \approx -2,4$, $x \approx 0$ ja $x \approx 2,4$

Polynomifunktion nollakohtien lukumäärä ja kuvaajan muoto

Joskus on vaikeaa arvioida, millä muuttujan x arvoilla kuvaaja kannattaa piirtää, jotta sen oleelliset osat näkyvät kuvassa. Siksi on hyvä tuntea tavallisimpien polynomifunktioiden kuvaajien muoto.



Asteluku	Funktion lauseke ja kuvaajan muoto	Kuvaaja	Nollakohtien lukumäärä
1	$f(x) = kx + b$ ($k \neq 0$) suora		1
2	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) paraabeli		0, 1 tai 2
3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)		1, 2 tai 3

Polynomifunktion asteluku kertoo, kuinka monta **nollakohtaa** funktiolla korkeintaan on.

Esimerkki 2

Piirrä funktion $f(x) = 0,1x^3 - 1,6x^2 + 2x + 11,2$ kuvaaja.

Määritä kuvaajan avulla funktion nollakohdat

Ratkaisu

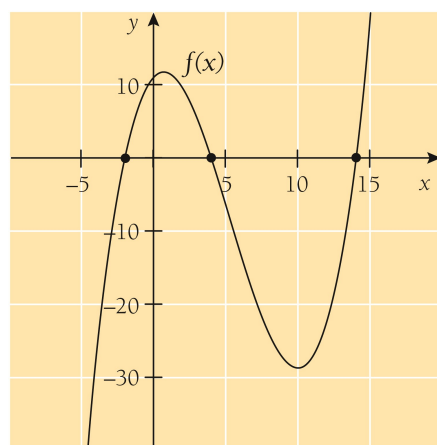
Piirretään kuvaaja geometria- tai laskentaohjelmalla.

Ohjelman oletusasetuksilla kuvaaja voi näyttää esimerkiksi seuraavanlaiselta.



Funktion nollakohtissa kuvaaja leikkaa x -akselin. Kuvassa näkyy kaksi nollakohtaa. Koska $f(x)$ on kolmannen asteen polynomifunktio, nollakohtia voi olla kolme.

Muutetaan piirtoalueen asetuksia niin, että kuvaajan muoto ja mahdollinen kolmas nollakohta saadaan paremmin näkyviin. Tämä tapahtuu joko toiminnolla *Loitonna* (Zoom Out) tai syöttämällä kuvassa näkyvän alueen rajat. Rajat syötetään ohjelmasta riippuen joko valikosta *Piirtoalue* (Graphics) tai *Näkymäikkuna/Ikkunan asetukset* (Window).



Nollakohdat saa ohjelmasta riippuen toiminnolla *Juuret* (Roots) tai *Nollakohta* (Zero).

Nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 4$ ja $x = 14$.

Vastaus

Nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 4$ ja $x = 14$.

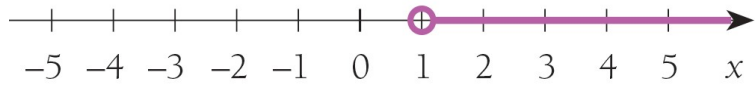
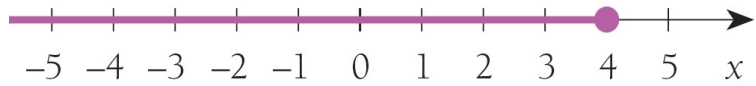
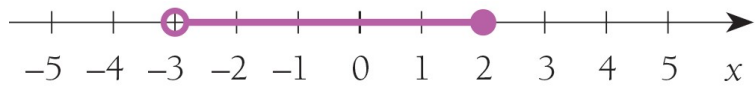
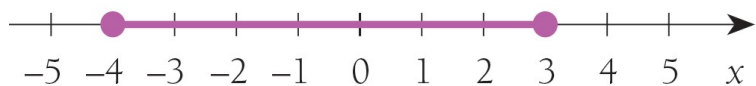
Lukuvälit

Funktion kuvaajaa ja arvoja tutkitaan usein rajatulla lukuvälillä. Kun **lukuvälejä** ilmaistaan muuttujan x avulla, käytetään seuraavia matemaattisia merkkejä:

Merkki	Luetaan	Esimerkki
--------	---------	-----------

$<$	pienempi kuin	$x < 3$ kaikki lukua 3 pienemmät luvut
$>$	suurempi kuin	$x > 12$ kaikki lukua 12 suuremmat luvut
$\leq$	pienempi tai yhtä suuri kuin (enintään)	$x \leq -2$ -2 ja kaikki sitä pienemmät luvut
$\geq$	suurempi tai yhtä suuri kuin (vähintään)	$x \geq -5$ -5 ja kaikki sitä suuremmat luvut

Lukuväli voidaan kuvata myös välin päätepisteiden ja hakasulkeiden avulla. Kun päätepiste ei kuulu lukuväliin, hakasulkeen hakanen osoittaa ulospäin. Kun päätepiste kuuluu lukuväliin, hakanen osoittaa sisäänpäin.

