

AVOIN MATEMATIIKKA

Tilastoja ja todennäköisyyksiä



Marika Toivola ja Tiina Härkönen

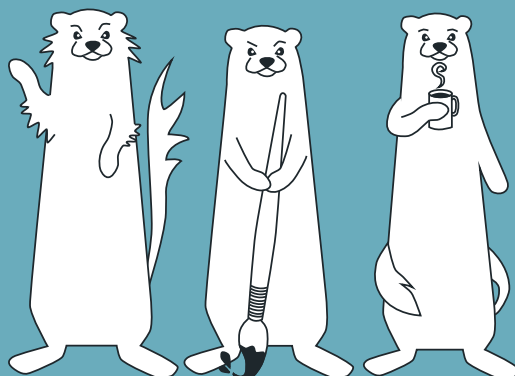
AVOIN MATEMATIIKKA

Tilastoja ja todennäköisyyksiä

Sisältö kuvituksineen on lisensoitu avoimella CC BY 3.0 -lisenssillä.

Kirjan alkuperäiseen docx-muotoiseen versioon löytyy linkki sivulta <http://avoinoppikirja.fi/>

Graafinen suunnittelu ja kuvitus:
Taira Vehkasalo, Hanna Inkilä, Helmi Folkersma



Tilastoja ja todennäköisyyksiä

1. Kuvaajien tulkintaa.....	6
2. Pylväs- ja viivadiagrammi.....	18
3. Sektoridiagrammi.....	27
4. Tilastomuuttujan tyypit ja frekvenssi.....	32
5. Aineiston luokittelu.....	38
6. Keskiarvon laskeminen.....	42
7. Tyyppiarvon ja mediaanin määrittäminen.....	50
8. Hajontalukujen määrittäminen.....	60
9. Taulukkolaskentaa.....	70
10. Tuotetaan ja havainnollistetaan tilastotietoja	78
11. Joukko-oppia ★.....	85
12. Todennäköisyyden määrittäminen.....	93
13. Klassinen todennäköisyys.....	97
14. Tilastollinen ja geometrinen todennäköisyys.....	103
15. Malleja alkeistapausten muodostamiseksi.....	109
16. Riippumattomien tapahtumien kertosääntö ★.....	117
17. Yleinen kertosääntö ★.....	122
18. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö ★.....	128
19. Vastatapahtuma ★.....	134
20. Kertaustehtäviä.....	139
Vastaukset.....	151
Taulukko-osio.....	188



Murphyn laki

"Jos pudotat voileivän, se pu-
toaa yleensä lattialle voipuoli
alaspäin.", sanoo Myrphyn
laki. Mutta mistä ihmeestä
Myrphyn laki on peräisin?

Vuonna 1949 Edwardsin len-
totukikohdassa Kaliforniassa
Northrop Aircraft teki eversti
Stappin määräämiä törmä-
yskokeita. Kokeiden toimek-
sianto oli saatu ilmailulääke-
tieteen laboratoriolta, jossa
suunnitteluinsinöörinä toimi
kapteeni Ed Murphy. Erää-
seen laitteeseen tuli toimin-
tahäiriö, joka johtui teknikon
johdotusvirheestä. Teknikon
virheeseen turhautuneena
kapteeni Myrphy tokaisi: "Jos
sen voi tehdä väärin, niin hän
tekee." Northropin projekti-
päällikkö Nichols alkoi kutsua
kapteenin esittämää kom-
menttia Myrphyn laiksi.
Muutamia viikkoa myöhem-
min eversti Stapp kertoi
lehdistötilaisuudessa, että

vuosia jatkuneissa törmäys-
kokeissa oli selvitty vähillä
onnettomuuksilla, koska
projektissa uskottiin Myrphyn
lakiin ja jatkuvasti oli pyritty
estämään käymästä sitä to-
teen. Myrphyn laki (= "Kaikki
mikä voi mennä pieleen myös
menee pieleen.") levisi nope-
asti yleiseen tietoisuuteen.

Jokainen on joutunut teke-
misiin Myrphyn lain kanssa.
Oletko kenties kokenut jota-
kin seuraavista?

- Kun avaat radion, lempikap-
paleesi on juuri loppumassa.
- Mitä kauemmin olet tehnyt
jotakin matematiikan tehtä-
vää, sitä varmemmin se on
väärin.
- Jos satut soittamaan vää-
rään numeroon, se ei ole
koskaan varattu.

• Se joka kuorsaa, nukahtaa
ensin.

• Mitä helpompi jokin asia on
tehdä, sitä vaikeampi sitä on
muuttaa.

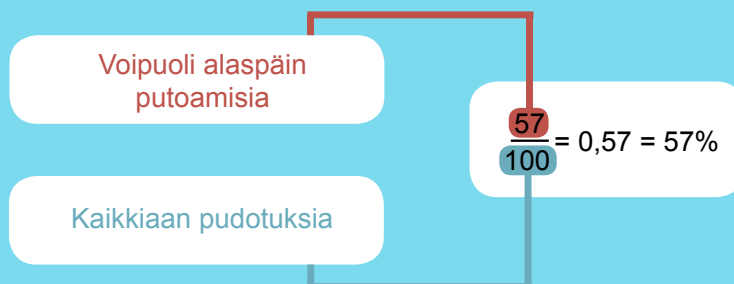
• Löydät aina sen mitä et etsi.

• Laitteet on helppo purkaa,
mutta vaikea koota.

• Jos on asioita, jotka olisivat
voineet mennä pieleen, mutta
jotka eivät menneet pieleen,
olisi loppujen lopuksi ollut
hyvä, jos ne olisivatkin men-
neet pieleen.

Todennäköisyyden määrittäminen

Myrphyn laista kiinnostunut tutkija halusi selvittää, putoaako voileipä lattialle todennäköisemmin voipuoli alaspäin. Hän pudotti voileivän lattialle 100 kertaa, joista 57 kertaa leipä putosi voipuoli alaspäin. Näin hän sai lasketuksi tapahtuman todennäköisyyden:



Todennäköisyyksiä voidaan siis selvittää koejärjestelyjen avulla. Sitä todenmukaisempi tulos saadaan, mitä useammin koe suoritetaan. Esimerkiksi leipä saattaa pudota aluksi viisi kertaa peräkkäin voipuoli alaspäin. Jos koe suoritetaan ainoastaan viisi kertaa, saadaan tulokseksi, että voipuoli koskettaa aina lattiaa. Todennäköisyyksissä on kyse sattumista ja tämän vuoksi koe täytyy toistaa useita kertoja, jotta tulos olisi luotettava. On mahdollista, että seuraavilla viidellä pudotuskerralla ei tarvitse pyyhkiä voita lattiasta.

Todennäköisyyksiä voidaan tarkastella neljällä eri tavalla. Tavat eivät ole toisiaan poissulkevia ja joihinkin tarkasteluihin sopiikin niistä useampi kuin yksi. Mitä tavoista on käytetty voileipäongelmassa?

- (1.) *Käytetään hyväksi symmetriaa.* Todennäköisyys, että saadaan nopalla heitettäessä kuusi on $\frac{1}{6}$, sillä nopassa on kuusi tahkoa, joista päällimmäiseksi voi jäädä mikä tahansa.
- (2.) *Suoritetaan kokeita tai tarkasteluja tietojen keräämiseksi.* Jos halutaan selvittää, millä todennäköisyydellä ohi ajava auto on punainen, pysähdytään kadunkulmaan ja lasketaan kaikkien ohi ajavien autojen lukumäärä sekä näistä punaisten osuus.

(3.) *Katsotaan tapahtumia menneisyydestä.* Saapuuko juna asemalle todennäköisesti myöhässä? Katsotaan aikaisempia saapumisia, esimerkiksi kahden viime viikon ajalta ja lasketaan kuinka monesta niistä juna tuli myöhässä.

(4.) *Tehdään omakohtainen arvio.* Tätä menetelmää käytetään silloin, kun koe ei ole toistettavissa eli mitään muuta aikaisemmin esitettyä tavoista ei voi käyttää. Millä todennäköisyydellä Suomi voittaa kultaa seuraavissa jääkiekon MM-kisoissa? Tarkastellaan viime vuosien otteluita sekä tämän kauden voittoja, joiden perusteella yritetään luoda realistisen arvio voittomahdollisuudelle.

Tehtäviä

150.

Mitkä väittämistä ovat oikeita? Todennäköisyys voidaan ilmoittaa

- a) murtolukuna
- b) desimaalilukuna
- c) prosenttilukuna.

151.

Minkä tavoista 1 – 4 otat avuksesi seuraavien todennäköisyyksien arvioinnissa?

Todennäköisyys, että

- a) korttipakasta nostamasi kortti on ässä
- b) luokasta satunnaisesti valittu oppilas on vasenkätinen
- c) vastaan tulevalla ihmisellä on silmälasit
- d) hiihtolomalla on riittävästi lunta hiihtämiseen
- e) saat tikanheitossa viidellä tikalla vähintään 30.



152.

Minkä tavoista 1 – 4 otat avuksesi seuraavien todennäköisyyksien arvioinnissa?

Todennäköisyys, että

- a) voitat lotossa
- b) suomalainen juoksee 100 metrillä ensi kesänä uuden maailmanennätyksen
- c) kaverisi ei myöhästy yli viittä minuuttia sovitusta ajasta
- d) keskusta saa eniten paikkoja uuteen hallitukseen.

153.

Keksi kaksi esimerkkiä, joihin voit laskea todennäköisyyden tavan

- a) 1 avulla
- b) 2 avulla
- c) 3 avulla
- d) 4 avulla.

154.

Ruletti on onnenpeli, johon kuuluva pyörítettävä rulettilevy on jaettu mustiin ja punaisiin 0 –36 numeroituihin ruutuihin. Pelinjohtaja heittää levyn pyörimissuuntaa vastakkaiseen suuntaan pienen kuulan ja kohta johon kuula pysähtyy, osoittaa voittavan värin ja numeron. Pelissä voitot vaihtelevat kaksinkertaisesta 36-kertaiseen. Pelistä tuli sallittu Suomessa vuonna 1964.

Lassi, Leevi, Tea ja Vilma tutkivat todennäköisyyttä saada nolla toistamalla heittoja useita kertoja peräkkäin. Seuraavassa taulukossa on heidän tuloksensa. Yksi pelaaja meni sekaisin laskujensa kanssa. Kuka hän todennäköisimmin oli?

pelaaja	heittojen määrä	tulokseksi nolla	todennäköisyys
Lassi	100	5	0,05
Leevi	200	7	0,035
Tea	500	24	0,048
Vilma	1000	27	0,027

155.

Heitä kolikkoa 500 kertaa. Montako klaavaa arvioit saavasi? Vertaa arviotasi ja kokeilemalla saamaasi tulosta.

Huom! Eurokolikoissa on sekä euromaiden yhteinen puoli että kansallinen puoli. Kansallinen puoli on nk. kruunapuoli, jossa on käytetty kunkin maan aikaisemmissa kolikoissa käytettyjä teemoja. Suomessa kruunapuolen aiheina on luonto ja leijona-aihe.

156.

Heitä noppaa tuhat kertaa. Montako kuutosta arvioit saavasi? Vertaa arviotasi ja kokeilemalla saamaasi tulosta.

157.

Selvitä millä todennäköisyydellä nastaa heitettäessä kärki jää ylöspäin.

158.

Selvitä, millä todennäköisyydellä ”kivi, paperi ja sakset” –pelissä henkilö voittaa, jos hän joka kerta valitsee kiven, kun taas toinen pelaaja valitsee satunnaisesti jonkin kolmesta vaihtoehdosta.

Klassinen todennäköisyys

Todennäköisyyslaskenta sai alkunsa 1600-luvun Ranskassa. Ensimmäiset ongelmat koskivat aateliston harrastamien uhkapelien voitto- ja tappiomahdollisuuksien analysointia. Nykyisin todennäköisyyslaskentaa käytetään muun muassa liikennesuunnittelussa, vakuutusallalla, laaduntarkkailussa, sääennusteiden laadinnassa, geenitutkimuksissa ja taloustieteessä.

Todennäköisyys liittyy ilmiöihin, joiden tulos riippuu sattumasta. **Satunnaisilmiön** lopputulosta ei voi etukäteen päätellä, mutta tulosten esiintymismahdollisuuksia voidaan tutkia matemaattisesti. Satunnaisilmiön eri tulosmahdollisuuksia kutsutaan **alkeistapauksiksi**. Esimerkiksi nopanheiton alkeistapaukset ovat silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Kolikonheiton alkeistapaukset ovat puolestaan kruuna ja klaava. Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä mahdollisia, kutsutaan niitä **symmetrisiksi**.

Satunnaisilmiöiden tuloksista voidaan muodostaa tapahtumia, jotka muodostuvat kyseiselle tapahtumalle **suotuisista** alkeistapauksista. Nopanheiton tapahtumalle ”pisteluku on parillinen” suotuisat alkeistapaukset ovat 2, 4 ja 6.

Tapahtuman A **klassinen todennäköisyys**:

$$P(A) = \frac{\text{Suotuisien tapausten lukumäärä}}{\text{Kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}$$

Todennäköisyys voidaan ilmoittaa murto-, desimaali- tai prosenttilukuna. Mitä lähempänä $P(A)$ on arvoa 1, sitä todennäköisempi on tapahtuma A.

