

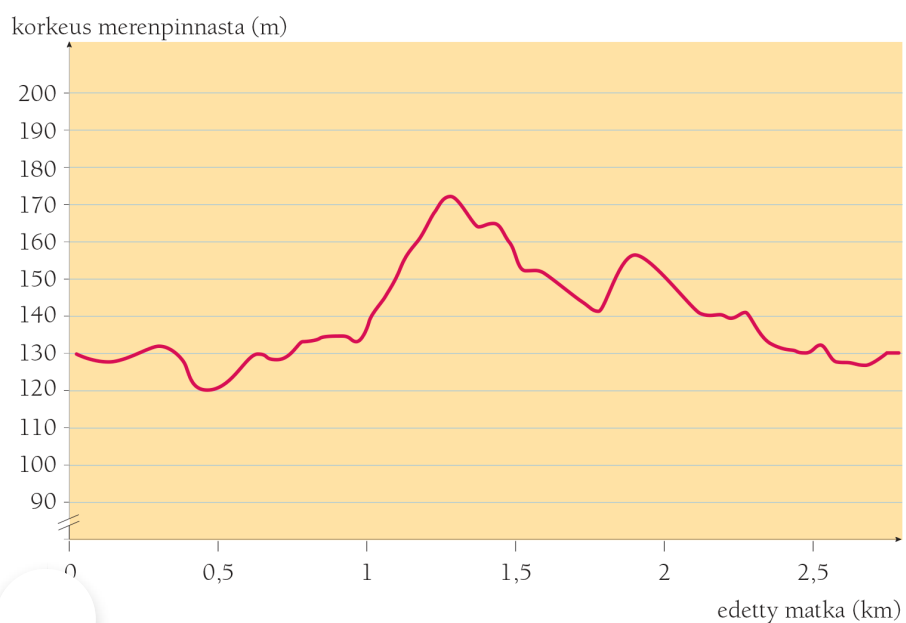
Funktion kasvaminen ja väheneminen

Esimerkki 1

Hiihtokilpailuissa ladun korkeuseroja kuvataan latuprofiililla. Tarkastele oheista latuprofiilia ja vastaa kysymyksiin.

a) Missä on ladun korkein kohta?

b) Millä latuosuuksilla hiihdetään ylämäkeen?



Ratkaisu

a) Ladun korkein kohta on noin 1,3 kilometrin päässä lähdöstä.

b) Ylämäkeen hiihdetään noin 0,5–0,6 kilometrin, 1,0–1,3 kilometrin ja noin 1,7–1,8 kilometrin päässä lähdöstä. Pieniä nousuja on muuallakin.



Funktion kasvaminen ja väheneminen

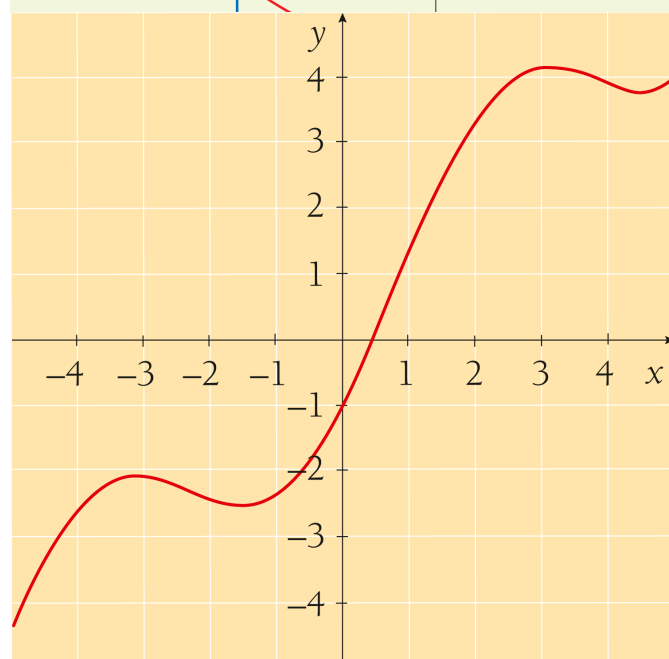
Esimerkissä 1 latuprofiilin kuvaaja esittää funktiota, jolla kuvataan korkeus reitin eri kohdissa. Funktion arvot suurenevats nousuissa ja pienenevät laskuissa. Nousuissa funktio on kasvava ja laskuissa vähenevä. Funktion kasvamista tai vähenemistä tutkittaessa selvitetään, miten funktion arvot muuttuvat eri lukuväleillä.

