

Derivaatan käyttöä

Esimerkki 1

Määritä paraabelin $y = 3x^2 - 6x - 5$ huipun koordinaatit

- a)** laskentaohjelmalla piirretyn kuvaajan avulla
- b)** laskennallisesti.

Ratkaisu

- a)** Piirretään paraabeli laskentaohjelmalla.

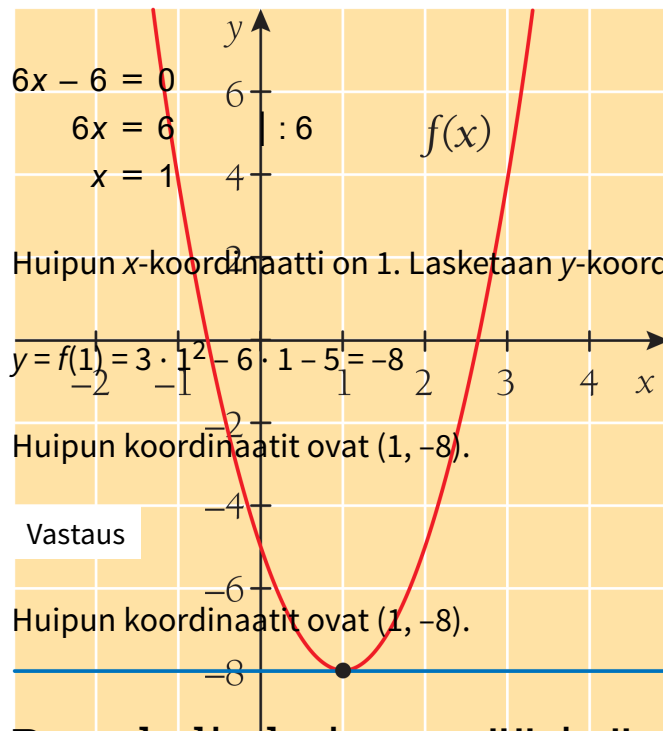
Kuvaajan perusteella huippu on pisteessä $(1, -8)$.

- b)** Paraabelin huipun kohdalle piirretty tangentti on x -akselin suuntainen suora, joten sen kulmakerroin on 0.

Paraabelin huipun x -koordinaatti on funktion $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$ derivaatan nollakohta. Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 6x - 6$$

...n derivaatan nollakohta.



Paraabelin huipun määrittäminen laskennallisesti

Koska paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ huippuun piirretty tangentti on x -akselin suuntainen suora, huippu voidaan aina määrittää derivaatan avulla esimerkin 1 b-kohdan tavalla.

Paraabelin huipun määrittäminen:

1. Derivoidaan funktio $f(x)$, jonka kuvaaja paraabeli on.
2. Määritetään **derivaatan nollakohta** yhtälön avulla.
3. Derivaatan nollakohta on huipun x -koordinaatti.
4. Alkuperäisen funktion $f(x)$ arvo derivaatan nollakohdassa on huipun y -koordinaatti.

Paraabelin huipun koordinaatit pitää määrittää laskennallisesti, ellei tehtävässä nimenomaan ohjeisteta ratkaisemaan tehtävää kuvaajan tai ohjelman avulla.



a) Kallion korkein kohta on paraabelin huipun kohdalla.

Derivoidaan funktio $f(x) = -0,02x^2 + 0,8x$.

$$f'(x) = -0,04x + 0,8$$

Selvitetään yhtälön avulla, millä muuttujan x arvolla

derivaattafunktio $f'(x) = 0$. Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelmalla.

$$-0,04x + 0,8 = 0$$

$$x = 20$$

tasosta mitattuna?

Paraabelin huippu on siis kohdassa $x = 20$.

c) Missä kulmassa kallio nousee vedestä?

Kallion korkeus on paraabelin huipun y -koordinaatti.

Ratkaisu

$$y = f(20) = 8 \text{ (m)}$$

Hahmotellaan tilanteesta kuva.

b) Kallion leveys vedenpinnan tasosta mitattuna on

funktion $f(x) = -0,02x^2 + 0,8x$ nollakohtien välinen etäisyys.

Ratkaistaan nollakohdat laskentaohjelmalla.

$$-0,02x^2 + 0,8x = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 40$$

Kallion leveys vedenpinnan tasolla on $40 - 0 = 40 \text{ (m)}$.

c) Symmetrian perusteella kallio nousee vedestä samassa

kulmassa molemmilla puolilla. Kulma saadaan, kun

piirretään tangentti paraabelin ja x -akselin

jompaankumpaan leikkauskohtaan, esimerkiksi kohtaan $x = 0$.

Tangentin kulmakerroin on funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa $x = 0$.

$$f'(0) = 0,8$$

Tangentin kulmakerroin on suorakulmaisen apukolmion kateettien pituuksien suhde.

Kulma α saadaan ratkaistua apukolmiosta.

$$\tan \alpha = 0,8$$

$$\alpha = 38,65... \approx 39^\circ$$



Vastaus

- a)** Korkein kohta on 8,0 m vedenpinnan yläpuolella.
- b)** Leveys vedenpinnan tasolta mitattuna on 40 m.
- c)** Kallio nousee vedestä 39 asteen kulmassa.

Esimerkki 3

Määritä funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 4$ kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin yhtälö

- a)** tietokoneohjelman avulla
- b)** laskennallisesti.

Ratkaisu

- a)** Piirretään geometriaohjelmalla funktion kuvaaja, sijoitetaan kuvaajalle piste kohtaan $x = 2$ ja piirretään pisteeseen kuvaajan tangenti.

Ohjelma antaa tangentin yhtälön, joka on $y = -0,67x - 1,33$.

Yhtälön kertoimet näyttävät likiarvoilta. Jos ohjelman pyöristystarkkuutta lisää, epäily vahvistuu: esimerkiksi viiden desimaalin tarkkuudella yhtälö on $y = -0,66667x - 1,33333$.

- b)** Tangenti on suora, jonka yhtälö voidaan muodostaa

Kulman suuruuden voi tarkistaa geometriaohjelman mittaus toiminnolla.



suoran yhtälön kaavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$. Kaavassa (x_0, y_0) on jokin suoran piste ja k suoran kulmakerroin.

Ainoa tunnettu suoran piste on se, jossa suora sivuaa funktion $f(x)$ kuvaajaa. Piste on funktion $f(x)$ kuvaaja. Piste on funktion $f(x)$ kuvaaja. Piste on funktion $f(x)$ kuvaaja.

$$f(2) = -\frac{1}{3} \cdot 2^4 + \frac{5}{6} \cdot 2^3 - 4 = -\frac{8}{3}$$

Tangentin kulmakerroin on funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa $x = 2$. Derivoidaan funktio laskentaohjelmalla.

$$f'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

$$f'(2) = -\frac{4}{3} \cdot 2^3 + \frac{5}{2} \cdot 2^2 = -\frac{2}{3}$$

Siis $(x_0, y_0) = \left(2, -\frac{8}{3}\right)$ ja $k = -\frac{2}{3}$.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

Vastaus

Tangentin yhtälö on **a)** ohjelman perusteella $y = -0,67x - 1,33$, **b)** laskennallisesti ratkaistuna $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Avainkäsitteet:

- derivaatan nollakohta
- kävelin huipun määrittäminen

Tangentin yhtälö pitää ratkaista laskennallisesti, jos tehtävässä ei erikseen pyydetä ratkaisua kuvaajan tai ohjelman avulla. Näin varmistutaan myös siitä, että yhtälön kertoimille saadaan tarkat arvot.