Tapahtumaa, jolla ei ole yhtään suotuisaa alkeistapausta, kutsutaan **mahdottomaksi** ja sen todennäköisyys on 0 eli 0 %. Jos kaikki alkeistapaukset ovat puolestaan suotuisia, on tapahtuma varma ja sen todennäköisyys on 1 eli 100 %.

Jokaiselle tapahtumalle A on voimassa:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Esimerkki 1.

Tarkastellaan nopanheittoa ja tapahtumaa $A = \text{"pisteluvuksi saadaan 5"}$. Alkeistapausten joukon muodostavat nyt kaikki mahdolliset pisteluvut $\{1, 2, 3, 4, 5 \text{ ja } 6\}$. Tapahtumalla A suotuisia tapauksia on vain yksi eli pisteluku $\{5\}$. Tapahtuman A todennäköisyys on siis

$$P(A) = P(\text{pisteluvuksi saadaan } 5) = \frac{1}{6} \approx 0,17 = 17\%$$

Esimerkki 2.

Korttipakassa on 52 korttia. Nostetaan pakasta yksi kortti. Lasketaan todennäköisyys sille, että kortti on

a) ruutuässä

$$P(\text{ruutuässä}) = \frac{1}{52}$$

b) hertta

$$P(\text{hertta}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

c) kuningas

$$P(\text{kuningas}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Tehtäviä

159.

Miksi tapahtuman A todennäköisyyttä merkitään $P(A)$? Mistä P kirjan tulee?

160.

Onko seuraavissa tapauksissa kyse satunnaisilmiöstä?

- a) Heitetään noppaa ja tarkastellaan, montako kertaa noppaa on heitettävä, että pisteluvuksi saadaan 3.
- b) Kuumennetaan teräslankaa ja tarkastellaan, piteneekö lanka lämmön vaikutuksesta.
- c) Ostetaan pussillinen viinirypäleitä ja tarkastellaan sen hintaa.
- d) Valitaan umpimähkään luku ja tarkastellaan, onko se jaollinen kahdella.

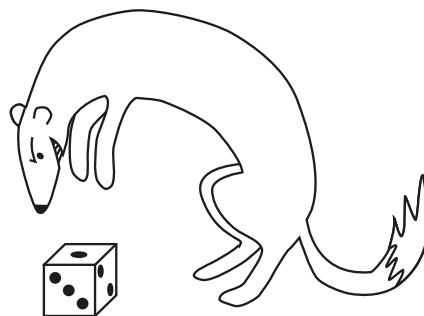
161.

Minkälaisia alkeistapauksia kutsutaan symmetrisiksi?

162.

Luettele kaikki erilaiset tulosmahdollisuudet, kun

- a) noppaa heitetään kerran
- b) kolikkoa heitetään kaksi kertaa.



163.

Luettele kaikki suotuisat alkeistapahtumat nopanheiton tapahtumille. Saadaan

- a) vähintään 2
- b) vähemmän kuin 4
- c) enintään 3
- d) vähintään 2, mutta enintään 5

164.

Heitetään kolikkoa. Millä todennäköisyydellä saadaan kruuna?

165.

Avainnippussa on 9 avainta, joista kaksi sopii kotioven lukkoon. Millä todennäköisyydellä nipusta otettu avain on kotioven avain?

166.

Arpajaisissa on 2000 arpaa, joista 250 on voittoarpoja. Millä todennäköisyydellä voitat, jos ostat yhden arvan?

167.

Korttipakasta otetaan umpimähkään yksi kortti. Mikä on todennäköisyys, että se on ässä tai kuningas?

168.

Millä todennäköisyydellä luokaltasi satunnaisesti valittu oppilas

- a) on nimeltään Anu
- b) on poika
- c) omistaa koiran?

169.

Noin joka kymmenes ihmisistä on vasenkätinen. Montako vasenkätistä voi olettaa olevan 500 henkilön joukossa?

Soveltavat tehtävät

170.

Kummalla lottoriveistä on suurempi todennäköisyys voittaa lottoarvonnassa?

- a) 2, 9, 13, 18, 27, 29, 38
- b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

171.

Arpajaisissa on 20 voittoarpaa ja 580 tyhjää arpaa. Millä todennäköisyydellä ensimmäisenä ostettu arpa sisältää voiton?

172.

Heitetään noppaa. Millä todennäköisyydellä saadaan pisteluvuksi

- a) 6
- b) parillinen luku
- c) enintään 5?

173.

Korttipakasta, jossa on 52 korttia, nostetaan yksi kortti. Millä todennäköisyydellä kortti on

- a) ruutu
- b) ässä
- c) ruutu tai ässä?

174.

Noppaa heitetään kerran. Laske todennäköisyys, että pisteluvuksi saadaan

- a) kolme
- b) muu kuin kolme?

175.

Luvuista 1-15 valitaan umpimähkään yksi luku. Millä todennäköisyydellä valittu luku on

- a) parillinen
- b) jaollinen viidellä
- c) jaollinen kolmella?

176.

Thomas, Matias ja Joona halusivat tietää todennäköisyydet herneenpalkosta löytyvien herneiden määrille. Kukin heistä avasi 30 palkoa seuraavin tuloksin:

Herneiden lukumäärä	4	5	6	7	8
Thomas	0	10	3	11	6
Matias	3	5	9	8	5
Joona	2	6	12	9	1

- a) Kirjoita jokaisen tutkimuksista erikseen saadut todennäköisyydet, että herneenpalkossa on 4, 5, 6, 7 tai 8 hernetä.
- b) Yhdistä tutkimustulokset ja muodosta niistä vastaavat todennäköisyydet.
- c) Kuinka monta hernetä yhdessä palossa todennäköisimmin on?

177.

Rahapussissa on yksi kahden euron kolikko, kaksi euron kolikkoa, neljä 50 sentin kolikkoa, viisi 20 sentin kolikkoa ja kolme 5 sentin kolikkoa. Millä todennäköisyydellä rahapussista umpimähkään valittu kolikko on

- a) 50 senttiä
- b) pienempi kuin 50 senttiä
- c) kaksivärinen?

Vaativat tehtävät

178.

Jos Leeville syötetään ottelussa jalkapallo, hän saa potkaistua palloa todennäköisyydellä 0,3 ja pukattua todennäköisyydellä 0,1. Eräässä ottelussa Leeville tehdään 120 syöttöä. Kuinka monta kertaa

- a) Leevi todennäköisesti käyttää ottelussa päätään pallon pukkaamiseen?
- b) Leeviltä menee pallo ohi?

179.

Millä todennäköisyydellä lausekkeen $P(x) = 2x + 1$ arvosta tulee suurempi kuin 10, kun x määräytyy heittämällä kerran noppaa?

180.

Oletetaan, että Suomen itsenäisyyspäivä (6.12.) on satunnaisesti eri viikonpäivinä. Millä todennäköisyydellä itsenäisyyspäivä, joulupäivä (25.12.) ja tapaninpäivä (26.12.) sattuvat samana vuonna kaikki arkipäiviksi maanantaista perjantaihin? (yo kevät 1977)

Tilastollinen ja geometrinen todennäköisyys

Esimerkki 1.

Miten voidaan laskea syntyvän lapsen sukupuolen todennäköisyys, kun tapahtuma ei ole symmetrinen? Poikia nimittäin syntyy enemmän kuin tyttöjä niin Suomessa kuin muuallakin maailmassa.

Ratkaisu:

Suomen tilastollisen vuosikirjan (1998) mukaan vuosina 1990-1997 Suomessa syntyi 510 851 lasta, joista tyttöjä oli 250 227. Tyttöjen osuus tämän perusteella on

$$\frac{250\,227}{510\,851} \approx 0,4889 \approx 49\%$$

Voidaan olettaa, että tyttöjen osuus säilyy tulevaisuudessakin samana, joten

$P(\text{seuraava Suomessa syntyvä lapsi on tyttö}) = 49\%$

Tilastollinen todennäköisyys liittyy tapahtumiin, joita voidaan selittää joko tilastojen tai kokeellisten havaintojen avulla.

Kun toistojen lukumäärä n on riittävän suuri ja f on tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä, niin tapahtuman A **tilastollinen todennäköisyys** on

$$P(A) = \frac{f}{n}$$

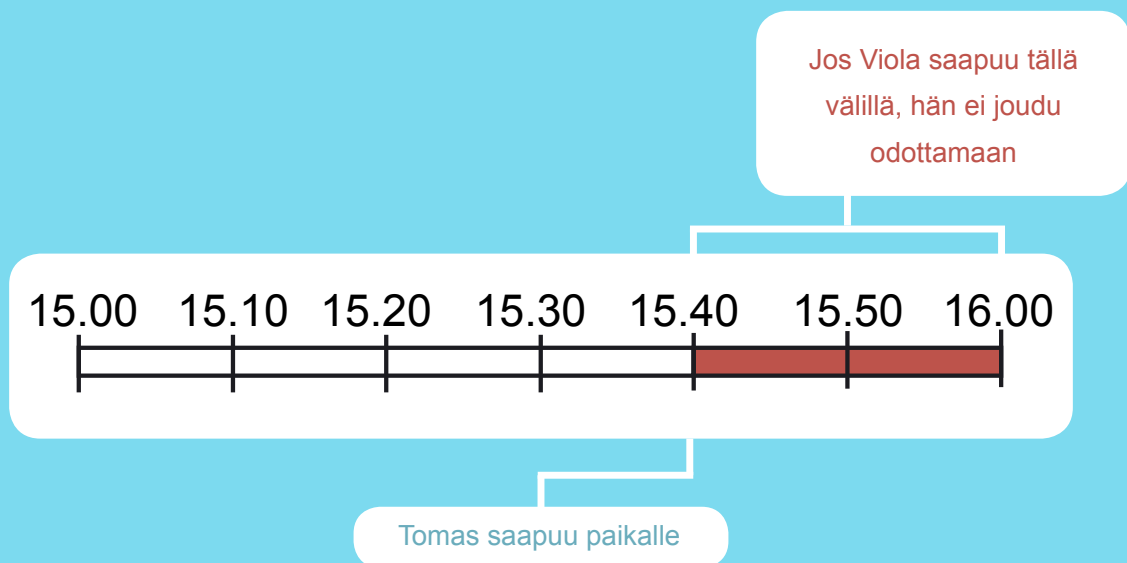
Geometrisen todennäköisyys lasketaan kuten klassinen todennäköisyys, mutta siinä verrataan toisiinsa geometrisia kuvioita, kuten janojen pituuksia, alueiden pinta-aloja ja kappaleiden tilavuuksia.

Esimerkki 2.

Viola on sopinut tapaavansa Tomaksen kahvilassa klo: 15.00 ja klo: 16.00 välillä. Tomas saapuu paikalle klo: 15.40. Millä todennäköisyydellä Viola ei joudu odottamaan?

Ratkaisu:

Tunnissa on ääretön määrä ajanhetkiä, joten niiden kaikkien luetteleminen ei ole mahdollista. Perusjoukkoa ja alkeistapahtumia on tarkasteltava nyt geometrisesti.



$$P(\text{Viola ei joudu odottamaan}) = \frac{20 \text{ min}}{60 \text{ min}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Vastaus: Todennäköisyys on 0,33.

Tehtäviä

181.

Heitetään noppaa. Millä todennäköisyydellä silmäluvuksi saadaan 6? Miten voit tarkistaa tuloksen tilastollisesti?

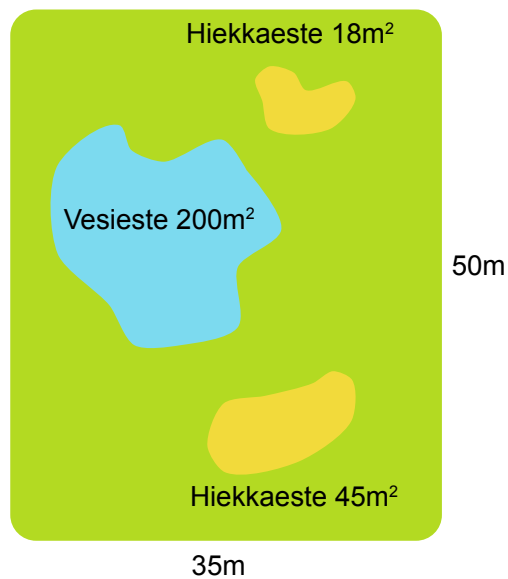
182.

Nastaa heitettiin 1000 kertaa ja näistä 620 kertaa kärki jäi ylöspäin. Laske tämän perusteella todennäköisyys, että nastaa heitettäessä kärki jää ylöspäin.

183.

