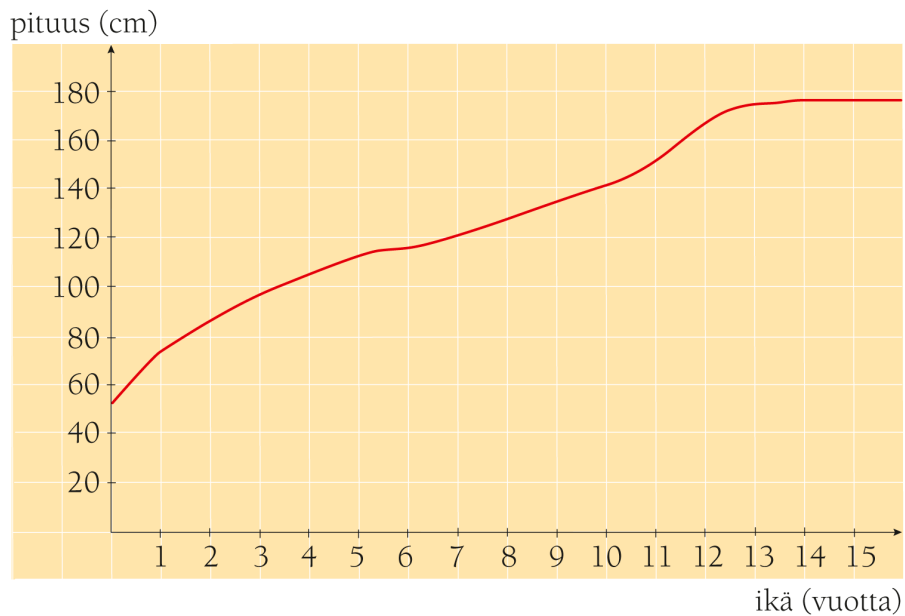


# Muutosnopeus ja derivaatta

## Esimerkki 1

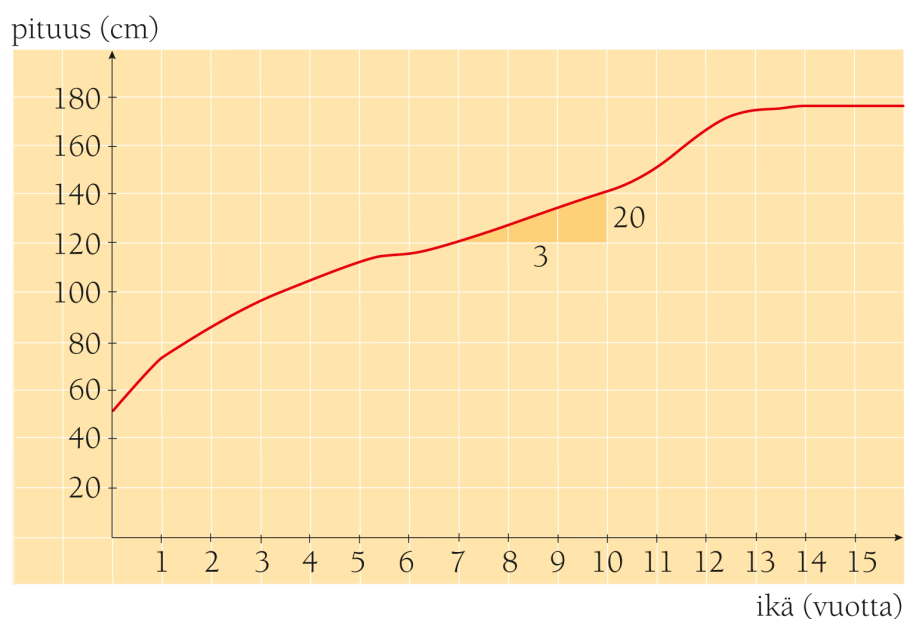
Kuvassa on Lumin lapsuusajan kasvukäyrä. Määritä käyrästä Lumin kasvunopeus yksikössä cm/vuosi **a)** 8-vuotiaana, **b)** 1-vuotiaana.



