

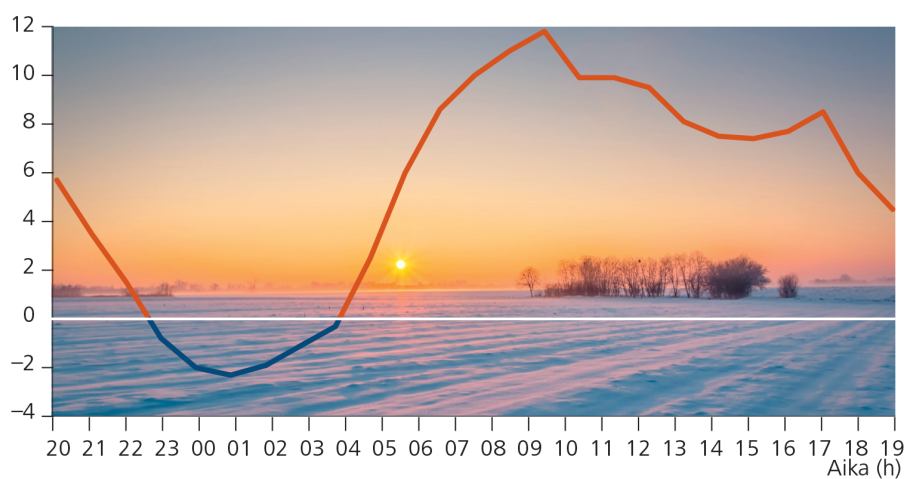
Polynomifunktion merkin tutkiminen

Esimerkki 1

- a)** Kuvassa on vuorokauden lämpötiläkäyrä Utsjoelta. Milloin lämpötila oli pakkasen puolella?

Lämpötila Utsjoella 17.5.2018 kello 20–18.5.2018 kello 19

Lämpötila (°C)



- b)** Katso kuvaajasta, millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = 2x + 1$ arvot ovat negatiivisia.

Ratkaisu

Kuvassa nollaraja on merkitty valkoisella. Lämpötila oli

pakkasen puolella noin kello 22.30...4.00.

b) Funktion negatiiviset arvot ovat x -akselin alapuolella.

Funktio $f(x) = 2x + 1$ saa negatiivisia arvoja, kun $x < -0,5$.

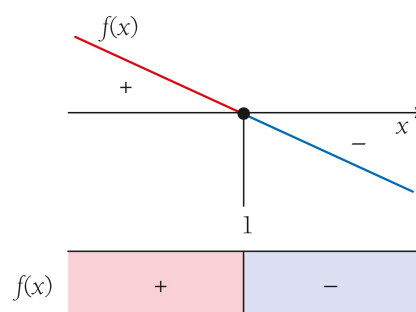
Vastaus

a) Lämpötila oli pakkasen puolella noin kello 22.30...4.00.

b) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -0,5$.

Funktion merkki ja epäyhtälö

Funktion merkkiä tutkittaessa selvitetään, millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat positiivisia ja millä negatiivisia. Positiiviset funktion arvot ovat kuvaajassa x -akselin yläpuolella ja negatiiviset alapuolella. Kun polynomifunktion merkkiä tutkitaan kuvaajan avulla, hahmotellaan kuvaaja, lasketaan nollakohdat ja laaditaan **merkkikaavio**.



Kun kahden lausekkeen suuruutta vertaillaan käyttämällä yhtäsuuruusmerkin sijasta merkkiä $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ tai $\neq$, muodostuu **epäyhtälö**. Epäyhtälön ratkaiseminen voidaan muuttaa funktion merkin tutkimiseksi muokkaamalla epäyhtälöä niin, että sen oikealle puolelle tulee nolla. Ensimmäisen asteen epäyhtälö voidaan ratkaista myös laskemalla ilman kuvaajaa ja merkkikaaviota. Epäyhtälön ratkaisemisessa käytetään samoja vaiheita kuin yhtälön ratkaisemisessa. Ainoa lisäys on se, että epäyhtälön kummankin puolen kertominen tai jakaminen negatiivisella luvulla vaihtaa **epäyhtälömerkin** suunnan.

Esimerkki 2

muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = -5x + 10$ arvot ovat negatiivisia?