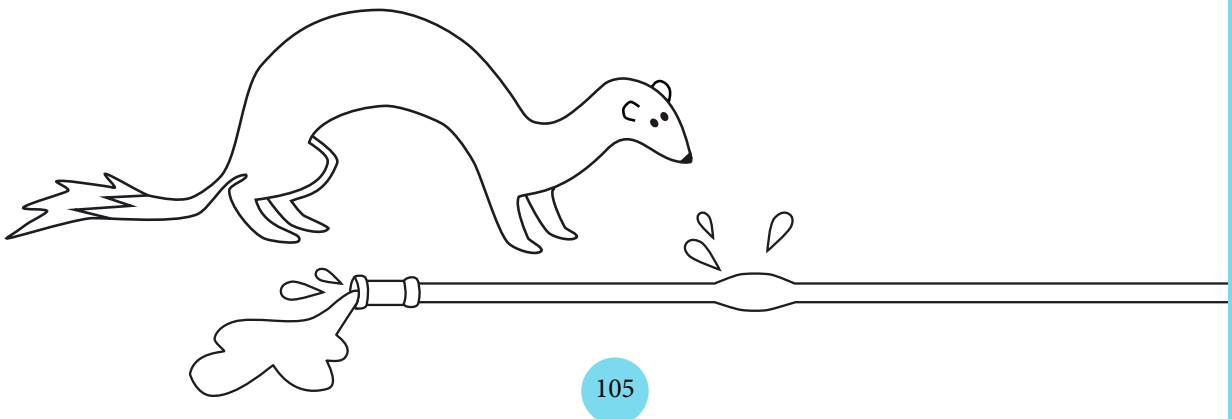
Golfpallo lyödään umpimähkään kuvan mukaiselle kentälle. Millä todennäköisyydellä pallo laskeutuu

- a) vesiesteeseen
- b) hiekkaesteeseen
- c) muualle kuin vesiesteeseen tai hiekkaesteeseen?



184.

65 metriä pitkä vesiputki on mennyt tukkoon. Mikä on todennäköisyys, että tukos on ensimmäisen 5 metrin matkalla?



Soveltavat tehtävät

185.

Matematiikan kurssista annettiin 23 oppilaan luokassa oheisen taulukon mukaiset arvosanat.

Millä todennäköisyydellä luokasta umpimähkään valittu oppilas sai arvosanaksi

- a) hylätyn
- b) paremman kuin seiskan
- c) vähintään kuutosen?

arvosana	lukumäärä
4	2
5	2
6	3
7	6
8	5
9	4
10	1

186.

Heitetään noppaa 5 000 kertaa. Montako

- a) kolmosta,
- b) parillista pistelukua on odotettavissa?

187.

Eräällä äänestysalueella äänet jakautuivat kolmen puolueen kesken siten, että ensimmäinen puolue sai 890 ääntä, toinen 1230 ääntä ja kolmas 435 ääntä. 560 äänioikeutettua jätti äänestämättä. Mikä on tämän perusteella todennäköisyys jättää äänestämättä seuraavissa vaaleissa?

188.

Noppaa heitettiin 1000 kertaa ja saatiin seuraavat tulokset: Ykkösiä 175 kpl, kakkosia 154 kpl, kolmosia 151 kpl, nelosia 176 kpl, viitosia 166 kpl ja kuutosia 178 kpl.

- a) Laske pistelukujen suhteelliset osuudet.
- b) Jos noppaa heitettäisiin 1 000 000 kertaa, niin mitä lukuja pistelukujen suhteelliset osuudet lähestyvät?

189.

Rannekellon paristosta loppuu virta satunnaisena ajankohtana. Millä todennäköisyydellä virta loppuu päivällä klo: 12.00 –15.00?

190.

Sinun on arvattava sinulle tuntemattoman suomalaisen henkilön sukunimi. Oikeasta arvauksesta sinulle maksetaan 50 €. Mikä nimi kannattaa sanoa?

191.

Tutkittaessa 800

leivänpaahdinten kestoikää

saatiin seuraava tulos.

Millä todennäköisyydellä

leivänpaahdin kestää

a) alle 5 vuotta

b) yli 8 vuotta

c) ainakin kaksi vuotta?

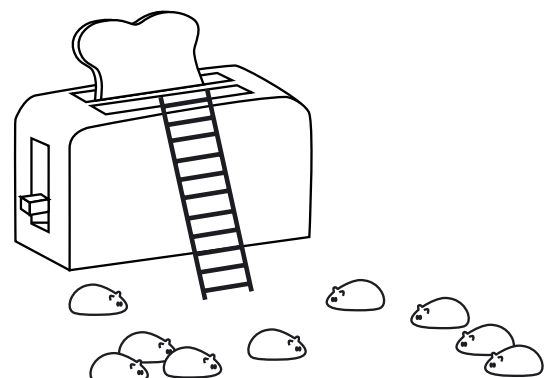
kestoikä [vuosi]	lukumäärä
alle 2	42
2-4	68
5-7	277
8-10	331
yli 11	82

192.

Maapallon pinta-alasta maata on $1,48 \cdot 10^8 \text{ km}^2$ ja vettä $3,62 \cdot 10^8 \text{ km}^2$. Millä todennäköisyydellä meteoriitti putoaa maahan?

193.

Metro lähtee asemalta kymmenen minuutin välein. Millä todennäköisyydellä asemalle satunnaisesti saapunut henkilö joutuu odottamaan metron lähtöä enintään 5 minuuttia?



Vaativat tehtävät

194.

Kioski ottaa kesäksi myyntiin irtojäätelöä. Valikoimaksi halutaan vaniljaa, mansikkaa, suklaata, lakritsia, kinuskipähkinää ja mangomelonia. Viimevuonna vaniljaa osti joka viides, suklaata joka kolmas, mansikkaa joka neljäs ja lakritsaa joka kuudes. Kinuskia ja mangomelonia ei edellisenä kesänä ollut myynnissä, mutta naapurikaupungissa halusi ostaja jompaa kumpaa todennäköisyydellä 0,1. Kauppias tilaa aluksi 100 litraa jäätelöä.

Miten paljon kannattaa ottaa mitäkin? Jäätelöt myydään viiden litran paketeissa.

195.

Onnenpyörässä on neljä voittosektoria, joiden kunkin keskuskulma on 15° . Millä todennäköisyydellä henkilö voittaa yhdellä pyöräytyksellä?

196.

Bussi pysähtyy pysäkillä 20 yli ja 20 vaille tasatunnin. Pysähdys kestää 5 minuuttia. Marko, joka ei tiedä bussiaikatauluja, saapuu pysäkillä. Millä todennäköisyydellä

- a) hänen ei tarvitse odottaa lainkaan bussia
- b) hän joutuu odottamaan enemmän kuin 20 minuuttia
- c) hän joutuu odottamaan vähemmän kuin 10 minuuttia?

197.

Kivi heitetään umpimähkään ympyrään. Millä todennäköisyydellä se osuu lähemmäksi ympyrän keskipistettä kuin kehää? (yo kevät 1998)

Malleja alkeistapausten muodostamiseksi

Todennäköisyyksiä laskettaessa on selvitettävä suotuisten ja kaikkien alkeistapausten lukumäärä. Jos alkeistapauksia on paljon, on niiden luetteleminen työlästä. Alkeistapausten lukumäärän selvittämiseksi onkin kehitetty erilaisia menetelmiä.

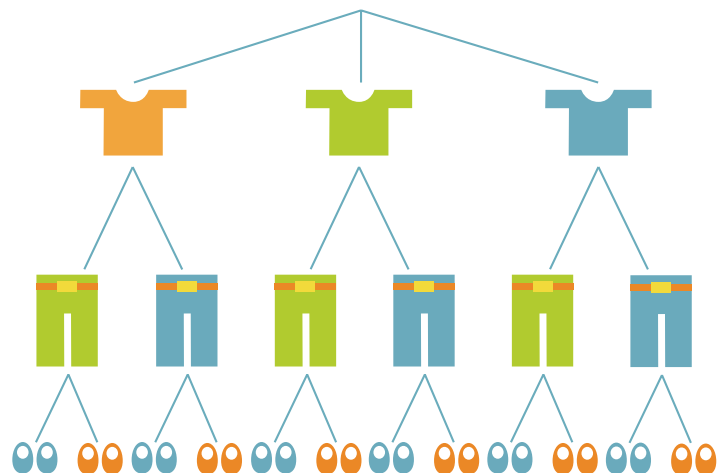
Esimerkki 1.

Miisalla on lomamatkalla mukana kolme paitaa, kahdet housut ja kaksi paria kenkiä. Lasketaan, montako asukokonaisuutta hän voi niistä muodostaa.

Tilannetta voidaan havainnollistaa *puudiagrammin* avulla.

Yksi reitti latvasta juureen kuvaa yhtä alkeistapausta. Puudiagrammista nähdään, että erilaisia asukokonaisuuksia on yhteensä 12 kpl.

Sama tulos saadaan myös kertolaskulla:
 $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$



Kysytty asukokonaisuuksien lukumäärä saatiin siis kertomalla keskenään eri vaiheissa olevien vaihtoehtojen lukumäärät. Periaatetta sanotaan *tuloperiaatteeksi*.

Housujen lukumäärä

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

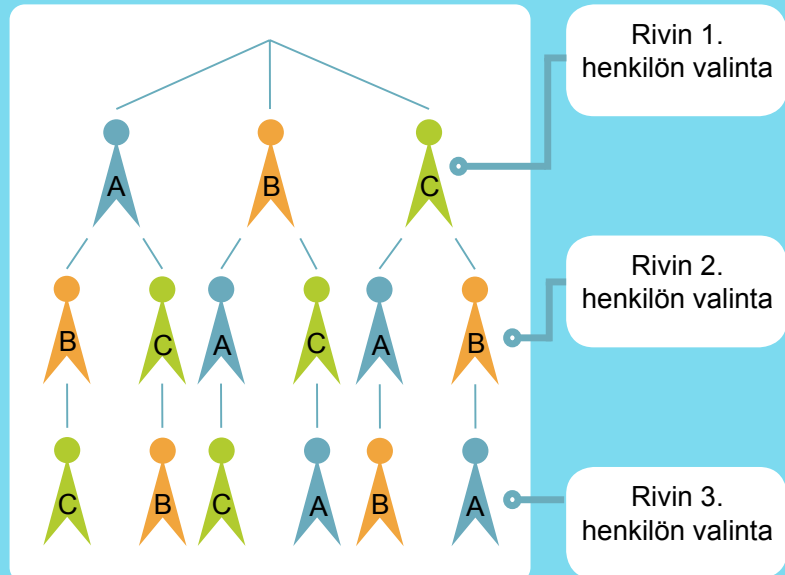
Paitojen lukumäärä

Kenkäparien lukumäärä

Esimerkki 2.

Lasketaan, monellako eri tavalla kolme henkilöä A, B ja C voivat asettua riviin.

Rivin ensimmäinen henkilö voidaan valita kolmella eri tavalla, toinen henkilö kahdella eri tavalla ja kolmas henkilö yhdellä tavalla. Joten henkilöt voivat asettua riviin $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eri tavalla.



Esimerkki 3.

Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä

- a) kummassakin nopassa on pistelukuna vähintään 4
- b) pistelukujen summa on enintään 5?

Ratkaisu:

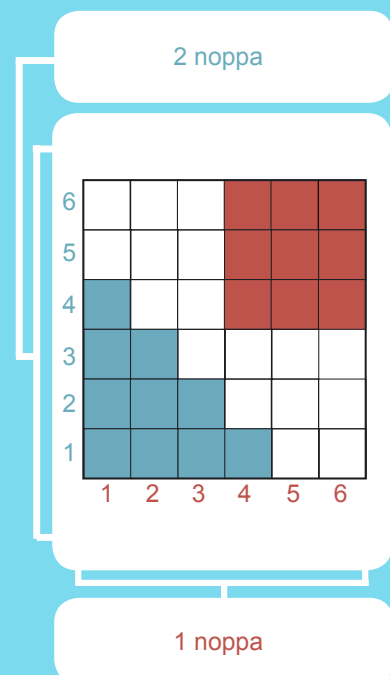
Käytetään ruudukkoa tilanteen havainnollistamiseen. Ruudut kuvaavat alkeistapauksia ja niitä on kaikkiaan 36 kpl.

- a) Suotuisia pareja on 9 kpl (ruudukossa punaisella), joten

$$P(\text{kummassakin nopassa vähintään } 4) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

- b) Suotuisia pareja on nyt 10 kpl (ruudukossa sinisellä), joten

$$P(\text{pistelukujen summa enintään } 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0,28.$$



Tehtäviä

198.

Kadun varrella on kymmenen autopaikkaa. Monellako tavalla kymmenen autoa voidaan pysäköidä kyseisille paikoille?

199.

Liisa ottaa matkalle mukaan hameen, housut ja kolme paitaa. Kuinka monta erilaista asukonaisuutta niistä voi muodostaa?

200.

Montako erilaista ruokakokonaisuutta voidaan ruokalistan perusteella muodostaa? Kaikki ottavat ainakin pääruuan ja perunat.

RUOKALISTA

Pääruokia:

lihapullat
paistettu lohi
pihvi

Perunat:

muusi
lohkoperunat
uuniperuna

Lisukkeet:

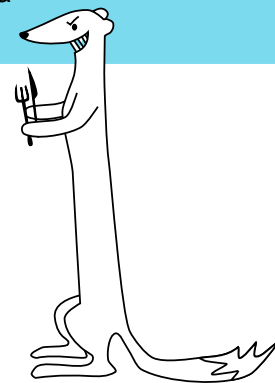
kasvikset
salaatti

201.



Millä todennäköisyydellä kahta noppaa heitettäessä

- a) ainakin toinen on kuutonen
- b) molemmilla saadaan sama pisteluku?



Soveltavat tehtävät

202.

Noppaa heitetään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä

- a) pistelukujen summa on 7
- b) pistelukujen summa on ainakin 4
- c) saadaan kaksi viitosta?

203.