## Ratkaisu

Kasvukäyrä on 7–10 ikävuoden välillä likimain suora, kasvu on tällöin tasaista. Kasvunopeuden ilmaisee

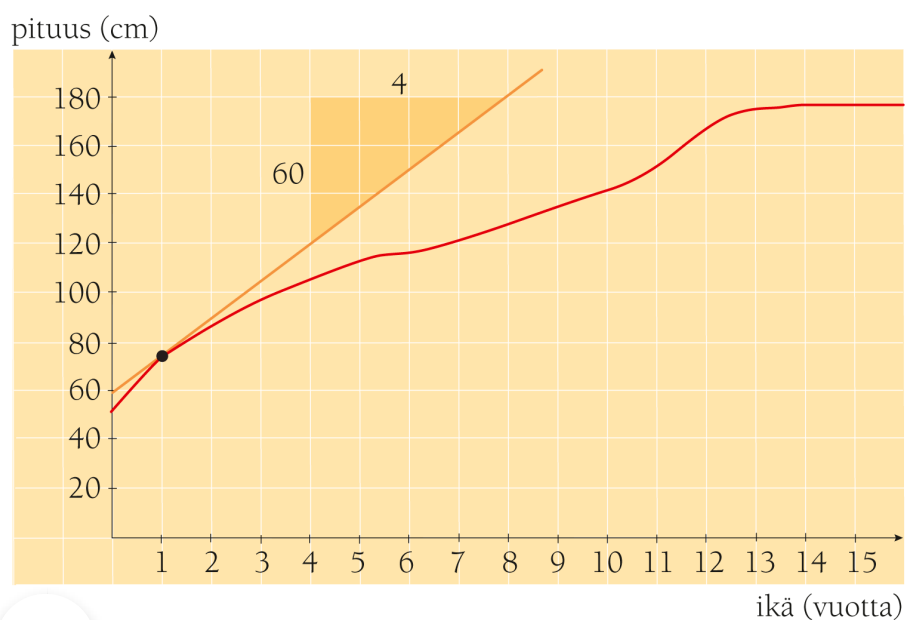
suoran kulmakerroin. Se voidaan laskea piirtämällä kuvaan sopiva apukolmio.



Kasvunopeus on 8 vuoden iässä

$$k = \frac{y:n \text{ muutos}}{x:n \text{ muutos}} = \frac{20}{3} = 6,66... \approx 7 \text{ (cm/vuosi)}$$

**b)** Kasvukäyrä ei ole 1 vuoden kohdalla suora. Piirretään tähän kohtaan käyrää sivuava suora ja lasketaan sen kulmakerroin kuvan apukolmion avulla. Kulmakerroin ilmaisee kasvunopeuden.



Kasvunopeus on 1 vuoden iässä

$$k = \frac{y:n \text{ muutos}}{x:n \text{ muutos}} = \frac{60}{4} = 15 \text{ (cm/vuosi)}$$

Lumin kasvunopeus on **a)** 8-vuotiaana 7 cm/vuosi ja  
**b)** 1-vuotiaana 15 cm/vuosi.