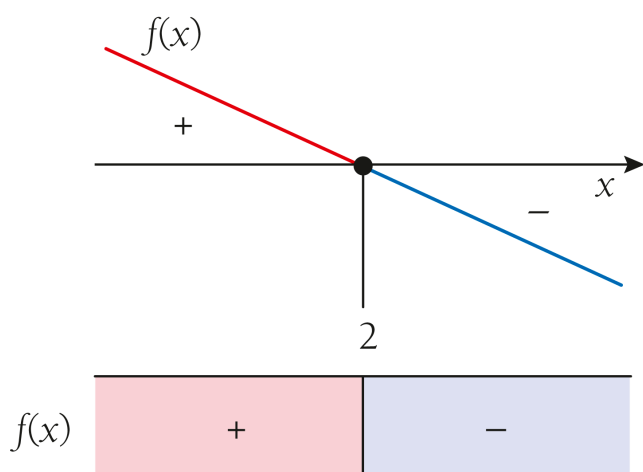
Ratkaisu

Tapa 1

Ratkaistaan funktion nollakohta.

$$\begin{aligned} -5x + 10 &= 0 \\ -5x &= -10 && | : (-5) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion merkkikaavio. Funktion $f(x) = -5x + 10$ kuvaaja on laskeva suora, koska muuttujan x kerroin on negatiivinen.



Merkkikaavion voi piirtää koejärjestelmän kaavaeditorin taulukkotoiminnolla, piirto-ohjelmalla tai laskentaohjelmalla. Koejärjestelmän kaavaeditoria käytettäessä kuvaajan muoto voidaan selittää sanoin.

Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < 2$.

Tapa 2

Kirjoitetaan ehto epäyhtälöksi ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} -5x + 10 &> 0 \\ -5x &> -10 && | : (-5) \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Vastaus

$$x < 2$$

Esimerkki 3

...aise epäyhtälö $4(x - 3) \leq x + 9$.

Ratkaisu

Tapa 1

Muokataan epäyhtälöä niin, että oikealle puolelle saadaan nolla.

$$4(x + 3) \leq x - 9$$

$$4x + 12 \leq x - 9$$

$$4x + 12 - x + 9 \leq 0$$

$$3x + 21 \leq 0$$

Selvitetään, millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = 3x + 21$ arvot ovat negatiivisia tai nolla.

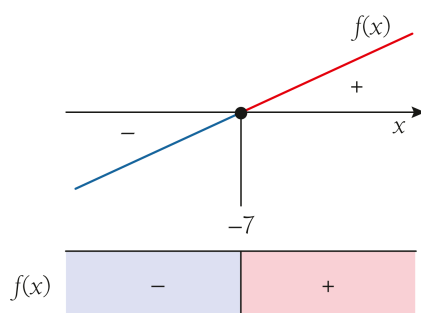
Ratkaistaan funktion nollakohta.

$$3x + 21 = 0$$

$$3x = -21 \quad | : 3$$

$$x = -7$$

Laaditaan funktion merkkikaavio. Funktion $f(x) = 3x + 21$ kuvaaja on nouseva suora, koska muuttujan x kerroin on positiivinen.



Funktion arvot ovat negatiivisia tai nolla, kun $x \leq -7$.

Tapa 2

Ratkaistaan epäyhtälö suoraan.

Esimerkki 4

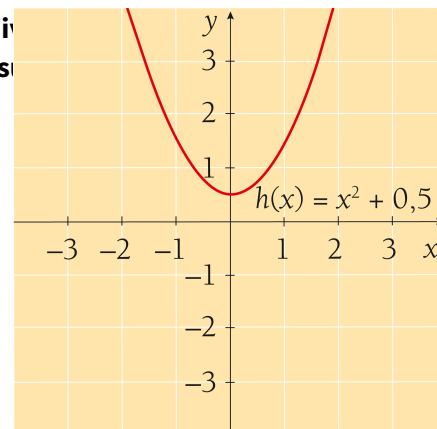
muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

Ratkaisu

a) Funktion arvot ovat positiivisia, kun kuvaaja on x -akselin yläpuolella. Paraabeli leikkaa x -akselin kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$, joten funktion $f(x)$ arvot ovat positiivisia välillä $-1 < x < 1$.

b) Kuvaaja on x -akselin yläpuolella paitsi kohdassa $x = 0$.
Funktion $g(x)$ arvot ovat positiivisia, kun $x \neq 0$.

itiin si



c) Kuvaaja on kokonaan x -akselin yläpuolella. Funktion $h(x)$ arvot ovat positiivisia kaikilla muuttujan x arvoilla.

Vastaus

a) $-1 < x < 1$, **b)** $x \neq 0$, **c)** kaikilla muuttujan x arvoilla

Esimerkki 5

Millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

b) $g(x) = -2x^2 + x + 1$

Ratkaisu

a) Ratkaistaan funktion $f(x)$ nollakohdat ratkaisukaavalla.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$a = 1, b = 4 \text{ ja } c = 3$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

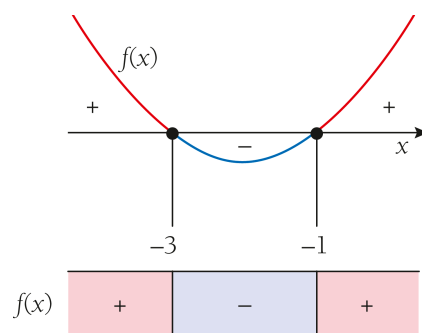
$$x = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ tai } x = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Laaditaan funktion merkkikaavio. Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen kerroin on positiivinen.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-3 < x < -1$.