7 henkilöä nousee pysäkiltä bussiin.

a) Monessako eri järjestyksessä he voivat mennä bussiin?

b) Millä todennäköisyydellä henkilöt nousevat bussiin pituusjärjestyksessä (lyhin ensin)?

204.

Kolme henkilöä menee satunnaisesti jonoon. Millä todennäköisyydellä he osuvat pituusjärjestykseen?

205.

Tietotekniikassa yksi tavu muodostuu kahdeksasta bitistä, jotka saavat arvoja 0 ja 1. Montako erilaista tavua on olemassa?

206.

Internetin IP-osoitteet muodostuvat neljästä eri tavusta. Kuinka monta erilaista IP-osoitetta on olemassa, kun osoitteet, jotka sisältävät joko pelkkiä ykkösiä tai pelkkiä nollia on kielletty?

207.

Sanna aterioi meksikolaisessa ravintolassa. Ruokalistalla on 5 erilaista alkupalaa, 11 erilaista pääruokaa ja 3 erilaista jälkiruokaa. Ateriaan kuuluu yksi laji kutakin.

a) Montako erilaista ateriakokonaisuutta Sannalla on valittavanaan?

b) Millä todennäköisyydellä viereisessä pöydässä istuva henkilö valitsee juuri samanlaisen ateriakokonaisuuden kuin Sanna?

208.

8C-luokkaan tulee kolme uutta oppilasta. Matematiikan opettaja Mäkinen laskee nopeasti, että heidät voidaan sijoittaa vapaina oleviin paikkoihin 120 eri tavalla. Montako tyhjää paikkaa

a) luokassa on ennen uusien oppilaiden tuloa

b) luokkaan jää, kun uudet oppilaat sijoitetaan paikoilleen?

209.

Kuinka monella eri tavalla henkilöt voivat asettua pyöreään pöydän ympärille, jos heitä on

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 10?

Vaativat tehtävät

210.

Sählyturnaukseen osallistuu 6 joukkuetta. Jokainen joukkue pelaa kerran jokaista joukkuetta vastaan. Montako ottelua pelataan?

211.

12 lasta ryhtyvät pelaamaan lentopalloa ja joukkueet arvotaan. Millä todennäköisyydellä Lasse ja Maisa ovat samassa joukkueessa?

212.

Tanssiaisiin saapui yhtä monta miestä ja naista. Jokainen nainen tanssi kerran jokaisen miehen kanssa. Moniko osallistui tanssiaisiin, kun tanssilattialla pyöri kaikkiaan 64 eri tassiparia?

213.

Mikä on kahden nopan heitossa todennäköisin pistesumma? (yo syksy 1999)

214.

- a) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että pistesumma on suurempi kuin kahdeksan?
- b) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kahdesti. Mikä on todennäköisyys, että kummallakin kerralla pistesumma on suurempi kuin kahdeksan? (yo kevät 2004)

215.

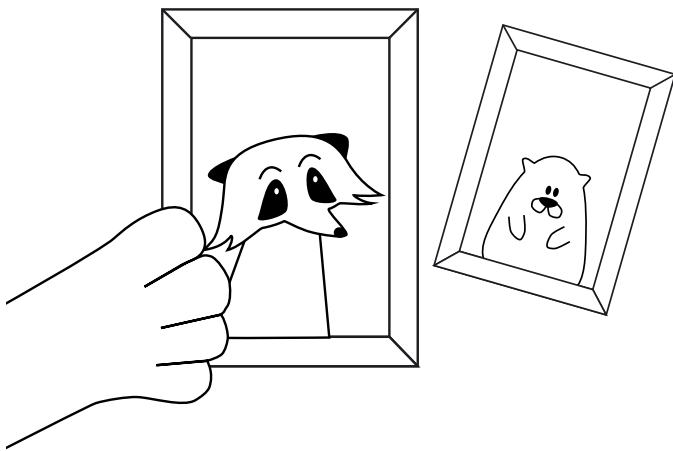
Kutsuilla on 10 avioparia. Jokainen läsnäolija kättelee jokaista muuta paitsi aviopuolisoaan.

Kuinka monta kättelyä suoritetaan? (yo kevät 1998)

216.

Kun eräällä luokalla jokainen oppilas antoi valokuvansa jokaiselle luokkatoverilleen, vaihtoi 1122

valokuvaa omistajaa. Kuinka monta oppilasta luokalla oli? (yo kevät 1992)





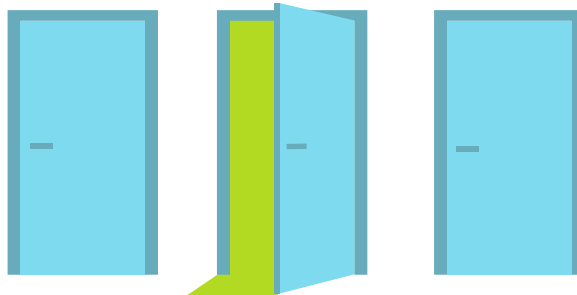
Sattumia vaiko ei?

Annu ja Vernerit suunnittelivat häitään ja olivat huolissaan, jos jonkun häävieraan matkapuhelin sattuu soimaan vihkimisen aikana pilaten tunnelman. He tiesivät, että todennäköisyys, ettei henkilö osaa laittaa matkapuhelintaan äänettömälle on $1/100$. Niinpä Annu ja Vernerit suunnittelivat ottavansa vihkimistilaisuuteen mukaan oman matkapuhelimensa, jossa on uusi liittymä ja jonka numeroa ei ole vielä kukaan tiedä ja jättävänsä puhelimen äänet päälle. He laskivat, että tällöin todennäköisyys, että kahdella henkilöllä olisi puhelimesta äänet päällä, on vain $1/10000$.

Kyseessä on yleinen todennäköisyyttä koskeva erehdys. Jos kahdella toisistaan riippumatto-malla tapauksella on kummallakin todennäköisyys $1/100$, niin niiden yhtäaikaisen toteutumisen todennäköisyys kylläkin on $1/100 \cdot 1/100 = 1/10000$. Tässä tapauksessa todennäköisyyslaskennan kertosaantöä ei kuitenkaan voi käyttää, sillä toinen (hääparin oma) matkapuhelin ei enää ole satunnaistapaus, vaan varma tapaus. Tiede-

tään, että matkapuhelin on varmasti päällä ja tätä puhelinta koskeva todennäköisyys on siten yksi. Annu ja Vernerit eivät siis voi itse muuttaa sitä todennäköisyyttä, että yksi sadasta jättää puhelimeensa äänet päälle. Todennäköisyys, että kahdella häävieraalla on matkapuhelimessa äänet päällä, on tuo yksi kymmenestä-tuhannesta.

Vastaava ongelma tulee esille amerikkalaisessa Let's Make a Deal -televisiovisailussa, jonka ensilähetys oli vuonna 1963. Ongelma on nimetty Monty Hall -ongelmaksi ohjelman juontajan nimen mukaan. Visailussa kilpailijan on valittava yksi kolmesta ovesta, joista yhden takana on auto ja kahden takana vuohi. Kun kilpailija on valinnut yhden oven, juontaja paljastaa vuohen toisesta jäljellä olevasta ovesta. Tämän jälkeen kilpailijalla on mahdollisuus vaihtaa valitsemansa ovi jäljellä olevaan oveen.



Kannattaako kilpailijan vaihtaa ovea?

Kun kilpailija valitsee yhden oven, on hänellä $1/3$ todennäköisyys voittaa auto. Todennäköisyys, että auto jää juontajalle, on siten $2/3$. Kun juontaja avaa toisen ovistaan, poistaa hän tämän oven kokonaan todennäköisyyslaskennan piiristä. Kilpailija tietää, ettei auto ole kyseisen oven takana ja todennäköisyyden satunnaisuusvaatimus kumoutuu. Todennäköisyydet jaettiin sillä hetkellä, kun ensimmäinen ovi valittiin. Loppu on juontajan silmänkääntötempua. Edelleen todennäköisyys, että auto on juontajalla, on $2/3$ ja koska hänellä on enää yksi avaamaton ovi, on tämä koko todennäköisyys "siirtynyt" juontajan avaamattoman oven taakse. Eli kannattaa vaihtaa, koska kilpailijan oman oven takana voitto on todennäköisyydellä $1/3$.

Riippumattomien tapahtumien kertosääntö ★

Kertolasku ja yhteenlasku ovat todennäköisyyslaskennan peruslaskutoimituksia. Kertolaskun avulla lasketaan todennäköisyys usean tapahtuman samanaikaiselle esiintymiselle. Yhteenlaskun avulla puolestaan tarkastellaan saman satunnaisilmiön erilaisia tapahtumismahdollisuuksia.

Riippumattomien tapahtumien kertosääntö

Jos tapahtumat A ja B eivät mitenkään vaikuta toisiinsa eli ne ovat toisistaan *riippumattomia*, on todennäköisyys, että "A ja B tapahtuvat"

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esimerkiksi nopanheitossa saadut silmäluvut ovat riippumattomia toisistaan. Noppa ei "muista" minkä tuloksen antoi viimeksi ja jätä antamatta samaa pistelukua.

Esimerkki 1.

Heitetään noppaa neljä kertaa. Lasketaan, millä todennäköisyydellä saadaan joka kerralla sama pisteluku.

Ensimmäinen silmäluku saa olla mikä tahansa

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0,0046$$

Kolmen muun silmäluvun on oltava samoja kuin ensimmäisen

Esimerkki 2.

Ihmiset voidaan jakaa ryhmiin veren perusteella sen mukaan, mihin veriryhmään (A, B, AB ja O) tai mihin Rhesus-luokkaan (Rh + tai Rh -) he kuuluvat. Jokainen ihminen kuuluu yhteen veriryhmään ja yhteen Rhesus-luokkaan. Suomalaiset ovat jakautuneet eri veriryhmiin ja Rh-luokkiin seuraavasti:

veriryhmä	osuus väestöstä [%]
A	45
B	17
AB	8
O	30

Rh-luokka	osuus väestöstä [%]
Rh +	84
Rh -	16

Veriryhmä ja Rhesus-luokka ovat *toisistaan riippumattomia* eli veriryhmän perusteella ei voi päätellä kumpaan Rhesus-luokkaan henkilö kuuluu.

Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valitun suomalaisen

a) veriryhmä on O?

b) veriryhmä on AB ja Rhesus-luokka on negatiivinen eli henkilön kuuluu ryhmiin AB ja Rh- ?

Ratkaisu:

a) $P(\text{veriryhmä on O}) = 0,3 = 30\%$

b) $P(\text{AB ja Rh-}) = P(\text{AB}) \cdot P(\text{Rh-}) = 0,08 \cdot 0,16 \approx 0,013 \approx 1,3 \%$

Tehtäviä

217.

Noppaa heitetään viisi kertaa, millä todennäköisyydellä joka kerta saadaan pisteluvuksi 6?

218.

Kolikko heitetään 10 kertaa. Millä todennäköisyydellä joka kerta saadaan tulokseksi klaava?

219.

Korttipakasta nostetaan yksi kortti ja se laitetaan takaisin korttipakkaan. Millä todennäköisyydellä saadaan täsmälleen sama kortti uudestaan?

220.

Laatikossa on neljä oranssia ja 3 violettiä palloa. Laatikosta nostetaan kaksi palloa niin, että ennen toisen pallon nostamista ensimmäinen pallo palautetaan laatikkoon. Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat

a) oransseja

b) violetteja?

221.

Kolikko heitetään 8 kertaa. Millä todennäköisyydellä joka kerta saadaan tulokseksi klaava?

Soveltavat tehtävät

222.

Persiljan siemenen itämistodennäköisyys on 98 %. Millä todennäköisyydellä 50 kylvetystä siemenestä kaikki itävät?

223.

Heitetään kerran noppaa ja kolikkoa. Millä todennäköisyydellä saadaan nelonen ja klaava?

224.

Suomen asukasluku on noin 5 200 000.

a) Monenko suomalaisen veriryhmä on AB?

b) Millä todennäköisyydellä suomalaisen veriryhmä on A ja Rhesus-luokka Rh +?

225.

Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä saadaan kaksi kuutosta?

226.

Heitetään noppaa viisi kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan joka kerralla sama pisteluku?

227.

Luokan oppilaista puolet oli tyttöjä ja neljäsosa vihreäsilmaisii. Kuinka suuri osuus luokan oppilaista oli vihreäsilmaisii poikia, kun tiedetään, että sukupuoli ja silmienväri ovat riippumattomia ominaisuuksia?

228.

Kolikkoa on heitetty 10 kertaa ja tulokseksi on joka kerralla saatu klaava. Millä todennäköisyydellä seuraavakin heitto on klaava?

229.

Noppaa on heitetty jo neljä kertaa ja joka kerralla on pisteluvuksi saatu kolmonen. Millä todennäköisyydellä viidennelläkin heitolla saadaan pisteluvuksi kolmonen?

230.

Osallistut kilpailuun, jossa voit voittaa 100 €. Seteli on piilotettu yhden laatikon sisälle viidestä. Jos valitset oikean laatikon, ovat rahat sinun. Kun olet laatikon valinnut, juontaja osoittaa yhden jäljellä olevista laatikoista tyhjäksi. Sinulla on mahdollisuus vielä vaihtaa valintaasi. Kannattako ja miksi?

Vaativat tehtävät

231.