Funktio on **kasvava** välillä, jolla sen kuvaaja nousee ylöspäin liikuttaessa vasemmalta oikealle. Tällöin muuttujan x arvon kasvaessa funktion arvo kasvaa:

$x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$.

Esimerkki 2

Millä välillä funktio on kasvava?



askee

öin

nenee:

Ratkaisu

Piirretyllä alueella funktio on kasvava kolmella välillä. Välit ovat likimain

$$x \leq -3,2$$

$$-1,5 \leq x \leq 3,0$$

$$x \geq 4,5.$$

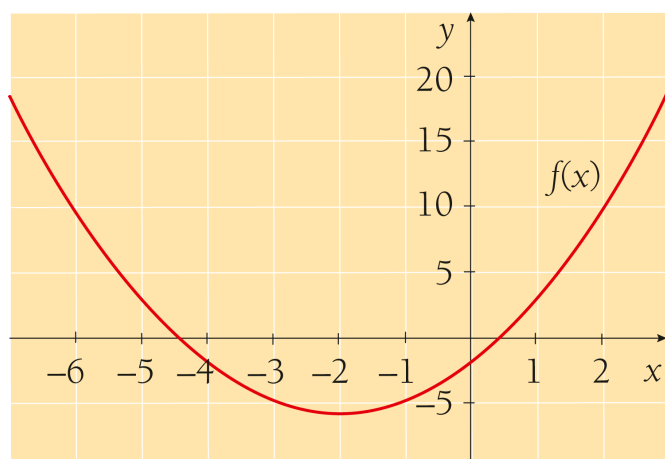
Vastaus

Funktio on kasvava väleillä $x \leq -3,2$ ja $-1,5 \leq x \leq 3,0$ ja $x \geq 4,5$.

Esimerkki 3

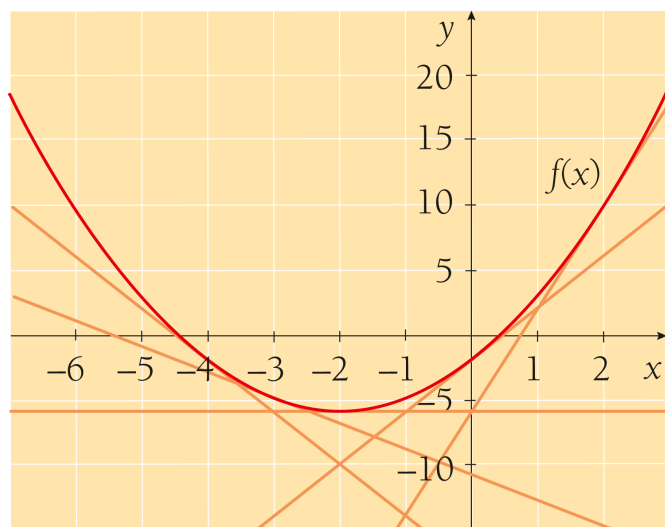
Kuvassa on funktion $f(x) = x^2 + 4x - 2$ kuvaaja muuttujan x välillä $-7 \leq x \leq 3$. Tutki, missä funktion $f(x)$ derivaatta on positiivinen ja missä negatiivinen. Mikä yhteys on funktion

derivaatan merkin ja kasvamisen välillä?



Ratkaisu

Funktion derivaatta on positiivinen välillä, jossa kuvaajalle piirretyt tangentit ovat nousevia suoria. Funktion derivaatta on negatiivinen välillä, jossa tangentit ovat laskevia suoria.



Laskevat suorat ovat paraabelin huipun vasemmalla puolella ja nousevat suorat huipun oikealla puolella. Paraabelin huipussa tangentti on vaakasuorassa.