Väli lukusuoralla	Väli x :n avulla	Väli hakasulkeiden avulla
	$x > 1$	$]1, \infty[$
	$x \leq 4$	$]-\infty, 4]$
	$-3 < x \leq 2$	$] -3, 2]$
	$-2 < x < 4$	$] -2, 4[$
	$-4 \leq x \leq 3$	$[-4, 3]$

Kun ylä- tai alarajaa ei ole, käytetään äärettömän symbolia ∞ tai $-\infty$ ja sulkeen hakanen osoittaa ulospäin.



Esimerkki 3

Piirrä funktion $f(x) = -9x^4 + 12x^3 + 329x^2 - 444x + 148$ kuvaaja välillä $[-7, 7]$ ja vastaa kysymyksiin kuvaajan perusteella.

a) Määritä ne muuttujan x arvot välillä $[-7, 7]$, joilla $f(x) = 3\,000$.

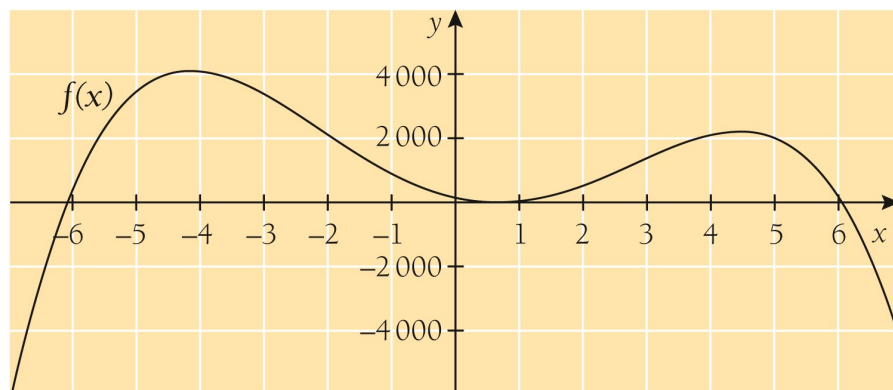
b) Mikä on funktion suurin arvo välillä $[-7, 7]$?

Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu

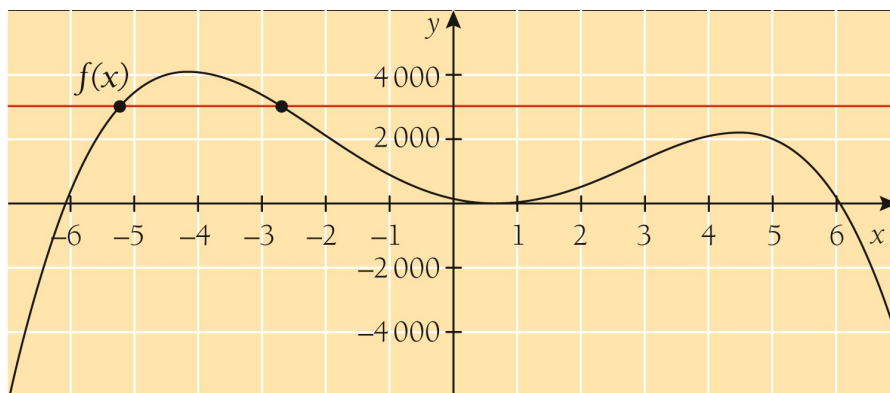
Väli $[-7, 7]$ tarkoittaa väliä $-7 \leq x \leq 7$.

Piirretään funktion kuvaaja geometria- tai laskentaohjelmalla. Muutetaan piirtonäkymän asetuksia niin, että kuvaajan muoto saadaan näkyviin välillä $[-7, 7]$.



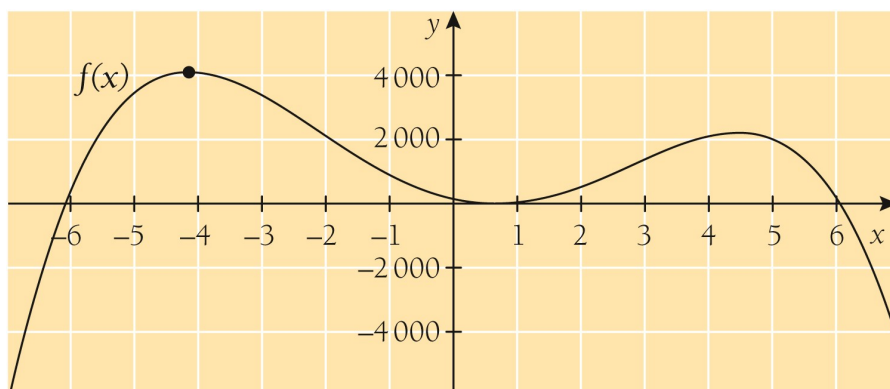
Useimmilla ohjelmilla funktion kuvaajan voi piirtää myös pelkästään välillä $[-7, 7]$. Toiminto voi olla esimerkiksi
Funktio $(-9x^4 + 12x^3 + 329x^2 - 444x + 148, -7, 7)$ tai
Piecewise $(-9x^4 + 12x^3 + 329x^2 - 444x + 148, -7 \leq x \leq 7)$.