Suomessa syntyvistä lapsista 51,3 % on poikia. Kuinka suurella todennäköisyydellä seitsenlapsisen Jukolan perheen kaikki lapset ovat poikia? (yo kevät 1993)

232.

Tietokonepelissä heitetään virheellistä noppaa, jossa nopan silmälukujen todennäköisyydet ovat suoraan verrannollisia silmälukuihin. Mitkä ovat eri silmälukujen todennäköisyydet? Mikä on todennäköisyys saada kahdella heitolla kaksi kuutosta? (yo syksy 2001)

Yleinen kertosääntö ★

Oikean lottorivin todennäköisyys saadaan lasketuksi kertolaskun avulla. Lottonumerot ovat kuitenkin toisistaan **riippuvia tapahtumia**. Laskussa on huomioitava, että samoja numeroita ei voida valita uudestaan ja siten seuraavaa numeroa valittaessa ei mahdollisia numeroita olekaan enää yhtä paljon kuin edellisessä vaiheessa.

Yleinen kertosääntö:

Jos tapahtumat A ja B ovat riippuvia, on kertosääntö muotoa

$$P(\text{ensin A ja B sitten}) = P(A) \cdot P(B, \text{kun A on tapahtunut})$$

Tapahtuman B todennäköisyyttä laskettaessa otetaan siis huomioon, että tapahtuma A on jo sattunut.

Esimerkki 1.

Kulhossa on 4 punaista ja 2 sinistä kuulaa. Kulhosta nostetaan peräkkäin kaksi kuulaa. Tutkitaan, mitkä ovat eri mahdollisuudet ja millä todennäköisyyksillä ne tapahtuvat.

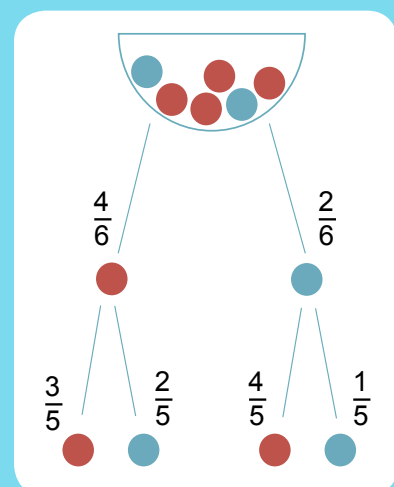
$$P(\text{punainen, punainen}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{punainen, sininen}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(\text{sininen, punainen}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(\text{sininen, sininen}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Kulhossa on jäljellä enää 5 palloa. Koska ensimmäisellä nostolla saatiin punainen pallo, on punaisia palloja jäljellä 3.



Puudiagrammi sisältää kaikki eri mahdollisuudet.

Lasketaan vielä tarkistukseksi kaikkien mahdollisuuksien todennäköisyyksien summa

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

Esimerkki 2.

Lasketaan, millä todennäköisyydellä lotossa saadaan yhdellä rivillä 7 oikein.

$$\frac{7}{39} \cdot \frac{6}{38} \cdot \frac{5}{37} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{15380937} \approx 0,000000065 = 6,5 \cdot 10^{-8}$$

Oletetaan, että yhden rivin täyttämiseen menee 10 sekuntia ja että muistamme aiemmin täyttämämme rivit. Tällöin kaikkien mahdollisten lottorivien tekemiseen kuluu aikaa 153 809 370 sekuntia eli noin 5 vuotta.

Tehtäviä

233.

Jääkiekkopeli menee rangaistuslaukaisukilpailuksi. Ovatko maalinsaantirytykset riippumattomia vai riippuvia tapahtumia?

234.

Korttipakasta nostetaan kaksi korttia. Millä todennäköisyydellä molemmat ovat ässiä?

235.

Karkkipussissa on 12 mustaa ja 8 punaista karkkia. Pussista otetaan kaksi karkkia. Millä todennäköisyydellä ne molemmat ovat

- a) mustia
- b) punaisia?

236.

Laatikossa on 3 keltaista ja 4 punaista kuutiota. Ovatko tapahtumat riippumattomia vai riippuvia? Laatikosta nostetaan kaksi kuutiota, niin että ennen toisen kuution nostamista

- a) ensimmäinen kuutio palautetaan takaisin laatikkoon
- b) ensimmäistä kuutiota ei palauteta laatikkoon.

237.

Korttipakassa nostetaan umpimähkään neljä korttia. Millä todennäköisyydellä kaikki saadut kortit ovat mustia?

238.

Kokouksessa on 3 naista ja 5 miestä. Heidän joukostaan arvotaan puheenjohtaja ja sihteeri. Millä todennäköisyydellä molemmat heistä ovat

- a) naisia
- b) miehiä?

239.

Laatikossa on neljä oranssia ja 3 violettiä palloa. Laatikosta nostetaan yhtä aikaa kaksi palloa.

Millä todennäköisyydellä

a) molemmat pallot ovat oransseja

b) molemmat pallot ovat violetteja.

240.

Korissa on kahdeksan kissanpentua, joista 4 on naaraita ja 4 urosta. Pennuista otetaan umpimähkään neljä. Millä todennäköisyydellä ne kaikki ovat uroksia?

241.

Luokassa on 15 poikaa ja 12 tyttöä. Luokasta valitaan arpomalla kaksi oppilasta. Millä todennäköisyydellä molemmat ovat poikia?

Soveltavat tehtävät

242.

Korttipakasta nostetaan viisi korttia. Millä todennäköisyydellä ne ovat kaikki kuninkaita?

243.

Korissa on yhdeksän koiranpentua, joista 4 on naaraita ja 5 urosta. Pennuista otetaan umpimähkään viisi. Millä todennäköisyydellä ne kaikki ovat uroksia?

244.

Millä todennäköisyydellä lotossa saadaan yhdellä rivillä 7 oikein?

245.

Diskettirasiassa on kymmenen diskettiä ja niistä kolme on viallisia. Henkilö ottaa rasiasta kaksi diskettiä. Laske millä todennäköisyydellä molemmat disketit ovat

a) viallisia

b) toimivia?

246.

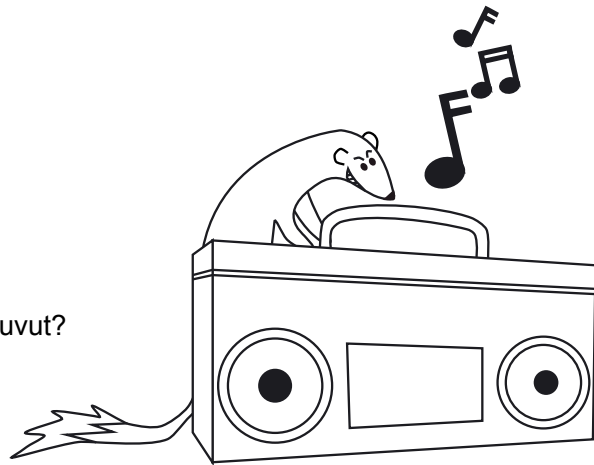
Kirpputorilla on myynnissä 10 ehjää ja 2 rikkiäistä radiota. Niistä ostetaan umpimähkään kaksi. Millä todennäköisyydellä molemmat ovat

- a) rikki
- b) ehjiä?

247.

Heitetään kolmea noppaa.

Millä todennäköisyydellä kaikissa on eri pisteluvut?



248.

Veikkaukuponki täytetään umpimähkään. Millä todennäköisyydellä saadaan

- a) 13 oikein
- b) ei yhtään oikein?

Vaativat tehtävät

249.

Voiko yleistä kertosaäntöä kuvata Venn-diagrammin avulla?

250.

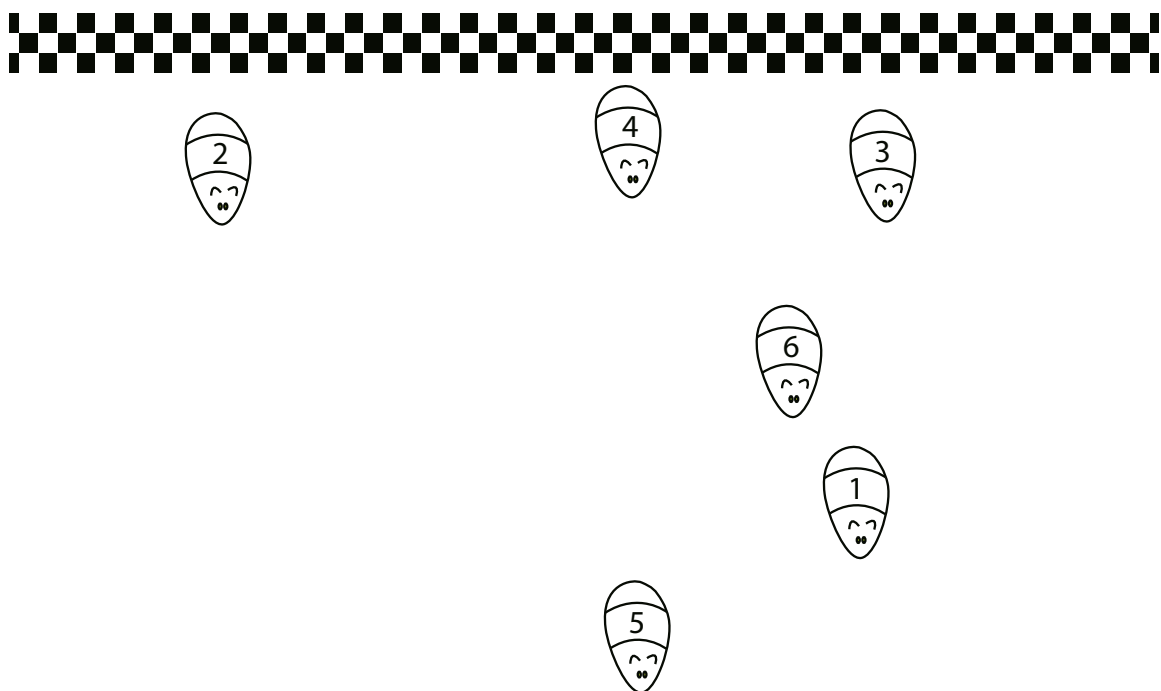
Laatikossa on viisi korttia, joista kolmessa on kirjain M ja kahdessa kirjain A. Kortit poimitaan pöydälle umpimähkäisessä järjestyksessä. Mikä on todennäköisyys sille, että syntyy sana MAMMA? (yo syksy 1986)

251.

Sienikurssilla opetettiin tunnistamaan 78 erilaista sientä, joista kurssilainen oppi kuitenkin vain 49. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän tunnisti oikein hänelle satunnaisesti esitetyt kuusi erilaista kurssilla opetettua sientä? (yo syksy 1996)

252.

Cub-kilpailu järjestetään siten, että osallistujat arvotaan kullakin kierroksella pareiksi. Kukin pari ottelee keskenään, ja voittaja jatkaa seuraavalle kierrokselle, jolla taas arvotaan jäljellä olevat osallistujat pareiksi. Näin jatketaan, kunnes jäljellä on enää kaksi osallistujaa, jotka ottelevat loppuottelun. Kilpailuun on ilmoittautunut 32 osallistujaa. Millä todennäköisyydellä loppuottelussa on kaksi parasta osallistujaa? (yo syksy 1998)



Erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö ★

Toinen todennäköisyysslaskennan peruslaskutoimituksista on yhteenlasku. Yhteenlaskun avulla tarkastellaan saman satunnaisilmiön erilaisia tapahtumismahdollisuuksia. Tällainen on esimerkiksi tilanne, jossa kysytään todennäköisyyttä saada nopanheitossa silmäluvuksi viisi tai kuusi. Samanaikaisesti ei voida saada molempia, mutta näistä kelpaa tulokseksi kumpikin. Yhteenlaskun avulla lasketaan todennäköisyys sille, että kahdesta samanaikaisesti esiintymättömästä tapauksesta jompikumpi esiintyy. Tapahtumia "saadaan viitonen" ja "saadaan kuutonen" kutsutaan **erillisiksi tapahtumiksi**.

Erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö:

Jos A ja B ovat **erillisiä** tapahtumia eli niillä ei ole yhteisiä alkeistapauksia, niin todennäköisyys, että A tai B tapahtuu on

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$$

Esimerkki 1.

Lasketaan todennäköisyys, että yhdellä nopalla heitettäessä saadaan silmäluvuksi viitonen tai kuutonen.

$$\begin{aligned} P(\text{viitonen tai kuutonen}) &= \\ P(\text{viitonen}) + P(\text{kuutonen}) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Esimerkki 2.

Nostetaan korttipakasta yksi kortti. Lasketaan, millä todennäköisyydellä kortti on ruutu tai hertta.

$$P(\text{ruutu tai hertta}) = P(\text{ruutu}) + P(\text{hertta}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Kertolasku- ja yhteenlaskusääntöjen soveltamisessa on syytä olla tarkkana. Laskusääntöjen käytön hahmottaminen helpottuu, kun tilanne kirjoitetaan yksityiskohtaisesti paperille. **Ja-sanan kohdalla on kyseessä kertolasku.** **Tai-sanan kohdalla on kyseessä yhteenlasku.**

Esimerkki 3.

Kulhosta, jossa on 13 punaista palloa ja 15 sinistä palloa, nostetaan peräkkäin kaksi palloa. Millä todennäköisyydellä pallot ovat eriväriset?