Määritetään huipun x -koordinaatti derivoimalla funktio.

$$f'(x) = 2x + 4$$

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$2x + 4 = 0$$

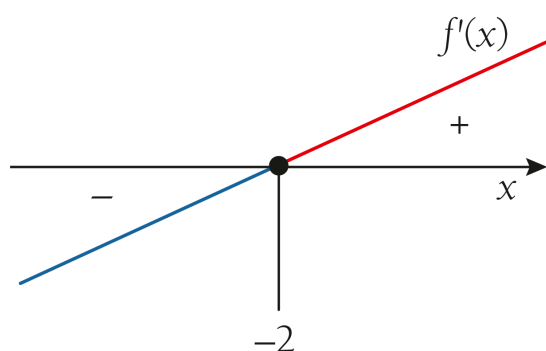
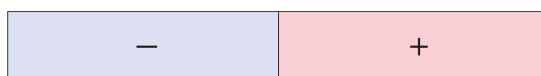
$$2x = -4 \mid : 2$$

$$x = -2$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on nouseva suora.

Derivaatta on positiivinen, kun $x > -2$.

Derivaatta on negatiivinen, kun $x < -2$.


 $f'(x)$


Funktio $f(x)$ on tehtävänannon kuvaajan perusteella kasvava välillä $x \geq -2$ ja vähenevä välillä $x \leq -2$. Välillä, jossa funktion derivaatta on positiivinen, funktio on kasvava. Välillä, jossa funktion derivaatta on negatiivinen, funktio on vähenevä.

Vastaus

Derivaatta on positiivinen välillä $x > -2$ ja negatiivinen välillä $x < -2$. Funktio on kasvava välillä, jossa funktion derivaatta on positiivinen. Funktio on vähenevä välillä, jossa funktion derivaatta on negatiivinen.

 **kasvamisen ja vähenemisen**

tutkiminen derivaatan avulla

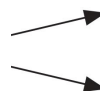
Esimerkissä 3 havaittiin, että funktio on kasvava välillä, jossa funktion derivaatta on positiivinen. Funktio on vähenevä välillä, jossa funktion derivaatta on negatiivinen. Tämä tulos pätee kaikille funktioille.

- Funktio $f(x)$ on kasvava välillä, jossa $f'(x) > 0$.
- Funktio $f(x)$ on vähenevä välillä, jossa $f'(x) < 0$.

Välillä, jossa funktio on kasvava tai vähenevä, derivaatta voi olla yksittäisissä kohdissa myös nolla. Tällaisia kohtia voivat olla esimerkiksi välin päätepisteet.

Funktion kasvamista ja vähenemistä voidaan havainnollistaa kulkukaavion avulla. Kulkukaavio on yksinkertaistettu malli funktion kuvaajasta. Kulkukaavioon merkitään derivaatan nollakohdat ja derivaatan merkki nollakohtien rajaamilla väleillä. Derivaatan merkistä päätellään

- funktion kasvaminen
- funktion väheneminen.



Jos rajoitutaan tutkimaan funktiota jollakin välillä, kulkukaaviossa otetaan huomioon vain tarkasteltava väli. Tällöin kulkukaavioon merkitään myös tarkasteltavan välin päätepisteet.

Esimerkki 4

Missä funktio on kasvava ja missä vähenevä?

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1,6$

b) $g(x) = 3x - 8$

• kaisu

Funktio on kasvava väleillä, joilla sen derivaatta on

positiivinen, ja vähenevä väleillä, joilla sen derivaatta on negatiivinen.

a) Funktion derivaatta on

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Derivaattafunktion kuvaaja on nouseva suora. Derivaatta on positiivinen, kun suora on x -akselin yläpuolella, ja negatiivinen, kun suora on x -akselin alapuolella.

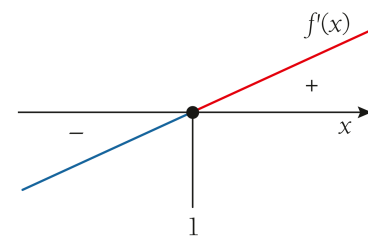
Määritetään derivaatan nollakohta.

$$2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.



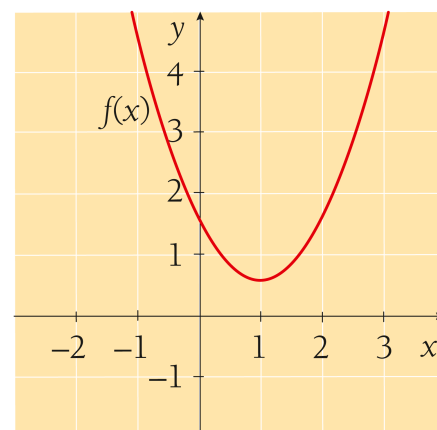
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Kulkukaaviosta näkyy funktion

$f(x) = x^2 - 2x + 1,6$ kuvaajan muoto, joka on paraabeli.