a) $f(x) = 3\,000$ toteutuu niillä muuttujan x arvoilla, joilla $y = 3\,000$. Kuvaajan perusteella tällaisia muuttujan x arvoja on kaksi. Niiden likiarvot saadaan määritettyä, kun piirretään kuvaan suora $y = 3\,000$ ja määritetään suoran ja funktion kuvaajan leikkauspisteet ohjelman toiminnolla *Leikkauspiste* (*Intersect*). Kolmen desimaalin tarkkuuden saamiseksi voi joutua muuttamaan ohjelman näytösa-asetuksia.



$f(x) = 3\,000$, kun $x \approx -5,238$ tai $x \approx -2,675$

b) Suurin arvo on kuvaajan ylimmän pisteen y -koordinaatti. Se voidaan määrittää ohjelmasta riippuen toiminnolla *Ääriarvot* (*Turning Point*) tai *Maksimipiste* (*Maximum*). Ohjelma saattaa pyytää syöttämään myös välin, jolta suurin arvo haetaan.



Funktion suurin arvo välillä $[-7, 7]$ on kolmen desimaalin tarkkuudella 4 129,704.

Vastaus

a) $f(x) = 3\,000$, kun $x \approx -5,238$ tai $x \approx -2,675$

b) Suurin arvo on 4 129,704.

Esimerkki 4

Tarkastellaan funktioita $f(x) = 33x^2 + 51x - 13$ ja $g(x) = 2x - 3$.

ise yhtälö $f(x) = g(x)$.

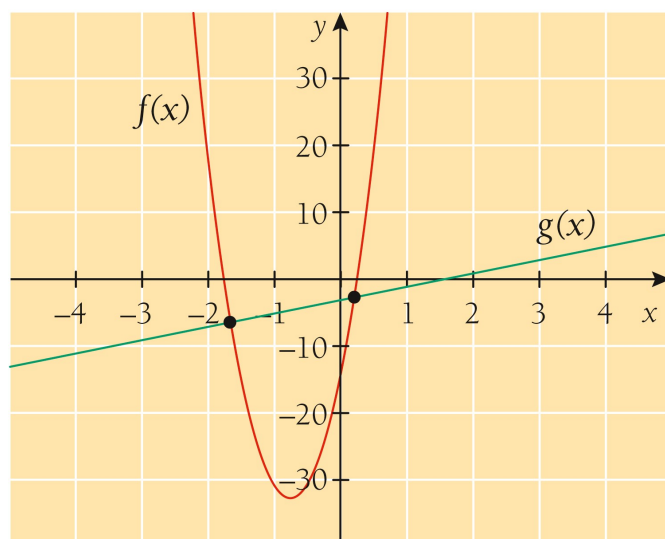
a) graafisesti yhden desimaalin tarkkuudella

b) algebrallisesti välivaiheineen.

Ratkaisu

a) Graafinen ratkaisu tarkoittaa tehtävän ratkaisemista kuvaajan avulla.

Piirretään funktioiden kuvaajat. Funktion $f(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, ja funktion $g(x)$ kuvaaja on nouseva suora.



Yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisut ovat funktioiden kuvaajien leikkauspisteiden x -koordinaatteja. Paraabelilla ja suoralla voi olla enintään kaksi leikkauspistettä, joten muita ratkaisuja kuin kuvassa näkyvät ei ole. Määritetään leikkauspisteet ohjelman avulla.

Ratkaisuiksi saadaan yhden desimaalin tarkkuudella $x \approx -1,7$ tai $x \approx 0,2$.

b) Algebrallinen ratkaisu tarkoittaa tehtävän ratkaisemista laskennallisesti.

Muodostetaan yhtälö $f(x) = g(x)$ ja ratkaistaan se toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

Esimerkki 5 $\frac{49x^2 - 4 \cdot 33 \cdot (-10)}{2 \cdot 33} = \frac{49x^2 + 132}{66}$ ja $c = -10$

Määritä funktion $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 49x - 61$ nollakohdat ilman laskentaohjelmaa.

Vastaus

Ratkaisu

a) $x \approx -1,7$ tai $x \approx 0,2$ **b)** $x = -\frac{5}{3}$ tai $x = \frac{2}{11}$

Ratkaistaan yhtälö $2x^3 + x^2 - 6x = 0$.

Yhtälö voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla.

Kirjoitetaan yhtälön vasen puoli tulona erottamalla x yhteiseksi tekijäksi.

$$2x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x(2x^2 + x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$a = 2, b = 1 \text{ ja } c = -6$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{-1-7}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \text{ tai } x = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Vastaus

$$x = 0, x = -2 \text{ ja } x = \frac{3}{2}$$

Avainkäsitteet:

- polynomifunktion nollakohdat
- polynomifunktion asteluku
- lukuväli