Ratkaisu:

Tilanne toteutuu kun ensimmäinen pallo on punainen **ja** toinen sininen **tai** ensimmäinen pallo on sininen **ja** toinen punainen.

$$P(\text{eriväriset pallot}) = P(\text{punainen}) \cdot P(\text{sininen}) + P(\text{sininen}) \cdot P(\text{punainen})$$

$$\frac{13}{28} \cdot \frac{15}{27} + \frac{15}{28} \cdot \frac{13}{27} = \frac{65}{126} \approx 0,516 = 52\%$$

Esimerkki 4.

Monivalintakokeessa on jokaiselle vastaukselle annettu 3 vastausvaihtoehtoa, joista yksi on oikea. Mikä on todennäköisyys, että oppilas, joka vastaa kokeeseen arvaamalla, saa kolmesta tehtävästä oikein vain yhden?

Ratkaisu:

Yksi oikea vastaus saadaan, jos ensimmäinen tehtävä on oikein **ja** toinen väärin **ja** kolmas väärin. Oikea vastaus voi osua ensimmäiseen **tai** toiseen **tai** kolmanteen tehtävään.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \approx 0,44$$

Tehtäviä

253.

Perheessä on kaksi tyttöä. Millä todennäköisyydellä perheeseen seuraavana syntyvä lapsi on tyttö tai poika?

254.

Keksi kolme esimerkkiä erillisistä tapahtumista.

255.

Heitetään kolikkoa. Millä todennäköisyydellä saadaan kruuna tai klaava?

256.

Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu henkilö on syntynyt maanantaina, tiistaina tai keskiviikkona?

257.

Luokan oppilaista 5 % sai maantiedon kokeesta arvosanan 10 ja 17 % arvosanan 9. Millä todennäköisyydellä luokasta umpimähkään valittu oppilas sai arvosanaksi 9 tai 10?

258.

Korttipakasta nostetaan yksi kortti. Millä todennäköisyydellä kortti on pata tai risti?

259.

Erään koulun oppilaista 15-vuotiaita on 30 % ja 14-vuotiaita on 40 %. Kuinka suuri osa opiskelijoista on 14- tai 15-vuotiaita?

260.

Heitetään kerran noppaa. Millä todennäköisyydellä pisteluvuksi tulee 1 tai 2?

261.

Heitetään kerran noppaa. Millä todennäköisyydellä tulos on pariton?

262.

Luokan oppilaista 70 % on sinisilmäisiä ja 10 % vihreäsilmaisia. Millä todennäköisyydellä luokasta umpimähkään valitulla oppilaalla on siniset tai vihreät silmät?

Soveltavat tehtävät

263.

Korttipakasta otetaan yksi kortti. Millä todennäköisyydellä se on

- a) jätkä, kuningatar tai kuningas
- b) musta kuningas tai punainen kuningatar?

264.

Laatikossa on sukkapareja seuraavasti: kolmet siniset, kuudet mustat, kahdet vihreät ja neljät harmaat. Otat niistä umpimähkään jotkut. Millä todennäköisyydellä saat

- a) mustat tai harmaat
- b) siniset tai vihreät
- c) jotkut muut kuin mustat?

265.

Millä todennäköisyydellä luvuista 11– 19 umpimähkään valittu luku on jaollinen kahdella tai viidellä?

266.

Noppaa heitetään neljä kertaa. Laske todennäköisyys sille, että saadaan täsmälleen yksi kakkonen.

267.

Luokassa on 17 poikaa ja 21 tyttöä. Järjestäjiä on aina kaksi kerrallaan ja ne valitaan arpomalla. Millä todennäköisyydellä ensimmäisistä järjestäjistä ainakin toinen on tyttö?

268.

Jos viisi lamppua kytketään sarjaan, ei mikään lamppu pala yhden lampun rikkoontuessa. Jos viisi lamppua kytketään puolestaan rinnakkain, ei yhden lampun rikkoontuminen estä muita lamppuja palamasta. Lamput palavat todennäköisyydellä 0,93 ja ei pala todennäköisyydellä 0,07. Mikä on todennäköisyys, että

- a) sarjaan kytketyt lamput palavat (piirrä myös kytkentäkaavio)
- b) rinnakkain kytketyistä lampuista ainakin yksi palaa (piirrä myös kytkentäkaavio)?

269.

Viivin työmatkalla on kahdet liikennevalot. Kokemus on osoittanut, että Viivin saapuessa paikalle ensimmäisissä valoissa palaa punainen kolmena arki-aamuna ja seuraavissa kahtena arki-aamuna. Mikä on todennäköisyys, että Viivi joutuu pysähtymään

- a) ainakin toisissa valoissa
- b) molemmissa valoissa?

270.

Mitä mediaanilla tarkoitetaan todennäköisyysjakaumassa?

Vaativat tehtävät

271.

Prinsessalla on kahdessa astiassa helmiä. Toisessa on 50 aitoa helmeä ja toisessa 50 muovihelmeä. Kuningas on määrännyt, että jokainen vieras saa Prinsessalta helmen. Vieras joutuu ensiksi valitsemaan kummasta astiasta hän aikoo helmen ottaa. Miten Prinsessan kannattaa sekoittaa helmet, jotta vieras ottaisi todennäköisimmin muovihelmen?

272.

Suomalaisten veriryhmäjakauma on seuraava: A 44 %, B 17 %, AB 8 % ja O 31 %. Millä todennäköisyydellä puoliset kuuluvat samaan veriryhmään? (yo syksy 1993)

273.

Sanan YLIOPPILAS kymmenestä kirjaimesta otetaan umpimähkään kolme. Millä todennäköisyydellä

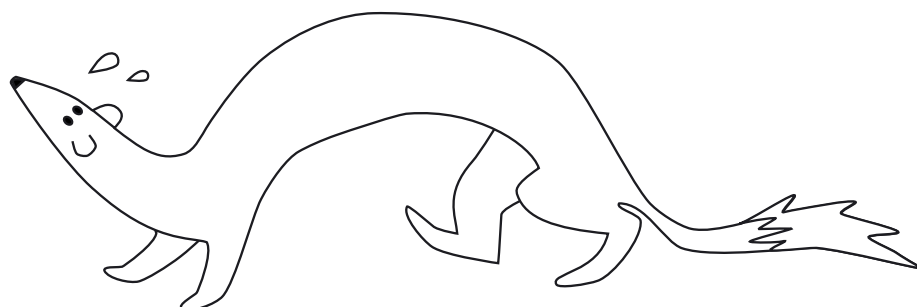
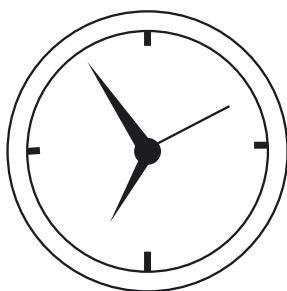
a) ensiksi otettu kirjain on vokaali

b) otetuista kirjaimista vain yksi on vokaali

c) otetuista kolmesta kirjaimesta voidaan muodostaa sana ILO? (yo kevät 2001)

274.

Koulusta myöhästynyt oppilas myöhästyy seuraavanakin koulupäivänä 30 prosentin todennäköisyydellä. Jos oppilas on tullut ajoissa kouluun, hän myöhästyy seuraavana koulupäivänä 10 prosentin todennäköisyydellä. Kuinka suuri on todennäköisyys, että oppilas tulee keskiviikkona ajoissa kouluun, jos hän saman viikon maanantaina myöhästyi koulusta? (yo kevät 1992)



Vastatapahtuma ★

Jos kaikkien suotuisien alkeistapauksien läpikäyminen on työlästä, voi lasku helpottua huomattavasti hyödyntämällä **vastatapahtumaa**. Vastatapahtumalla tarkoitetaan epäonnistumista. Jos arpajaisissa voittaa 5 % todennäköisyydellä, niin arvan, jossa ei ole voittoa, nostaa 95 % todennäköisyydellä.

Tapahtuman A **vastatapahtuman** $\bar{A}$ todennäköisyys on
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Esimerkki 1.

Laitteessa voi esiintyä kaksi toisistaan riippumatonta vikaa A ja B, joiden esiintymistodennäköisyydet ovat 0,2 ja 0,4. Lasketaan todennäköisyys

a) $P(\text{laitteessa esiintyy molemmat viat}) = P(A \text{ ja } B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$

b) $P(\text{laitteessa ei esiinny kumpikaan vioista}) = P(\bar{A} \text{ ja } \bar{B}) = (1 - 0,2) \cdot (1 - 0,4) = 0,48$

Vastaus:

Molemmat viat esiintyvät 8 %:n todennäköisyydellä ja 48 %:n todennäköisyydellä laitteessa ei ole kumpaakaan vikaa.

Tehtäviä

275.

Onni voittaa arpajaisissa todennäköisyydellä 0,6. Millä todennäköisyydellä hän ei voita?

276.

Tulli tarkistaa 4 % matkustajista. Kuinka suurella todennäköisyydellä matkustaja välttyy tullitarkastukselta?

277.

Tikanheittäjä osuu kymppiin todennäköisyydellä 0,08. Millä todennäköisyydellä hän saa korkeintaan yhdeksikön?

278.

Nannan koulumatkalla on yhdet liikennevalot. Todennäköisyys, että valot ovat punaiset, on 0,34. Millä todennäköisyydellä Nannan ei tarvitse pysähtyä risteykseen?

279.

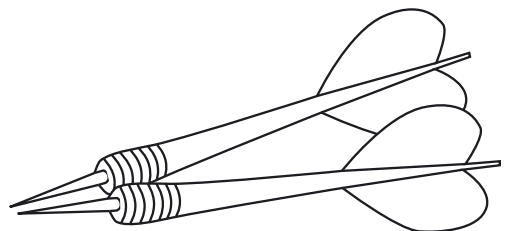
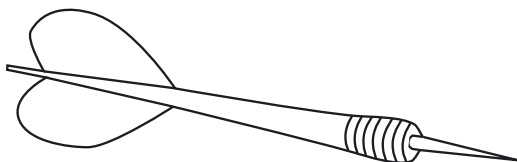
Vilma voi mennä aamuisin töihin linja-autolla, junalla tai omalla autolla. Todennäköisyydellä 0,5 hän menne linja-autolla ja junalla todennäköisyydellä 0,3. Millä todennäköisyydellä Vilma

a) ei mene junalla töihin

b) menee töihin omalla autolla?

280.

Tiira osuu tikanheitossa kymppiin todennäköisyydellä 0,35. Millä todennäköisyydellä hän osuu korkeintaan yhdeksikköön?



281.

Jenna pukeutuu farkkuihin todennäköisyydellä 0,55 ja puuvillahousuihin todennäköisyydellä 0,32. Muulloin hän käyttää hametta. Arvioi monenako päivänä vuodessa Jennalla on hame päällä?

282.

Samin koulumatkalla on kolmet toisistaan riippumattomat liikennevalot. Ne näyttävät vihreää todennäköisyyksillä 0,3, 0,2 ja 0,5. Millä todennäköisyydellä Samin ei koulumatkallaan tarvitse pysähtyä kertaakaan liikennevaloihin?

283.

Tehtaan tuotteista 1 % on viallisia. Tuotteista valitaan umpimähkään viisi. Millä todennäköisyydellä kaikki ovat ehjiä?

284.

Oppilaat tutkivat avainnippujaan ja saivat seuraavat todennäköisyydet sille, montako avainta heidän nipuissaan todennäköisesti on.

- a) Millä todennäköisyydellä nipussa on kolme avainta?
- b) Millä todennäköisyydellä siinä on enintään kolme avainta?
- c) Jos koulun pihalta löytyy kymmenet avaimet, monessako niistä on todennäköisesti kaksi avainta?

avainten lukumäärä	1	2	3	4	>4
todennäköisyys	0,41	0,27		0,08	0,03

285.

Laitteessa voi olla kaksi toisistaan riippumatonta vikaa A ja B, joiden esiintymistodennäköisyydet ovat 0,4 ja 0,5. Millä todennäköisyydellä laitteessa esiintyy

- a) molemmat viat
- b) ei kumpaakaan vioista?

286.

Basilikan siemen itää todennäköisyydellä 0,96. Millä todennäköisyydellä kylvetyistä 20 siemenestä ei yksikään idä?

287.

Eemeli saa vapaaheitossa korin 80 % ja Samuli 70 % todennäköisyydellä. Kumpikin heittää yhden vapaaheiton. Millä todennäköisyydellä

- a) molemmat saavat korin
- b) kumpikaan ei saa koria?

288.

Koripalloilija saa vapaaheitosta korin todennäköisyydellä 0,8. Millä todennäköisyydellä kolmesta heitosta menee koriin

- a) kaikki
- b) kaksi
- c) ainakin kaksi?

289.

Pojat pelaavat pistekilpailua koripallolla. Leevi voittaa, jos hän saa viidestä heitosta edes kaksi koriin. Korin hän tekee todennäköisyydellä 0,7. Millä todennäköisyydellä Leevi voittaa?

290.

Neljä keilaajaa saa kaadon 30 %, 50 %, 60 % ja 80 % todennäköisyyksillä. Jokainen keilaa kerran. Millä todennäköisyydellä saadaan

- a) neljä kaatoa
- b) ainakin yksi kaato?

291.

Tuotteessa voi olla kaksi toisistaan riippumatonta vikaa, joiden esiintymistodennäköisyydet ovat 0,2 ja 0,3. Millä todennäköisyydellä tuotteessa esiintyy

- a) molemmat viat
- b) ei kumpaakaan vioista?

