MAB6

Lukujonot

Esim. Laske aritmeettisen lukujonon
$2, 5, 8, \dots$

a) 20. jäsen

$d = 5 - 2 = 3$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{20} = 2 + (20-1) \cdot 3 = \underline{\underline{59}}$

b) 20 ensimmäisen jäsenen summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{2 + 59}{2} = \underline{\underline{610}}$$

c) Kuinka monen jäsenen summa on 2667?

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
$= 2 + (n-1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

$$2667 = n \cdot \frac{2 + 3n - 1}{2}$$

$n = -\frac{127}{3}$ tai $n = 42$

V: 42 jäsenen

Esim. Laske geometrisen lukujonon 2, 6, 18, ..

a) kymmenes jäsen

$$q = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 2 \cdot 3^9 = \underline{39366}$$

b) Kymmenen ensimmäisen jäsenen summa

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_{10} = \frac{2(1-3^{10})}{1-3} = \underline{59048}$$

MAB 6

Esim. Lukion 2. vuoden opiskelija alkaa säästämään jatko-opintoja varten. Hän laittaa alkuun säästöön 20 € ja päättää jatkossa laittaa säästöön joka kuukausi 5 € edelliskuukautta enemmän.

Paljonko rahaa on säästössä 2v kuluttua?

Ratkaisu:

Talletukset muodostavat aritm. jonon

20, 25, 30, ...

$d = 5$

$n = 2 \cdot 12 = 24$

$a_{24} = 20 + (24-1) \cdot 5 = 135$

$$S_{24} = 24 \cdot \frac{20 + 135}{2} = 1860$$

V: 1860 €

c) Taulukoidaan appletin avulla Viljan ja Väinön kokonaissäästöjä.

Kuukausi	Vilja (€)	Väinö (€)
1	40	20
2	85	44
3	135	72,8
...	...	...
12	810	791,61
13	910	969,93

Väinöllä on 13. kuukautena säästössä enemmän rahaa kuin Viljalla.

Johdannossa laskettiin yhteen **aritmeettisen** ja **geometrisen lukujonon** peräkkäisiä jäseniä eli laskettiin **aritmeettinen** ja **geometrinen summa**. Lukujonoja käsiteltiin moduulissa MAB2. Ohessa on kertausta lukujonojen ominaisuuksista.

ARITMEETTINEN LUKUJONO

Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus d on vakio.
Erotusluku on $d = a_{n+1} - a_n$.
Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
Aritmeettisen lukujonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

GEOMETRINEN LUKUJONO

Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde q on vakio.
Suhdeluku on $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
Geometrisen lukujonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ jos } q \neq 1.$$
Jos $q = 1$, summa on $S_n = n \cdot a_1$.

ESIMERKKI 1

Aritmeettinen lukujono alkaa 4, 7, 10, ...

a) Määritä lukujonon yleinen jäsen ja laske 20. jäsen a_{20}.

b) Laske lukujonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

c) Kuinka monta jäsentä lukujonon alusta lähtien on laskettava yhteen, jotta summa on 1425?

Ratkaisu

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$ ja erotusluku d saadaan kahden peräkkäisen jäsenen erotuksena.

$d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$

Sijoitetaan ensimmäinen jäsen ja erotusluku aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen lausekkeeseen ja sievennetään.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$

Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3n + 1$ ja 20. jäsen on $a_{20} = 3 \cdot 20 + 1 = 61$.

b) Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$. Viimeinen yhteenlaskettava eli 20. jäsen on a-kohdan mukaan $a_{20} = 61$. Sijoitetaan tiedot aritmeettisen summan lausekkeeseen $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$.

Summa on $S_{20} = \frac{20 \cdot (4+61)}{2} = 650$.

c) **Tapa 1**

Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$. Yhteenlaskettavien lukumäärää n ei tiedetä, joten viimeisen yhteenlaskettavan lauseke on a-kohdan mukaan $a_n = 3n + 1$. Lasketaan, kuin monta yhteenlaskettavaa tulee olla, jotta summa on 1425. Muodostetaan aritmeettisen summan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä n, kun $S_n = 1425$, $a_1 = 4$ ja $a_n = 3n + 1$.

$$1425 = \frac{n \cdot (4 + 3n + 1)}{2}$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan ohjelmalla $n = -31{,}666...$ ja $n = 30$. Järjestysluvun on oltava positiivinen kokonaisluku, joten ratkaisuksi kelpaa vain $n = 30$.