### Esimerkki 3

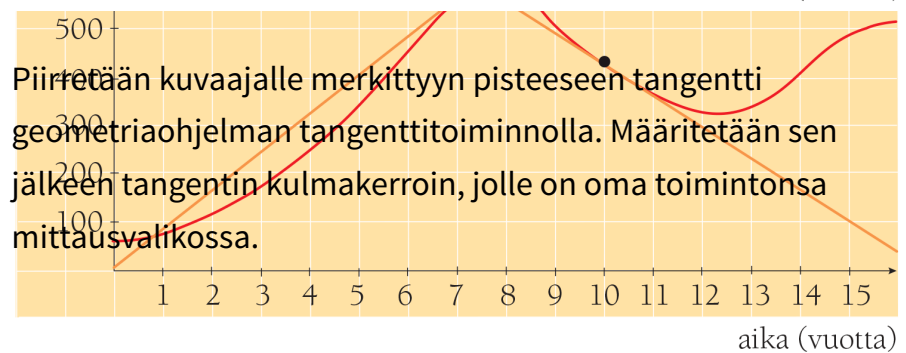
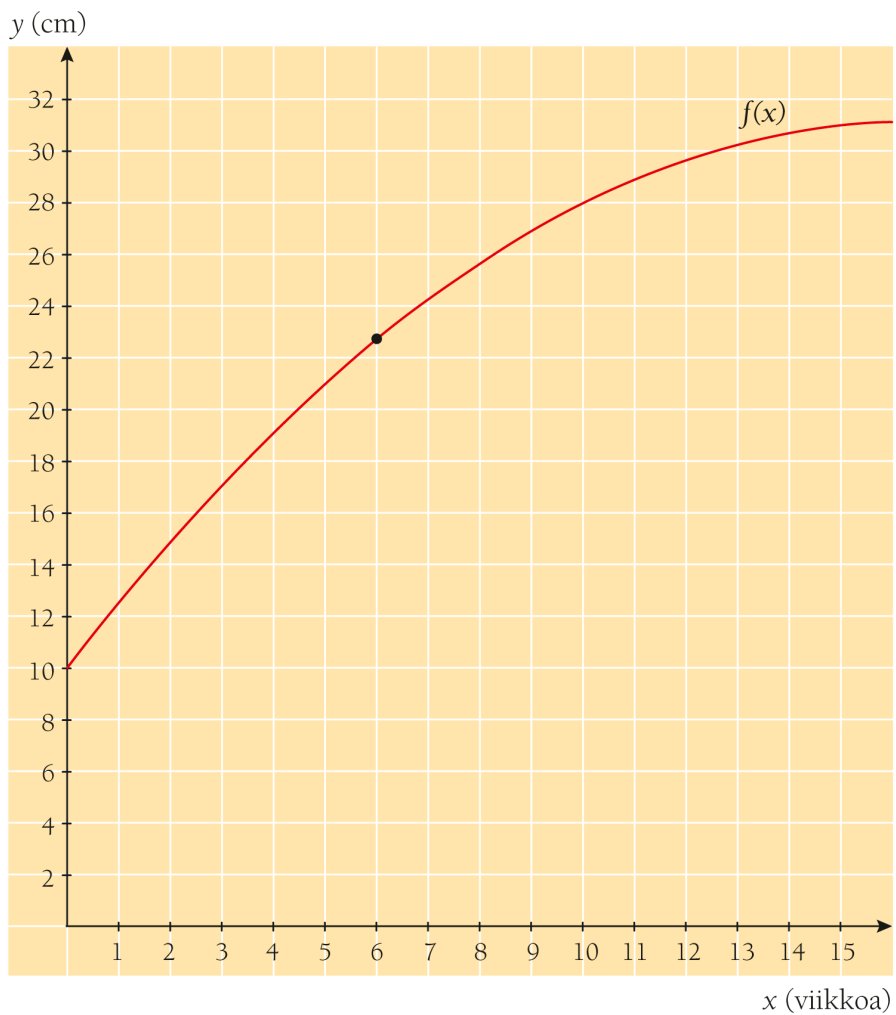
Funktio  $f(x) = -0,08x^2 + 2,6x + 10$  ilmaisee viherkasvin korkeuden senttimetreinä  $x$  viikkoa kasvin ostamisesta 15 ensimmäisen viikon ajan. Määritä graafisesti viherkasvin kasvunopeus, kun ostopäivästä on kulunut 6 viikkoa.



### Ratkaisu

Piirretään geometriaohjelmalla funktion kuvaaja.  
Merkitään kuvaajalle piste arvon  $x = 6$  kohdalle kirjoittamalla syöttökenttään  $(6, f(6))$ .