292.

Millä todennäköisyydellä kolmella nopalla heitettäessä saadaan ainakin yksi kuutonen?

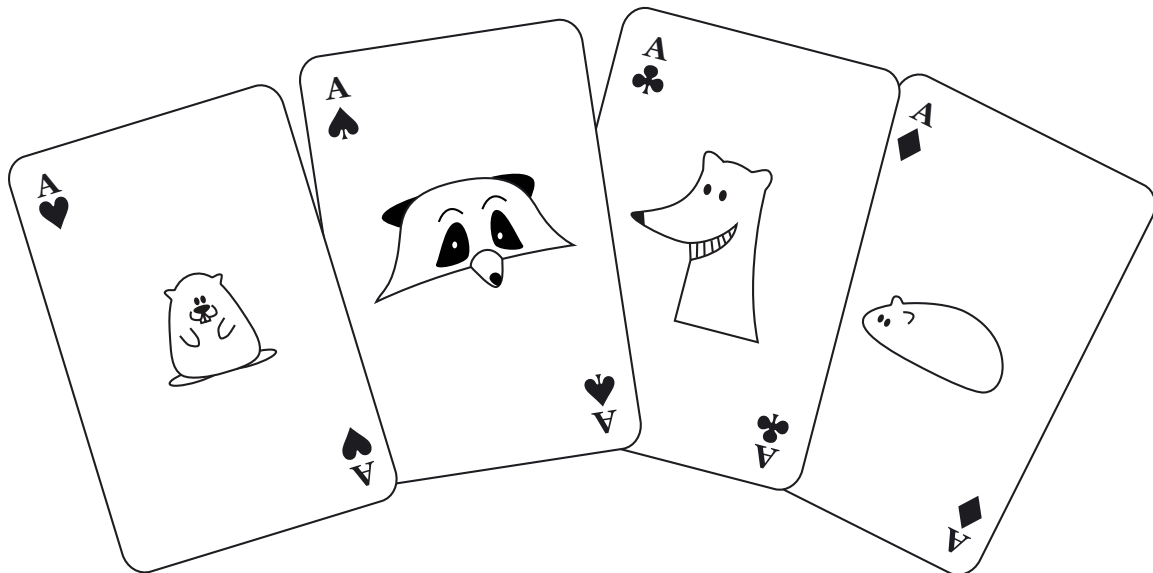
293.

Korttipakassa on 52, korttia, joista 4 on ässiä. Pelaaja ottaa umpimähkään pakasta 4 korttia.

Mikä on todennäköisyys, että

a) kaikki ovat ässiä,

b) mikään ei ole ässä? (yo syksy 1992)





Kertaustehtäviä

Tilastomuuttujan tyypit ja frekvenssi

294.

Mitä eroa on diskreetillä ja jatkuvalla muuttujalla?

295.

Mitkä seuraavista ovat jatkuvia ja mitkä diskreettejä muuttujia?

- a) lämpötila
- b) sukupuoli
- c) puoluekanta
- d) ikä

Aineiston luokittelu

296.

Mitä tarkoitetaan tilastoaineiston luokittelulla ja mitä hyötyjä ja haittoja siinä on?

297.

Kannattaako seuraavien tilastojen havainnollistamisessa käyttää tietojen luokittelua?

- a) Oppilaiden koulumatkan pituudet.
- b) Oppilaiden sisarusten määrät.
- c) Oppilaiden serkkujen määrät.

Keskiarvon laskeminen

298.

Laske lukujen 4, 9, 3, 2 ja 10 keskiarvo.

299.

Kokeessa ensimmäinen tehtävä arvosteltiin asteikolla 0-6.

Määritä tehtävästä saatujen pisteiden keskiarvo.

300.

Tietotekniikkalehden toimitus testasi lasertulostimia ja muodosti niille arvosanan painottaen joitain ominaisuuksia enemmän kuin toisia. Laske tulostimille annetut loppuarvosanat.

pisteitä	frekvenssi
0	1
1	4
2	6
3	5
4	7
5	2
6	3

	painoarvo [%]	HP	Canon	Epson	Lexmark
käyttökustannukset	20	8	9	7	8
käyttöliittymä ja hallinta	20	9	8	8	8
grafiikanopeus	15	9	9	7	7
grafiikan latu	15	9	8	8	7
tekstinopeus	15	8	8	9	9
tekstin laatu	15	8	7	8	7

(Lähde: Tietokone 2/2003)

Tyyppiarvon ja mediaanin määrittäminen

301.

Mikä ero on moodilla ja mediaanilla?

302.

Millä keskiluvulla voi olla useampi kuin yksi arvo?

303.

Milloin mediaania voidaan ainoastaan käyttää?

304.

Määritä arvosanojen 4, 7, 9, 9, 8, 6, 6, 8, 8 moodi ja mediaani.

305.

Ammattikorkeakoulussa eräällä luokalla on 16 oppilasta, joiden keski-ikä on 23 vuotta ja vaihteluvälin pituus 5 vuotta. Voivatko seuraavat väittämät olla totta vai ei?

- a) Nuorin oppilaista on 19 vuotta.
- b) Kaikki oppilaat ovat alle 24-vuotiaita.
- c) Vanhin oppilaista on 7 vuotta nuorinta vanhempi.
- d) Kaikki ovat iältään 23-28 -vuotiaita.

Hajontalukujen määrittäminen

306.

Laske lukujoukon 2, 3, 5, 10 keskihajonta.

307.

Jatka lauseita.

a) Hajontalukuja ovat...

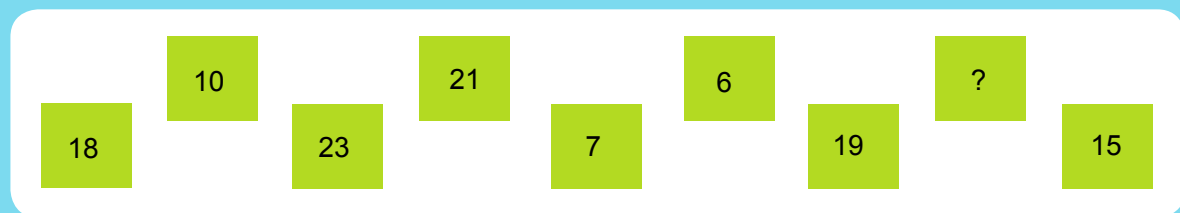
b) Keskilukuja ovat...

308.

Mitä eroa on vaihteluvälillä ja vaihteluvälin pituudella?

309.

Yhdeksän luvun vaihteluvälin pituus on 18. Mitkä kaksi lukua voivat olla puuttuvan numeron paikalla?



310.

Lassi sai englannin kokeesta 27 pistettä. Luokan keskiarvo oli 23 ja keskihajonta 7 pistettä.

Rinnakkaisluokalla oleva Viivi sai kokeesta 25 pistettä ja hänen luokan keskiarvo oli 22 pistettä ja keskihajonta 5. Kumman koetulos oli omaan luokkaansa verrattuna parempi?

Joukko-oppia ★

311.

Joukot ovat $A = \{c, d, e\}$ ja $B = \{e, f, g\}$. Luettele ne alkiot, jotka kuuluvat joukkojen A ja B

a) leikkaukseen

b) yhdisteeseen?

Todennäköisyyden määrittäminen

312.

Mitä todennäköisyyksien tarkastelutavoista käytetään, kun tarkastellaan mahdollisuutta saada klaava kolikon heitossa?

Klassinen todennäköisyys

313.

Karkkipussi sisältää hedelmäkarkkeja, salmiakkeja ja lakritseja. Todennäköisyys, että käteen tulee salmiakki on $\frac{5}{16}$ ja todennäköisyys lakritsille ja hedelmäkarkkeille on sama. Pussissa on keskimäärin 54 karkkia, moniko niistä on

- a) salmiakkeja?
- b) hedelmäkarkkeja?

314.

Noppaa heitetään kerran, millä todennäköisyydellä saadaan pisteluvuksi

- a) vähintään kaksi
- b) enintään neljä
- c) ainakin kolme?

315.

Osallistut kilpailuun, jossa voit voittaa 20 €. Sinulle näytetään kolmea samanlaista laatikkoa, johon yhteen laitetaan 20 € ja kaksi ovat tyhjiä. Laatikoiden paikkoja vaihdetaan ja saat valita yhden laatikon. Sinulle näytetään toinen tyhjästä laatikoista ja kysytään haluatko vaihtaa valitsemasi laatikon toiseen. Kannattaako sinun vaihtaa ottamasi laatikko toiseen?

316.

Oppilaiden joukossa suoritettiin kysely suhtautumisesta matematiikkaan. 2 vihasi matematiikkaa, 6 ei oikein pitänyt matematiikasta, 15 tykkäsi matematiikasta ja 4 piti sitä lempiaineenaan. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valittu oppilas suhtautui matematiikkaan

- a) negatiivisesti
- b) positiivisesti?

Tilastollinen ja geometrinen todennäköisyys

317.

Taulukossa on Suomen väestön ikäjakauma vuoden 2001 lopussa.

Mikä oli suomen väkiluku vuoden 2001 lopussa?

Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu henkilö on

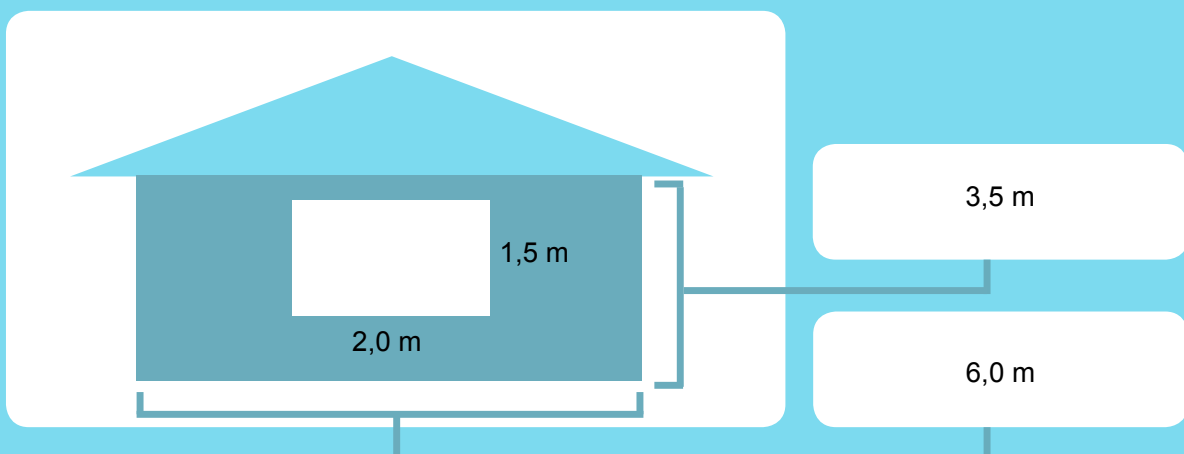
- a) 10-19 -vuotias
- b) alle 10-vuotias
- c) yli 70-vuotias?

ikä	lukumäärä
0-9	608 569
10-19	652 238
20-29	637 789
30-39	711 609
40-49	776 648
50-59	746 604
60-69	499 296
70-	562 148

(Lähde: Tilastokeskus)

318.

Pesäpallo lentää seinään. Millä todennäköisyydellä se osuu ikkunaan?



Malleja alkeistapausten muodostamiseksi

319.

Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä

- a) pistelukujen summa on 3,
- b) pistelukujen summa on vähintään 6,
- c) saadaan ykkönen ja nelonen?

320.

Arpanopan kaksi sattumanvaraisesti valittua sivua peitetään maalilla. Mikä on todennäköisyys, että näkyviin jäävien sivujen yhteenlaskettu silmäluku on suurempi kuin 12? (yo syksy 1987)

Riippumattomien tapahtumien kertosääntö ★

321.

Sitruunamelissan siemen itää 0,95 todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä 100 kylvetystä siemenestä kaikki itävät?

322.

Koripalloilija heittää vapaaheitosta korin todennäköisyydellä 0,85. Millä todennäköisyydellä kolmesta heitosta kaksi menee koriin?

323.

Montako 7-numeroista puhelinnumeroa voidaan muodostaa?

324.

Veikkaussarakkeessa on 13 kohdetta, joissa jokaisessa on kolme vaihtoehtoa (1×2), joista valitaan yksi. Montako erilaista veikkaussaraketta on olemassa?

Yleinen kertosääntö ★

325.

Kymmenen henkilöä jaetaan kahteen viiden hengen ryhmään. Kuinka suuri on todennäköisyys, että ystävykset, Marianne ja Laura, pääsevät samaan ryhmään?

326.

Laatikossa on palloja, joissa on kirjaimet M, I, T, M ja O. Laatikosta nostetaan pallo kerrallaan. Millä todennäköisyydellä saadaan pallot siinä järjestyksessä, että niistä muodostuu sana TOMMI?

327.

Perheessä on kolme lasta. Mikä on todennäköisyys sille, että lapset ovat syntyneet eri viikonpäivinä? (yo syksy 1974)

Erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö ★

328.

Laatikossa on mustia ja ruskeita sukkia sekaisin. Mustia on 8 paria ja ruskeita 6 paria. Millä todennäköisyydellä umpimähkään otetut sukat ovat eriväriset?