Funktio on kasvava, kun $x \geq 1$ ja vähenevä kun $x \leq 1$.

Funktion kulkukaavio voidaan piirtää koejärjestelmän kaavaeditorin taulukkotoiminnolla (Array), piirto-ohjelmalla tai laskentaohjelmalla. Koejärjestelmän kaavaeditoria käytettäessä derivaattafunktion kuvaajan muoto voidaan selittää sanoin.



b) Funktion derivaatta on

$$g'(x) = 3.$$

derivaatta on aina positiivinen, funktio on kaikkialla

kasvava. Tämän voisi päätellä myös ilman derivaattaa siitä, että funktion $g(x)$ kuvaaja on nouseva suora.

Vastaus

Funktio on

a) kasvava välillä $x \geq 1$ ja vähenevä välillä $x \leq 1$

b) kasvava kaikkialla.

Esimerkki 5

Millä väleillä funktio $g(x) = x^3 + 6x^2 + 1,8$ on kasvava ja millä vähenevä?

Ratkaisu

Tapa 1

Funktion $g(x) = x^3 + 6x^2 + 1,8$ derivaatta on $g'(x) = 3x^2 + 12x$.

Määritetään derivaatan nolla-kohdat laskentaohjelmalla.

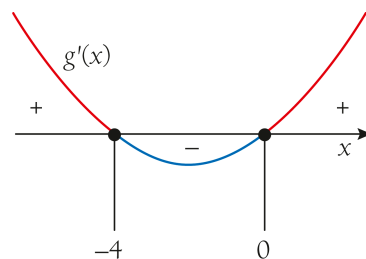
$$3x^2 + 12x = 0$$

$$x = -4 \text{ tai } x = 0$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

Funktio on kasvava väleillä $x \leq -4$ ja $x \geq 0$. Funktio on vähenevä välillä $-4 \leq x \leq 0$.

Jos derivaatan nollakohdat joutuu ratkaisemaan toisen asteen yhtälöstä, ohjelman käytöllä säästää aikaa.



$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	↗	↘	↗

Tapa 2

Piirretään funktion kuvaaja. Sen perusteella funktio on

kasvava väleillä $x \leq -4$ ja $x \geq 0$ ja vähenevä välillä $-4 \leq x \leq 0$.

Kuvaajasta luettu vastaus on perusteltava laskennallisesti derivaatan avulla.

Funktion $g(x) = x^3 + 6x^2 + 1,8$ derivaatta on $g'(x) = 3x^2 + 12x$.

Funktio on kasvava siellä, missä $g'(x) \geq 0$. Ratkaistaan epäyhtälö laskentaohjelmalla.

$$3x^2 + 12x \geq 0$$

$$x \leq -4 \text{ ja } x \geq 0$$

Funktio on vähenevä siellä, missä $g'(x) \leq 0$. Ratkaistaan epäyhtälö laskentaohjelmalla.

$$3x^2 + 12x \leq 0$$

$$-4 \leq x \leq 0$$

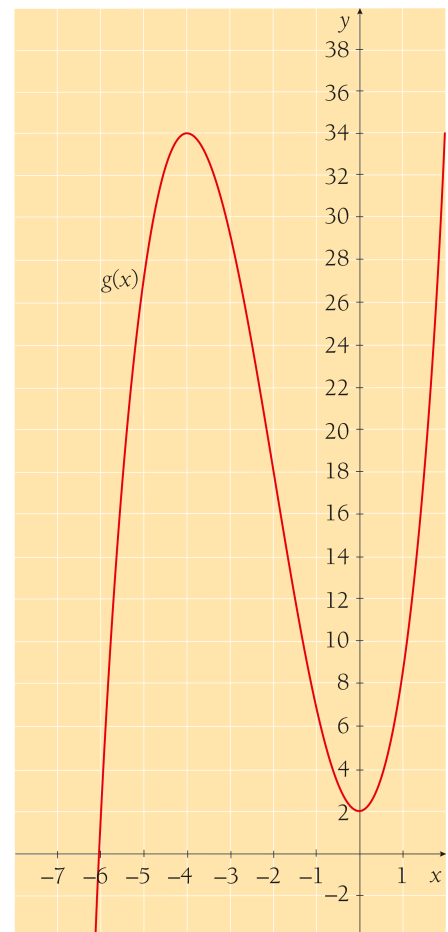
Epäyhtälöissä on yhtäsuuruus mukana siksi, että niiden ratkaisut ottavat huomioon myös derivaatan nollakohdat. Toisen ja korkeamman asteen polynomifunktiolla derivaatan nollakohdat ovat aina yksittäisiä eivätkä vaikuta kasvamiseen tai vähenemiseen.