On laskettava yhteen lukujonon 30 ensimmäistä jäsentä, jotta summa on 1425.

Tapa 2

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä yhteen, kunnes summa on 1425.

	A	B	C
1	Järjestysluku	Jäsen	Summa
2	1	4	4
3	2	7	11
4	3	10	21
5	4	13	34
⋮			
30	29	88	1334
31	30	91	1425
32	31	94	1519

Solussa B2 on luku 4.

Solussa B3 on kaava =B2+3.

Solussa C2 on kaava =B2.

Solussa C3 on kaava =C2+B3.

Taulukosta nähdään, että summa on 1425, kun lukujonon 30 ensimmäistä jäsentä on laskettu yhteen.

Videossa näytetään, miten yhteenlaskettavien lukumäärä voidaan määrittää taulukkolaskentaohjelmalla.

ESIMERKKI 2

Geometrinen lukujono alkaa 2800, 2100, 1575, ...

a) Määritä lukujonon yleinen jäsen ja laske 7. jäsen a_7.

b) Laske lukujonon 7 ensimmäisen jäsenen summa kokonaislukujen tarkkuudella.

c) Kuinka monta jäsentä lukujonon alusta lähtien on laskettava yhteen, jotta summa ylittää 11 000?

Ratkaisu

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = \mathbf{2800}$ ja suhdeluku q saadaan kahden peräkkäisen jäsenen osamääränä.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2100}{2800} = 0,75$$

Sijoitetaan lukujonon ensimmäinen jäsen ja suhdeluku geometrisen lukujonon yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \mathbf{2800} \cdot \mathbf{0{,}75}^{n-1}$$

Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 2800 \cdot 0{,}75^{n-1}$ ja
7. jäsen on $a_7 = 2800 \cdot 0{,}75^{7-1} = 2800 \cdot 0{,}75^6 = 498{,}339...$

b) Lasketaan geometrinen summa $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$, kun $n = 7$, $a_1 = 2800$ ja $q = 0{,}75$.

Summa on $S_7 = \dfrac{2800 \cdot (1-0{,}75^7)}{1-0{,}75} = 9704{,}980... \approx 9705.$

c) **Tapa 1**

Lasketaan, kuinka monta yhteenlaskettavia tulee olla, jotta summa ylittää 11 000. Muodostetaan geometrisen summan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä n, kun $S_n = 11\ 000$, $a_1 = 2800$ ja $q = 0,75$.

$$11\ 000 = \frac{2800 \cdot (1-0,75^n)}{1-0,75}$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan ohjelmalla $n = 13,992...$

Summan tulee ylittää 11 000, joten 13 yhteenlaskettavaa ei vielä riitä. On siis laskettava yhteen lukujonon 14 ensimmäistä jäsentä.

Tapa 2

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä yhteen, kunnes summa ylittää 11 000.

	A	B	C
1	Järjestysluku	Jäsen	Summa
2	1	2800	2800
3	2	2100	4900
4	3	1575	6475
5	4	1181,25	7656,25
⋮			
14	13	88,69	10933,92
15	14	66,52	11000,44
16	15	49,89	11050,33

Solussa B2 on luku 2800.

Solussa B3 on kaava =B2*0,75.

Solussa C2 on kaava =B2.

Solussa C3 on kaava =C2+B3.

Taulukosta nähdään, että summa ylittää 11 000, kun lukujonon 14 ensimmäistä jäsentä on laskettu yhteen.

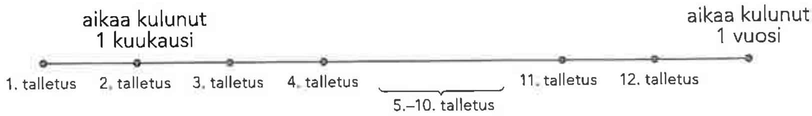
Talletussäästämisessä talletuksia tehdään usein säännöllisesti vuoden kuluessa. Säännöllisissä talletuksissa talletuspääoma on samansuuruinen ja vuotuinen korkokanta jokaista talletusta kohden yhtä suuri. Kun talletuksia tehdään säännöllisesti yhden vuoden aikana, yksittäisten talletusten korot muodostavat aritmeettisen lukujonon ja talletuspääoma yhdeltä vuodelta voidaan siten laskea aritmeettisella summalla.

ESIMERKKI 3

Eliel tallettaa säästötililleen 50 euroa jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä kalenterivuoden ajan. Tilin nettokorkokanta on 1,20 %. Kuinka paljon Elielin tilillä on rahaa vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta? Tilin korkotapana on 30/360.