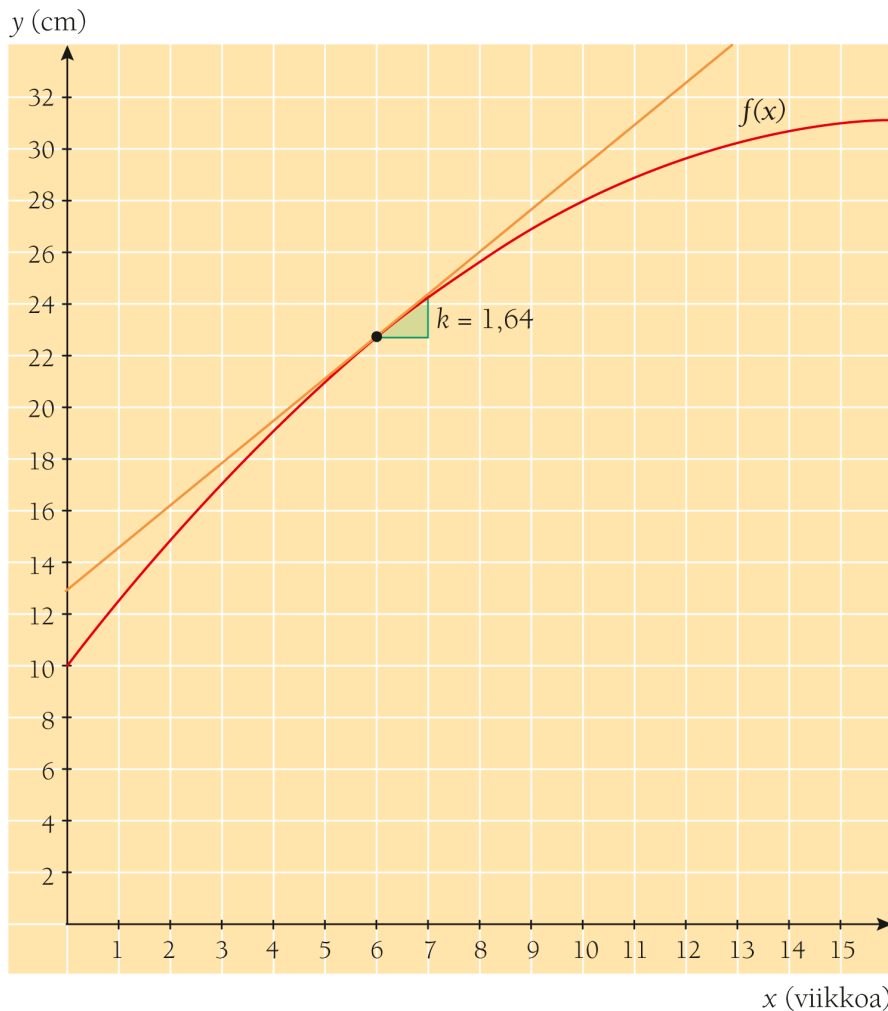




Ratkaisu

Selvitetään tangenttien kulmakertoimet apukolmioiden avulla.





Kulmakerroin on 1,64, joten viherkasvin kasvunopeus on noin 1,6 cm/viikko.

Kulmakerroin on negatiivinen. Kanien määrä vähenee nopeudella 70 yksilöä/vuosi.

Vastaus

Vastaus  
Kasvunopeus on 1,6 cm/viikko.

Kanien määrä **a)** kasvaa nopeudella 80 yksilöä/vuosi ja **b)** vähenee nopeudella 70 yksilöä/vuosi.

