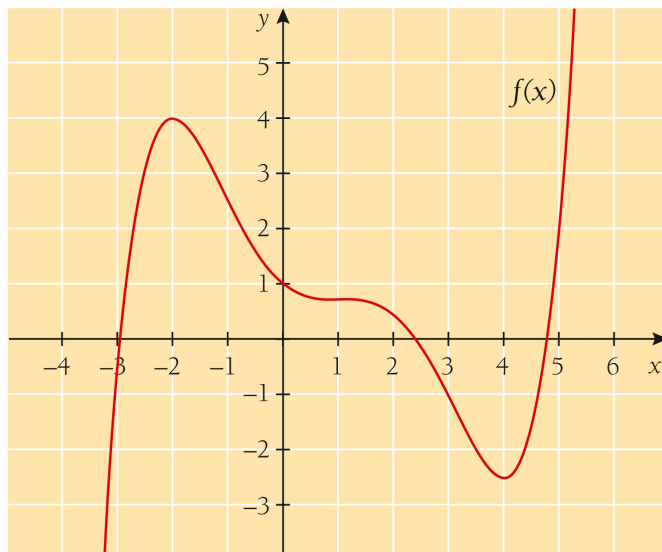


Funktion ääriarvot

Esimerkki 1

- a)** Määritä funktion $f(x)$ derivaatan nollakohdat kuvaajasta.
- b)** Päättele kuvaajasta, miten funktion $f(x)$ kulkusuunta muuttuu kussakin derivaatan nollakohdassa vasemmalta oikealle liikuttaessa.



Derivaatan nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 1$ ja $x = 4$.

b) Kohdassa $x = -2$ funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi.

a)

Kohdassa $x = 1$ funktion kulkusuunta ei muutu.

Kohdassa $x = 4$ funktio muuttuu vähenevästä kasvavaksi.

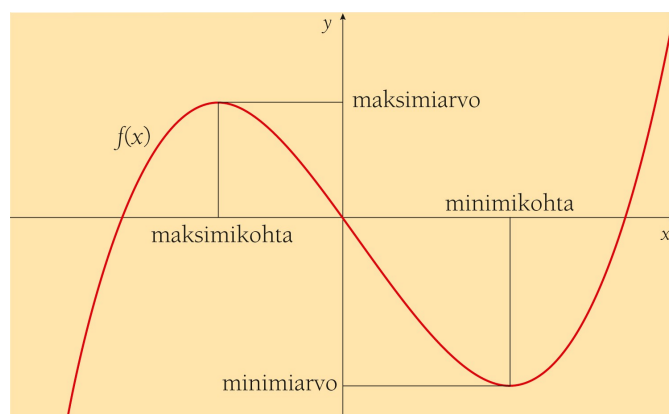
Ääriarvokohdat ja ääriarvot

Muuttujan x arvoja, joiden kohdalla funktion kulkusuunta muuttuu, kutsutaan funktion **ääriarvokohdiksi**. Funktion arvot näissä kohdissa ovat funktion **ääriarvoja**.

Ääriarvokohta voi olla **maksimikohta** tai **minimikohta**.

Maksimikohdassa funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi. Funktion arvo maksimikohdassa on suurempi kuin kohdan lähiympäristössä. Funktion ääriarvoa maksimikohdassa kutsutaan **maksimiarvoksi**.

Minimikohdassa funktio muuttuu vähenevästä kasvavaksi. Funktion arvo minimikohdassa on pienempi kuin kohdan lähiympäristössä. Funktion ääriarvoa minimikohdassa kutsutaan **minimiarvoksi**.



Funktiolla voi olla useampia maksimi- ja minimiarvoja.