Ratkaisu

Eliel tallettaa tilille pääoman $k = 50$ € jokaisen kuukauden alussa. Tarkastellaan tilannetta aikajanan avulla.



Korkotapa 30/360 tarkoittaa, että jokainen kalenterikuukausi lasketaan 30 korkopäivän mittaiseksi, joten vuosi jakautuu 12 yhtä suureen osaan. Korkotapoihin tutustuttiin moduulissa MAB6.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen eli 12. talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden. Tilin nettokorkokanta on 1,20 %, joka prosenttikertoimena on $i = 0{,}012$. Taulukoidaan talletuksille maksettavien korkojen määriä vuoden kuluttua 1. talletuksesta.

Yksinkertainen korko lasketaan kaavalla $r = kit$.

	Korkoaika (kk)	Korkoaika t vuosina	Talletukselle maksettava korko $r = kit$ (€)
1. talletus	12	$\frac{12}{12}$	$50 \cdot 0{,}012 \cdot \frac{12}{12} = 0{,}60$
2. talletus	11	$\frac{11}{12}$	$50 \cdot 0{,}012 \cdot \frac{11}{12} = 0{,}55$
3. talletus	10	$\frac{10}{12}$	$50 \cdot 0{,}012 \cdot \frac{10}{12} = 0{,}50$
...	...	...	...
11. talletus	2	$\frac{2}{12}$	$50 \cdot 0{,}012 \cdot \frac{2}{12} = 0{,}10$
12. talletus	1	$\frac{1}{12}$	$50 \cdot 0{,}012 \cdot \frac{1}{12} = 0{,}05$

Talletuksille maksettavan koron määrä pienenee kuukausittain 0,05 eurolla eli joka kuukausi yhtä paljon. Korot muodostavat siis aritmeettisen lukujonon 0,60; 0,55; 0,50; ...; 0,10; 0,05, ja niiden summa on aritmeettinen summa.

Aritmeettinen summa on $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$.

Yhteenlaskettavia on yhteensä $n = 12$, ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 0{,}60$ ja viimeinen $a_{12} = 0{,}05$. Korkojen summa on

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (0{,}60 + 0{,}05)}{2} = 3{,}90.$$

Eliel on tallettanut tilille $12 \cdot 50$ € = 600 € ja talletuksille maksetaan korkoa yhteensä 3,90 €, joten Elielin tilillä on vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta 600 € + 3,90 € = 603,90 €.

Videossa näytetään, miten lukujonon jäsenten summa voidaan laskea taulukkolaskentaohjelmalla.

HARJOITUSTEHTÄVÄT

ALOITA PERUSTEISTA

A **101.** Laske aritmeettisen lukujonon 2, 17, 32, ...

a) erotusluku d ja yleinen jäsen a_n

b) viideskymmenes jäsen a_{50}

c) viidenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa S_{50}.

A **102.** Laske geometrisen lukujonon 7, −21, 63, ...

a) suhdeluku q ja yleinen jäsen a_n

b) kymmenes jäsen a_{10}

c) kymmenen ensimmäisen jäsenen summa S_{10} kokonaislukujen tarkkuudella.

A **103.** Laske kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella lukujonon 8, 2, ... kahdentoista ensimmäisen jäsenen summa, kun lukujono on

a) aritmeettinen

b) geometrinen.

104. Tutkitaan aritmeettista lukujonoa 3, 8, 13, ...

a) Laske lukujonon viidentoista ensimmäisen jäsenen summa.

b) Kuinka monta jäsentä lukujonon alusta lähtien on laskettava yhteen, jotta summa on 366?

105. Tutkitaan geometrista lukujonoa 1, 5, 25, ...

a) Laske lukujonon seitsemän ensimmäisen jäsenen summa.

b) Kuinka monta jäsentä lukujonon alusta lähtien on laskettava yhteen, jotta summa on 12 207 031?

A **106.** Okko pyysi äidiltään palkkaa kotitöistä siten, että ensimmäisen päivän palkka olisi 1 sentti, seuraavan päivän palkka 2 senttiä, kolmannen päivän palkka 4 senttiä ja niin edelleen siten, että päivän palkka olisi aina kaksinkertainen edellisen päivän palkkaan verrattuna.

a) Millaisen lukujonon päiväpalkat muodostavat?

b) Kuinka suuri Okon päiväpalkka olisi kahden viikon kuluttua?