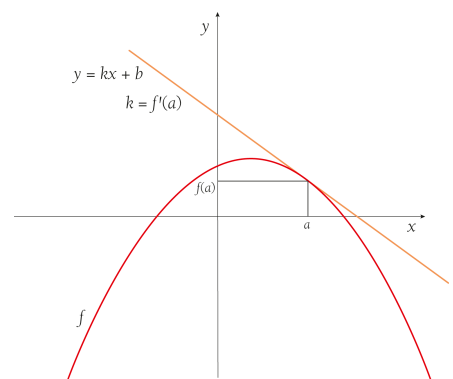
## Derivaatta

Funktion muutosnopeuden ilmaisevaa tangentin kulmakerrointa kutsutaan **funktion derivaataksi**.

**Funktion muutosnopeus** voidaan laskea myös siinä tapauksessa, että kuvaaja ei liity käytännön tilanteeseen.

Funktion  $f$  derivaatta kohdassa  $a$  on funktion kuvaajalle kohdassa  $a$  piirretyn **tangentin kulmakerroin**. Funktion derivaatasta kohdassa  $a$  käytetään merkintää  $f'(a)$ . Se

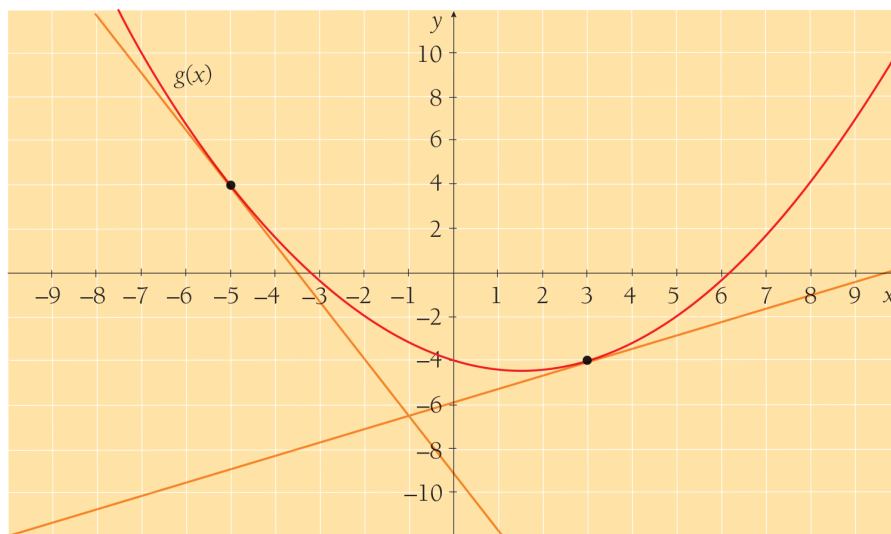
Tangentin kulmakertoimen voi katsoa myös ohjelman antamasta tangentsuoran yhtälöstä.



ilmaisee funktion arvon muutosnopeuden kohdassa  $a$ .

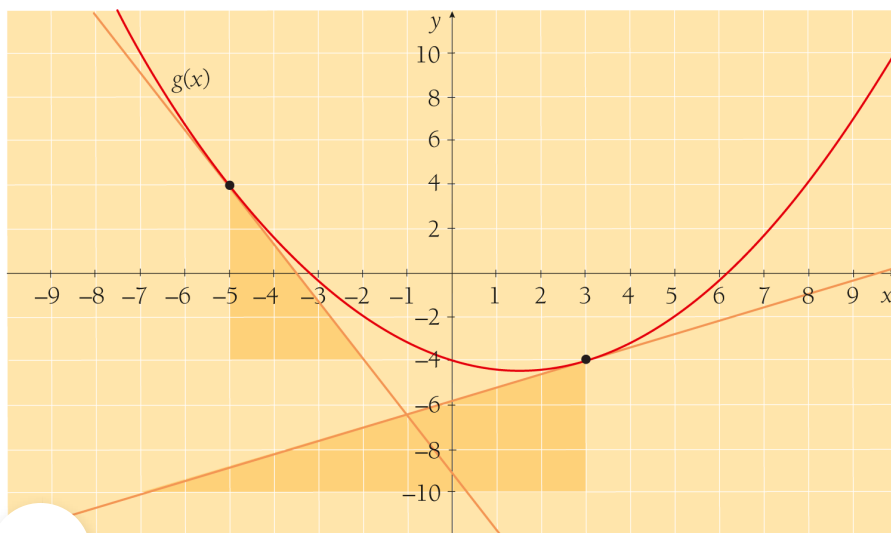
#### Esimerkki 4

Määritä kuvaajasta funktion  $g(x)$  derivaatta kohdissa  $x = 3$  ja  $x = -5$ .