Maksimiarvo ei välttämättä ole suurin arvo eikä

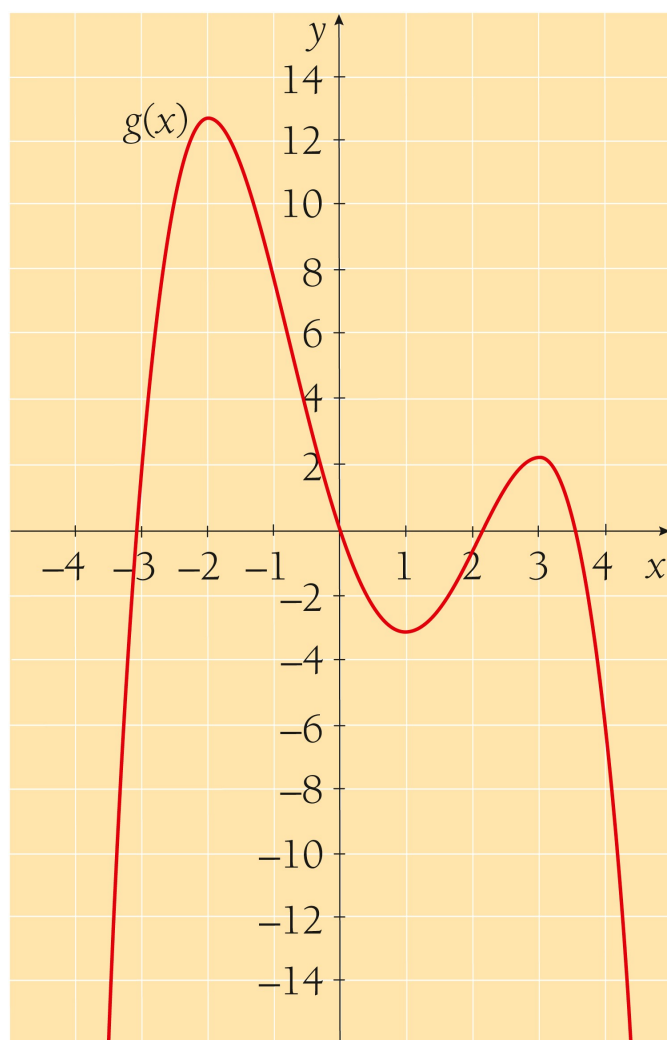
minimiarvo pienin arvo. Tämän korostamiseksi käytetään

eriläisiä nimityksiä paikallinen maksimiarvo, paikallinen

minimiarvo ja paikallinen ääriarvo.

Esimerkki 2

Määritä kuvaajasta funktion $g(x)$ ääriarvokohdat ja ääriarvot. Onko funktiolla suurinta tai pienintä arvoa?



Ratkaisu

Funktiolla on maksimiarvo kohdissa $x = -2$ ja $x = 3$, joissa funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi. Maksimiarvot ovat $g(-2) \approx 12,5$ ja $g(3) \approx 2,2$.

Funktiolla on minimiarvo kohdassa $x = 1$, jossa funktio muuttuu vähenevästä kasvavaksi.

kasvavaksi. Minimiarvo on $g(1) \approx -3,0$.

Kuvaajan perusteella funktion toinen maksimiarvo $g(-2) \approx 12,5$ on funktion suurin arvo. Pienintä arvoa funktiolla ei kuvaajan perusteella ole.

Vastaus

Maksimiarvot ovat $g(-2) \approx 12,5$ ja $g(3) \approx 2,2$.

Minimiarvo on $g(1) \approx -3,0$. Funktion suurin arvo on $g(-2) \approx 12,5$. Pienintä arvoa ei ole.

Esimerkki 3

Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$ paikalliset ääriarvot. Onko funktiolla suurinta tai pienintä arvoa?

Ratkaisu

Selvitetään ääriarvokohtat kulkukaavion avulla.
Derivoidaan funktio.

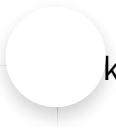
$$f'(x) = x^2 - 2x$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 2$$

Laaditaan kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Kulkukaavion alapuolelle voidaan merkitä maksimi- ja minimikohdat lyhenteillä max ja min.