107. Kaupunki istuttaa eräänä vuonna 30 puuta ja sen jälkeen joka vuosi 20 puuta enemmän kuin edellisenä vuonna.

a) Millaisen lukujonon istutettavien puiden määrät muodostavat?

b) Kuinka monta puuta on istutettu 10 vuoden kuluttua yhteensä?

c) Kuinka paljon kaupungin on budjetoitava rahaa 10 vuoden aikana, jos yksi istutettava puuntaimi maksaa 350 euroa ja istutustyön hinta on 31 500 € jokaista 10 taimea kohden?

108. Tehtaan tuotanto on alussa 4800 yksikköä ja tuotannon vuosittaiseksi kasvuksi oletetaan 12 %.

a) Millaisen lukujonon vuosittaiset tuotantomäärät muodostavat?

b) Kuinka suuri tuotanto on kahdeksan vuoden kuluttua?

c) Kuinka suuri on kahdeksan ensimmäisen vuoden kokonaistuotanto?

109. Uuden kahvilan viikoittaiset asiakasmäärät muodostavat geometrisen lukujonon 700, 735, ... Kuinka monen viikon kuluttua kahvilassa on käynyt yli kymmenentuhatta asiakasta?

110. Tilille tehdään talletus vuoden ajan jokaisen kuukauden alussa. Tilin korkotapa on 30/360. Laadi oheisen laskentataulukon avulla laskentataulukossa olevan kuvan mukainen taulukko. Kuukausitalletuksen määrä kirjoitetaan soluun A2 ja korkokerroin soluun B2.

a) Kirjoita luku 1 soluun A5. Millainen komento kannattaa kirjoittaa soluun A6? Täydennä kaavan avulla sarakkeen A rivit 6–16.

b) Kirjoita luku 12 soluun B5. Millainen komento kannattaa kirjoittaa soluun B6? Täydennä kaavan avulla sarakkeen B rivit 6–16.

c) Kirjoita komento "=B5/12" soluun C5 ja täydennä sarakkeen C rivit 6–16.

d) Kirjoita komento "=A2*B2*C5" soluun D5. Komennossa $-merkit sarakkeen ja rivin edessä lukitsevat viitatun solun. Täydennä sarakkeen D rivit 6–16.

e) Täydennä taulukko loppuun. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, jos kuukausittaisen talletuksen suuruus on 70 € ja tilin nettokorkokanta on 0,90 %? Entä kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, jos talletuksen suuruus on 100 € ja nettokorkokanta 2,50 %?

111. Yhdistä väitteet A–E summiin I–V.

A Yhteenlaskettavia on kahdeksan.
B Kahden peräkkäisen yhteenlaskettavan erotus on −3.
C Ensimmäinen yhteenlaskettava on 1.
D Kahden peräkkäisen yhteenlaskettavan osamäärä on −4.
E Viimeinen yhteenlaskettava on 12,8.

I $-3+12-48+\ldots-12\,288$ **II** $5+7+\ldots+17+19$

III $S_7=\dfrac{0{,}2\cdot(1-2^7)}{1-2}$ **IV** $S_{15}=\dfrac{15\cdot(-13-55)}{2}$ **V** $S_{12}=\dfrac{1-5^{12}}{1-5}$

Ⓐ **112.** Pauli tallettaa säästötililleen 30 euroa jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä kalenterivuoden ajan. Tilin nettokorkokanta on 0,80 %. Kuinka paljon Paulin tilillä on rahaa vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta? Tilin korkotapana on 30/360.

113. Jenniina tallettaa koko kalenterivuoden ajan jokaisen kuukauden alussa 35 € tilille, jonka nettokorkokanta on 2,87 %. Tutki taulukkolaskentaohjelman avulla, kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta. Tilin korkotapa on 30/360.

114. Yrityksen investoinnin kustannukset olivat ensimmäisenä vuonna 56 400 €. Kustannusten arvioidaan vähenevän vuosittain 7,5 %. Kuinka paljon kustannuksia kertyy kuuden ensimmäisen vuoden aikana, jos arvio pitää paikkansa?

115. *Rakennuskustannusindeksi* kuvaa rakennustöiden, rakennusmateriaalien ja muiden rakennuskustannusten hintakehityksen suhteellista muutosta. Indeksin pisteluku on nyt 103,86. Pisteluvun arvioidaan suurenevan vuosittain kahdella pisteellä. Kuinka monta prosenttia nykyistä arvoa suurempi pisteluku on kymmenen vuoden kuluttua, jos arvio pitää paikkansa?