b) Ratkaistaan funktion $g(x)$ nollakohdat ratkaisukaavalla.



$$-2x^2 + x + 1 = 0$$

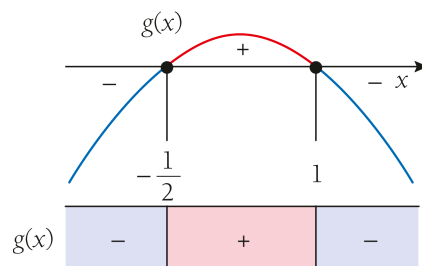
$$a = -2, b = 1, c = 1$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4}$$

$$x = \frac{-1 + 3}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{-1 - 3}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Laaditaan funktion merkkikaavio. Funktion $g(x) = -2x^2 + x + 1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -\frac{1}{2}$ tai $x > 1$.



Vastaus

$$\mathbf{a)} -3 < x < -1 \quad \mathbf{b)} } x < -\frac{1}{2} \text{ tai } x > 1$$

Esimerkki 6

Ratkaise epäyhtälö $x^2 \leq 9$.

Tapa 1

Muokataan epäyhtälöä niin, että oikealle puolelle saadaan nolla.

$$x^2 \leq 9$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

Tutkitaan, millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = x^2 - 9$ ovat negatiivisia tai nolla.

Epäyhtälö $x^2 - 9 \leq 0$ toteutuu niillä muuttujan x arvoilla, joilla paraabeli on x -akselilla tai sen alapuolella. x -akselin ja paraabelin leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälö $x^2 - 9 = 0$.

$$x^2 - 9 = 0$$

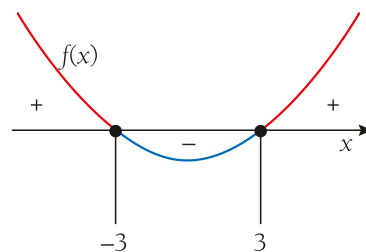
$$a = 1, b = 0, c = -9$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{6}{2} = 3 \text{ tai } x = \frac{-6}{2} = -3$$

Laaditaan funktion merkkikaavio. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Epäyhtälö $x^2 \leq 9$ toteutuu, kun $-3 \leq x \leq 3$.



$f(x)$	+	-	+
--------	---	---	---

Tapa 2

Ratkaistaan epäyhtälö laskentaohjelmalla.

$$x^2 \leq 9$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

Vastaus

$$-3 \leq x \leq 3$$

Epäyhtälön voi ratkaista laskentaohjelmalla, mikäli ohjelmat ovat käytössä. Toiminto on sama *Ratkaise* (*Solve*) kuin yhtälöiden ratkaisemisessa.

Esimerkki 7

Tavaratalon yhteen nurkkaukseen halutaan rakentaa kahta suoraa väliseinää käyttämällä suorakulmion muotoinen kesäpiha. Väliseinien yhteispituus on 12 m. Miten kesäpihan pidemmän sivun pituus pitää valita, jotta kesäpihan pohjapinta-ala olisi vähintään 30 m²?



Ratkaisu

Avainkäsitteet:

- funktion merkki
- merkkikaavio
- epäyhtälön merkki
- epäyhtälö

y

x

Epäyhtälö $f(x) < 0$ toteutuu niillä muuttujan x arvoilla, joilla funktion arvot ovat negatiivisia eli kuvaaja on x -akselin alapuolella.

Epäyhtälön ratkaisu on $x < -4$ tai $1 < x < 2$.

Muodostetaan pinta-alaehdosta epäyhtälö, ja ratkaistaan se laskentaohjelman avulla.

$$x(12 - x) \geq 30$$

$$3,5505... \leq x \leq 8,4494...$$

Jos laskentaohjelma ei ratkaise epäyhtälöä suoraan likimääräisesti, ratkaisu haetaan ensin tarkkana arvona ja vastaus muutetaan vasta sen jälkeen likiarvoksi. Likiarvoksi muuttaminen tapahtuu ohjelmasta riippuen joko toiminnolla *Likiarvo* ($\approx$) tai painamalla CTRL + Enter tai CMND + Enter.

Jos seinät ovat yhtä pitkät, niiden pituus on $\frac{12 \text{ m}}{2} = 6 \text{ m}$.

Pidemmän seinän pituuden pitää siis olla välillä 6,0 m ... 8,4 m.

Vastaus

Kesäpihan pidemmän sivun pituus on 6,0 m ... 8,4 m.