 kaavion perusteella funktiolla on maksimiarvo

kohdassa $x = 0$. Laskentaohjelmalla saadaan

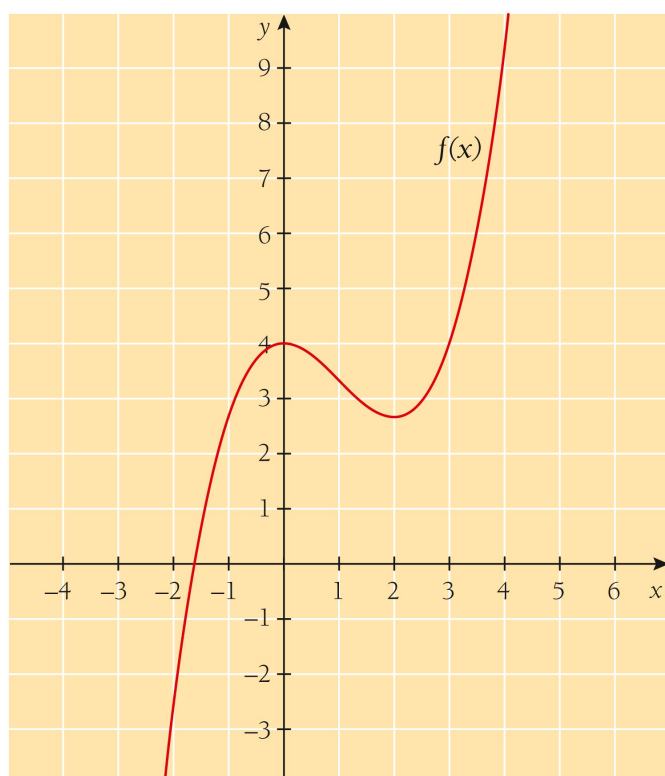


Funktiolla on minimiarvo kohdassa $x = 2$.

Laskentaohjelmalla saadaan

$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\frac{8}{3}$	$2\frac{2}{3}$	
	max	min	

Suurimman ja pienimmän arvon tutkimiseksi piirretään laskentaohjelmalla funktion kuvaaja. Sen avulla voidaan myös tarkistaa saadut ääriarvokohdat ja ääriarvot.



Kuvaajan perusteella funktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa. Esimerkiksi funktion arvo $f(4) = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$ on suurempi kuin maksimiarvo 4 ja funktion arvo $f(-2) = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$ on pienempi kuin minimiarvo $2\frac{2}{3}$.

Vastaus

tion paikalliset ääriarvot ovat maksimiarvo $f(0) = 4$ ja minimiarvo $f(2) = 2\frac{2}{3}$. Funktiolla ei ole suurinta eikä

Suurimman ja pienimmän arvon puuttumisen voi perustella suoraan myös polynomifunktion asteluvulla: kolmannen asteen polynomifunktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa, ellei tarkastelua rajoiteta jollekin välille.

pienintä arvoa.

Esimerkki 4

Tutki, onko funktiolla $g(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 8$ ääriarvoja.

Ratkaisu

Tutkitaan funktiota kulkukaavion avulla. Derivoidaan funktio.

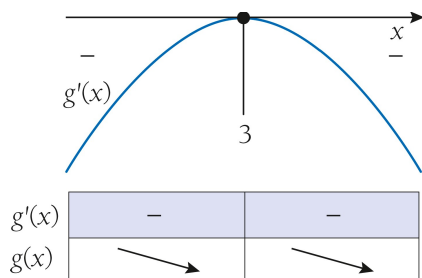
$$g'(x) = -3x^2 + 18x - 27$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$-3x^2 + 18x - 27 = 0$$

$$x = 3$$

Laaditaan kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

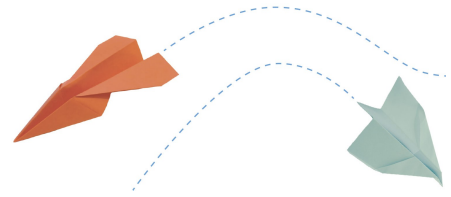


Kulkukaavion perusteella funktio on kaikkialla vähenevä. Koska funktio ei muuta kulkusuuntaansa derivaatan nollakohdassa $x = 3$, se ei ole ääriarvokohta. Funktiolla ei ole ääriarvoja.

Vastaus

Funktiolla ei ole ääriarvoja.

ion ääriarvot saadaan ohjelman piirtotilassa yleensä



samalla toiminnolla kuin suurin ja pienin arvo.

Avainkäsitteet:

- ääriarvokohta
- ääriarvo
- maksimikohta
- maksimiarvo
- minimikohta
- minimiarvo