116. Tuotetta myydään ensimmäisen kuukauden aikana 8000 kappaletta. Seuraavien kuukausien myynti on aina 10 % pienempi kuin edellisen kuukauden myynti. Kuinka monen kuukauden kuluttua tuotetta on myyty yhteensä 75 000 kappaletta?

VASTAUKSET

Alkutesti

1. A ja C
2. B ja C
3. A, C ja D
4. C
5. B, C ja D

1 Talletuksia

101. **a)** $d=15$, $a_n=15n-13$ **b)** $a_{50}=737$
c) $S_{50}=18\,475$
102. **a)** $q=-3$, $a_n=7\cdot(-3)^{n-1}$ **b)** $a_{10}=-137\,781$
c) $S_{10}=-103\,334$
103. **a)** $S_{12}=-300$ **b)** $S_{12}=10{,}7$
104. **a)** $S_{15}=570$ **b)** 12 jäsentä
105. **a)** $S_7=19\,531$ **b)** 11 jäsentä
106. **a)** geometrisen lukujonon 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
b) 81,92 euroa
107. **a)** aritmeettisen lukujonon 30, 50, 70, 90, ...
b) 1200 puuta **c)** 4 200 000 €
108. **a)** geometrisen lukujonon
4800, 5376, 6021, 6744, ...
b) 10 600 yksikköä **c)** 59 000 yksikköä
109. 12 viikon kuluttua
110. **a)** komento =A5+1 **b)** komento =B5–1
c) – **d)** – **e)** 844,10 € ja 1216,25 €
111. A: II, B: IV, C: V, D: I ja E: III
112. 361,56 euroa
113. 426,53 €
114. 280 900 €
115. 17 %
116. 27 kuukauden kuluttua
117. **a)** 127 cm korkea **b)** 140 cm
118. **a)** 1080 pölyhiukkasta **b)** 4 kertaa
119. **a)** 320 euroa **b)** 635 euroa
120. **a)** 11. vuotena **b)** 16. vuotena
121. **a)** 31 600 euroa **b)** 26 päivää
122. keinossa A; 0,25 euroa
123. 21 €
124. 8 viestikierroksen jälkeen
125. 115,58 euroa
126. 99,53 €
127. Koboltttivarannot riittävät vain 18 vuotta.
128. **a)** 33 kilogrammaa **b)** lähestyy 50 kilogrammaa
129. **a)** 250,60 € **b)** 14,51 %
130. **a)** 1,025-kertaiseksi
b) vuodessa 307,50 euron suuruiseksi, kahdessa vuodessa 315,19 euron suuruiseksi
131. **a)** 1,40 % **b)** 581,45 euron suuruiseksi
132. **a)** 5150,93 €
b) 5 vuoden kuluttua
c) 1183,70 €
133. 14 264,23 euroa
134. A: III, B: II, C: I ja D: IV
135. **a)** väärin; 1,06
b) väärin; suurempi euromäärä
c) oikein
136. **a)** esim. Kuinka suureksi 600 euron pääoma kasvaa 0,9 prosentin nettokorkokannalla seitsemässä vuodessa?
b) esim. Mitä rahasummaa neljän vuoden kuluttua maksettava 700 euroa vastaa nykyrahassa, kun käytetään 3 prosentin korkokantaa?
137.

Vuosi	Tilillä rahaa (€)
1	404,48
2	409,01
3	413,59
4	418,22
5	422,91
6	427,64
7	432,43
8	437,28
9	442,17
10	447,13

138. **a)** $K=800$ euroa, $q=1{,}0255$ ja $n=2$
b) $k=760{,}71$ euroa
139. **a)** $k=10$ euroa, $K=10{,}61$ euroa ja $n=3$
b) $10{,}61=10\cdot q^3$, $q=1{,}0199$
c) 1,99 %
140. **a)** $a_n=700\cdot 1{,}038^n$
b) $n=7$; Pääoma on 7 vuoden kuluttua 900 euroa.
141. **a)** Kuinka suuri alkupääoma kasvaa 7 vuodessa 25 000 euroon, kun tilin nettokorkokanta on 2 %? $k\approx 21\,764$
b) Kuinka suuri tilin nettokorkokannan tulisi olla, jotta 400 euron talletus kasvaisi 8 vuodessa 560 euron suuruiseksi? $q\approx 1{,}0430$