Vastaus

Funktio on kasvava väleillä $x \leq -4$ ja $x \geq 0$ ja vähenevä välillä $-4 \leq x \leq 0$.

Esimerkki 6

Funktio $f(x) = -0,1x^2 + 3x + 17$ kuvaa lämpötilan vaihtelua kasvihuoneessa erään vuorokauden aikana kello kuuden ja keskiyön välillä. Funktiossa x ilmaisee, kuinka monta tuntia on kulunut keskiyöstä. Milloin lämpötila nousi? Milloin se laski?



Vastaus

Lämpötila nousee, kun funktion derivaatta on positiivinen.

$$f'(x) = -0,2x + 3$$

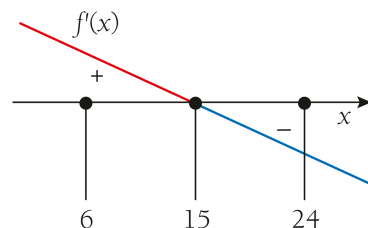
Määritetään derivaatan nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$-0,2x + 3 = 0$$

$$x = 15$$

Laaditaan kulkukaavio välille $6 \leq x \leq 24$. Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora.

Lämpötila nousee välillä $6 \leq x \leq 15$ ja laskee välillä $15 \leq x \leq 24$.



$f'(x)$		+	-	
$f(x)$		↗	↘	

Kasvamisen ja vähenemisen välit voidaan ratkaista myös epäyhtälöiden $f'(x) \geq 0$ ja $f'(x) \leq 0$ avulla. Laskentaohjelmassa tehtävän tarkasteluväli voidaan syöttää epäyhtälöön mukaan. Toiminto voi olla ohjelmasta riippuen esimerkiksi Ratkaise($-0,2x + 3 \geq 0, 6 \leq x \leq 24$) tai Solve($-0,2x + 3 \geq 0, x$) | $6 \leq x \leq 24$.

Vastaus

Lämpötila nousee kello kuudesta kello viiteentoista ja laskee sen jälkeen.

Esimerkki 7

Osoita, että funktio $f(x) = x^3 + 3$ on kaikkialla kasvava.

Ratkaisu

Funktion $f(x) = x^3 + 3$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2$.

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$3x^2 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

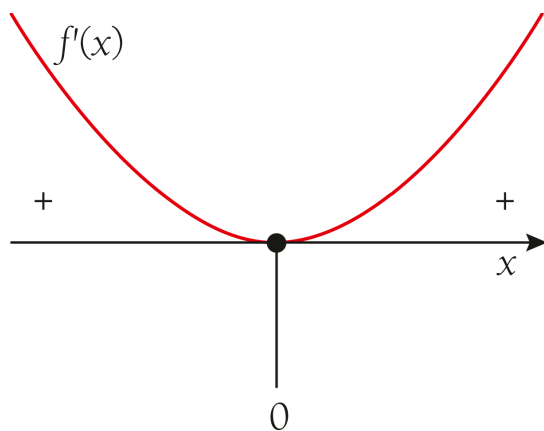
Osoitustehtävässä ratkaisun välivaiheisiin kiinnitetään tavallista enemmän huomiota. Siksi laskennallisia välivaiheita

Laaditaan kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

tehdään ilman ohjelmia niin paljon kuin mahdollista.

Derivaatalla on vain yksi nollakohta, joten paraabeli sivuaa x -akselia kohdassa $x = 0$.

Kulkukaavion perusteella funktio on kaikkialla kasvava.
Derivaatta on nolla yksittäisessä kohdassa $x = 0$.



$f'(x)$	+	+
$f(x)$		

Avainkäsitteet:

- funktion kasvaminen ja väheneminen
- derivaatan merkki
- kulkukaavio