#### Ratkaisu

Funktion derivaatta on sen kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin. Kulmakertoimen laskemiseksi tangentille voidaan piirtää apukolmio. Kuvaajassa ruutu vastaa  $y$ -akselin suunnassa kahta yksikköä.



Kohtaan  $x = 3$  piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Funktion derivaatta kohdassa  $x = 3$  on 0,6.

Kohtaan  $x = -5$  piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{-8}{3} = -2,666... \approx -2,7.$$

Funktion derivaatta kohdassa  $x = -5$  on noin  $-2,7$ .

Vastaus

Derivaatta kohdassa  $x = 3$  on 0,6 ja derivaatta kohdassa  $x = -5$  noin  $-2,7$ .

Esimerkki 5

Määritä kuvaajasta

**a)**  $f(-2)$

**b)**  $f'(0)$

**c)** funktion  $f(x)$  derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu

**a)** Merkintä  $f(-2)$  tarkoittaa funktion arvoa kohdassa  $x = -2$ .

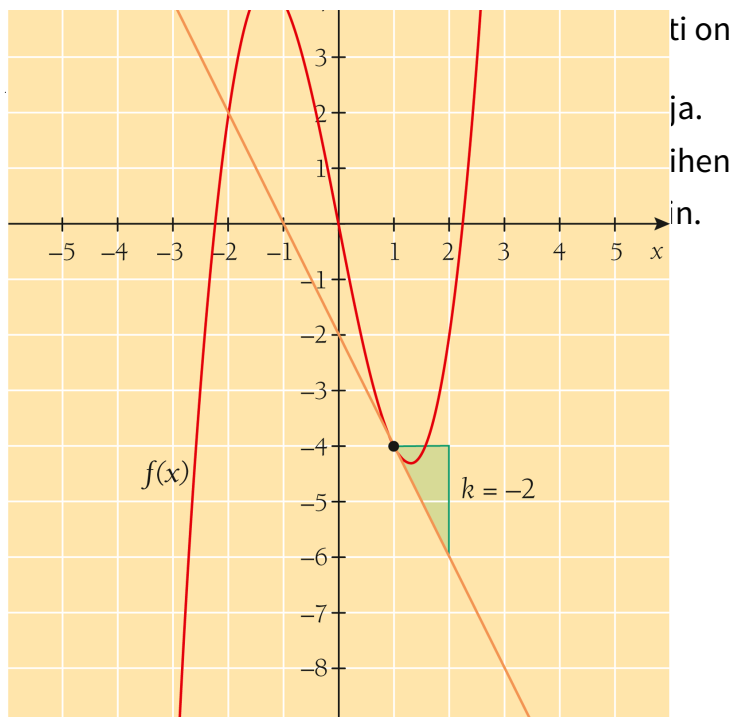
Se saadaan etsimällä kuvaajasta arvoa  $x = -2$  vastaava  $y$ -koordinaatti. Kuvaajan perusteella  $f(-2) = -1$ .

**b)** Merkintä  $f'(0)$  tarkoittaa funktion derivaattaa kohdassa  $x = 0$ . Se on kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Kulmakertoimen laskemiseksi tangentille

an piirtää apukolmio.

## Avainkäsitteet:

- funktion muutosnopeus
- tangentti
- tangentin kulmakerroin
- funktion derivaatta



ti on  
ja.  
ihen  
in.