329.

Syntyvä lapsi on todennäköisyydellä 0,511 poika. Millä todennäköisyydellä kolmilapsisessa perheessä on vähintään yksi poika?

Vastatapahtuma ★

330.

Leevin työmatkalla on yhdet liikennevalot. Todennäköisyys, että valot ovat punaiset Leevin saapuessa risteykseen, on 0,26. Millä todennäköisyydellä Leevin ei täydy pysähtyä risteykseen?

331.

Tean lempiväri on punainen ja hänellä on päällä jotain punaista todennäköisyydellä 0,6.

a) Millä todennäköisyydellä Tealla ei ole mitään punaista huomenna koulussa?

b) Millä todennäköisyydellä Tealla on huomenna siniset housut?

Harjoituskoe

1.

Noppaa heitetään 3000 kertaa. Montako kolmosta on odotettavissa?

2.

Monellako tavalla 10 henkilöä voi asettua jonoon?

3.

22 poikaa pelaavat pesäpalloa ja joukkueet arvotaan. Millä todennäköisyydellä kaverukset Lassi ja Leevi pääsevät samaan joukkueeseen?

4.

Noppaa heitetään neljä kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan joka kerralla eri pisteluku?

5.

Narsissin sipuleista itää 70 % ja tulppaanin sipuleista 80 %. Riina istuttaa maahan yhden narsissin ja yhden tulppaanin sipulin. Millä todennäköisyydellä sipuleista

- a) molemmat itävät
- b) kumpikaan ei idä
- c) vain toinen itää?

6.

Oppilas on saanut kuvaamataidon töistä arvosanat 9, 8, 10, 9 ja 9. Laske arvosanojen

- a) keskiarvo
- b) moodi
- c) mediaani
- d) vaihteluväli ja vaihteluvälin pituus.
- e) Mikä arvosana vähintään oppilaan on saatava viimeisestä työstä, jotta kaikkien töiden keskiarvo pyöristyisi arvosanaan 9.

Harjoituskokeen ratkaisut

1.

Todennäköisyys saada kolmonen on $\frac{1}{6}$, jolloin odotettavissa olevien kuutosten lukumäärä on $\frac{1}{6} \cdot 3000 = 500$

2.

Ensimmäiseksi voi tulla kuka tahansa 10:stä henkilöstä

ja seuraavaksi kuka tahansa yhdeksästä jäljellejääneestä

ja seuraavaksi kuka tahansa kahdeksasta jäljelle jääneestä...

ja lopuksi viimeinen jäljelle jääneistä.

Henkilöt voivat asettua jonoon $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$ eri tavalla.

3.

Aloitetaan tarkastelu vaikkapa Lassista. Hän voi olla kummassa tahansa joukkueessa ja millä tahansa paikalla.



Jotta Leevi pääsisi samaan joukkueeseen, tulisi hänen päästä johonkin kymmenestä suotuisasta alkeistapauksesta. Alkeistapauksia on kaikkiaan 21, koska Lassin paikka ei ole enää mahdollinen.

$$P(\text{pääsevät samaan joukkueeseen}) = \frac{10}{21} \approx 0,476 \approx 48\%$$

4.

Ensimmäinen heitto: Saa tulla mikä tahansa pisteluku. Kyseessä on varma tapaus, jonka todennäköisyys on 1

Toinen heitto: Saa tulla mikä tahansa muu paitsi ei edellinen eli kuudesta alkeistapauksesta viisi on suotuisia. Todennäköisyys heiton onnistumiselle on $\frac{5}{6}$.

Kolmas heitto: Kaksi pistelukua on jo käytetty, joten todennäköisyys on $\frac{4}{6}$.

Neljäs heitto: Hyväksyttäviä pistelukuja on kolme kappaletta, joten todennäköisyys on $\frac{3}{6}$.

Siis ensimmäisellä kerralla saadaan jokin tulos ja seuraavalla kerralla saadaan eri tulos ja sitä seuraavalla taas eri tulos ja sitä seuraavalla taas eri tulos. Kyseessä on erilliset tapahtumat.

$$P(\text{joka kerta eri tulos}) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{18} \approx 0,28 = 28\%$$

5.

a) $P(\text{narsissi itää ja tulppaani itää}) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$

b) $P(\text{narsissi ei idä ja tulppaani ei idä}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$

c) $P(\text{narsissi itää ja tulppaani ei idä})$ tai $P(\text{narsissi ei idä ja tulppaani itää})$
 $= 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8$
 $= 0,38$

6.

a) $\frac{9 + 8 + 10 + 9 + 9}{5} = 9$

b) Yleisin arvosana on 9.

c) Järjestetään arvosanat suuruusjärjestykseen 8, 9, 9, 9, 10, näistä keskimäinen arvosana on mediaani eli 9.

d) Vaihteluväli on (8,10) ja näiden erotuksesta saadaan vaihteluvälin pituus, joka on 2.

e) Kirjoitetaan yhtälö, jossa x:llä merkitään viimeisen työn arvosanaa

$$\frac{9 + 8 + 10 + 9 + 9 + x}{6} = 8,5$$

$$\frac{45 + x}{6} = 8,5 \quad | \cdot 6$$

$$45 + x = 51$$

$$x = 51 - 45$$

$$x = 6$$

131.

-

132. -

133.

-

134.

- a) leikkaus
- b) erotus
- c) yhdiste

135.

- a) {c}
- b) {a, b, c, d, e}
- c) {a, b}

136.

- a) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
- b) {3, 4}

137.

13

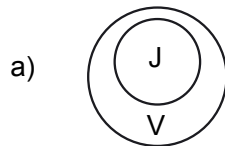
138.

15

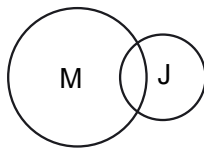
139.

- a) Joukoilla ei ole yhteisiä alkioita, joten niiden leikkaus on tyhjä joukko
- b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

140.



b)



141.

27

142.

- a) {1, 2, 3, 4, 6, 8}
- b) {C, D}

143.

- a) {2, 4}
- b) {-2, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 8, ...}

144.

5:ssä

145.

11:llä

146.

7

147.

57

148.

39

149.

4 poikaa ja 3 tyttöä

150.

Kaikki

151.

- a) 1
- b) 2
- c) 2
- d) 3
- e) 2 tai 3

152.

- a) 1
- b) 3 tai 4
- c) 3
- d) 2 tai 3

153.	b) {kr kr}, {kl kl}, {kr kl}, {kl kr}	172.
-		a) $\frac{1}{6}$
	163.	b) $\frac{1}{2}$
154.	a) {2, 3, 4, 5, 6}	c) $\frac{5}{6}$
Tea	b) {1, 2, 3}	
	c) {1, 2, 3}	
155.	d) {2, 3, 4, 5}	173.
-		a) $\frac{1}{4}$
	164.	b) $\frac{1}{13}$
156.	0,5	c) $\frac{4}{13}$
-		
	165.	174.
157.	$\frac{2}{9}$	
-		
	166.	a) $\frac{1}{6}$
158.	$\frac{1}{8}$	b) $\frac{5}{6}$
-		
159.	167.	175.
-P tulee englanninkielisestä	$\frac{2}{13}$	
sanasta probability		
tai ranskan sanasta	168.	a) $\frac{7}{15}$
probabilité, jotka tarkoittavat	-	b) $\frac{1}{5}$
todennäköisyyttä.		c) $\frac{1}{3}$
160.	169.	
a) on	50	
b) ei		
c) ei	170.	
d) on	Molemmilla sama	
	todennäköisyys.	
161.		
Sellaisia, jotka kaikki ovat	171.	
yhtä mahdollisia.	$\frac{1}{30}$	
162.		
a) {1, 2, 3, 4, 5, 6}		

176.

a)

Herneiden lukumäärä	4	5	6	7	8
Thomas	0	1/3	1/10	11/30	1/5
Matias	1/10	1/6	3/10	4/15	1/6
Joona	1/15	1/5	2/5	3/10	1/30

b)

Herneiden lukumäärä	4	5	6	7	8
toden- näköisyys	0,056	0,233	0,267	0,311	0,133

c) 7

177.

a) $\frac{4}{15}$

b) $\frac{8}{15}$

c) $\frac{1}{5}$

178.

a) 12

b) 72

179.

$\frac{1}{3}$

180.

0,43

181.

$\frac{1}{6}$

182.

0,62

183.

a) 0,114

b) 0,036

c) 0,85

184.

0,077

185.

a) 0,087

b) 0,435

c) 0,304

186.

a) 833

b) 2500

187.

0,18

188.

a) 0,175, 0,154 0,151

0,176 0,166 0,178

b) 0167

189.

0,125

190.

Virtanen, koska se on yleisin sukunimi Suomessa.

191.

a) 0,14

b) 0,52

c) 0,95

192.

0,29

193.

1/2

194.

vaniljaa 4, suklaata 6,
mansikkaa 5, lakritsia
3, kinuskipähkinää 1 ja
mangomelonia 1 paketti.

195.

1/6

196.

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

197.

Merkitään ympyrän sädettä
r:llä. Kivi osuu lähemmäksi
keskipistettä, jos se osuu

samankeskisen $\frac{r}{2}$ -säteisen
ympyrän sisään.

Todennäköisyys on pinta-
alojen suhde

$$\frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{r^2}{4}}{r^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

198.

3 628 800 eri tavalla

199.

6

200.

27

201.

a) 0,31

g) 0,17

202.

a) 0,17

b) 0,92

c) 0,03

203.

a) 5040 eri järjestyksessä

b) 0,0002

204.

$\frac{1}{6}$

205.

256

206.

4 294 967 294

207.

a) 165

b) 0,006

208.

a) 6

b) 3

209.

a) 2

b) 6

c) 24

d) 362880

210.

15

211.

0,45

212.

16 (8 miestä ja 8 naista)

213.

Piirretään taulukko noppien antamien pistelukujen summista.

Pistelukujen summa 7 esiintyy useimmin, joten se on todennäköisin.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

214.

a) $\frac{5}{18} \approx 0,28$

b) $\frac{25}{324} \approx 0,077$

215.

Paikalla on 20 henkilöä, joista jokainen kättelee jokaista muuta paitsi itseään ja aviopuolisoaan, eli 18 henkilöä. Lisäksi kuhunkin kättelyyn tarvitaan 2 henkilöä. Kättelyitä suoritetaan .

$$\frac{20 \cdot 18}{2} = 180$$

216.

Jos oppilaita on x kpl, niin jokainen antaa kuvansa $x-1$:lle luokkatoverilleen.

Joten

$$x(x-1) = 1122$$

$$x^2 - x - 1122 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat x

$= 34$ ja $x = -33$ (ei kelpaa ratkaisuksi). Luokalla oli siis 34 oppilasta.

217.

0,00013

218.

0,00098

219.

0,019

220.

a) 0,33

b) 0,18

221.

0,0039

222.

0,364

223.

1/12

224.

a) 416 000

b) 38 %

225.

$$\frac{1}{36}$$

226.

0,00077

227.

12,5 %

228.

0,5

229.

1/6

230.

Kannattaa. Jos pidät alkuperäisen valintasi, voitat 1/5 todennäköisyydellä. Jos vaihdat valintaa, voitat 4/15 todennäköisyydellä.

231.

0,00935

232.

Olkoon silmäluvun 1

todennäköisyys a ja

silmäluvun 2 todennäköisyys

b, jolloin

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow b = 2a$$

Vastaavasti silmäluvun 3

todennäköisyys on 3a jne.

Silmälukujen

todennäköisyyksien summa

on oltava 1, jolloin pätee

$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 1$$

$$a = \frac{1}{21}$$

Jolloin silmälukujen

todennäköisyyksiksi saadaan:

silmäluku	1	2	3	4	5	6
todennäköisyys	1/21	2/21	1/7	4/21	5/21	2/7

Todennäköisyys saada kaksi

kuutosta on

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} \approx 8,2 \%$$

233.

riippumattomia

234.

0,0045

235.

a) 0,347

b) 0,147

236.

a) riippumattomia

b) riippuvia

237.

0,0026

238.

a) 0,107

b) 0,357

239.

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{1}{7}$

240.

0,0143

241.

0,30

242.

0

243.

0,0079

244.

0,000000065

245.

a) 0,0667

b) 0,467

246.	2. kierroksella on 16 ottelijaa.	258.
a) 0,0152	$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 2.}$	
b) 0,682	$\text{kierroksella}) = \frac{14}{15}$	$\frac{1}{2}$
247.	3. kierroksella on 8 ottelijaa.	259.
0,56	$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 3.}$	70 %
248.	$\text{kierroksella}) = \frac{6}{7}$	260.
a) $6,3 \cdot 10^{-7}$	4. kierroksella on 4 ottelijaa.	$\frac{1}{3}$
b) 0,0051	$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 4.}$	261.
249.	$\text{kierroksella}) = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
Riippuvuutta ei voi kuvata	Todennäköisyys sille, että	
Venn-diagrammeilla.	parhaat ovat loppuottelussa	262.
250.	on:	80 %
$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$	$P(\text{Parhaat loppuottelussa}) =$	
251.	$\frac{30}{31} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{31} \approx 0,52$	263.
$\frac{49}{78} \cdot \frac{48}{77} \cdot \frac{47}{76} \cdot \frac{46}{75} \cdot \frac{45}{74} \cdot \frac{44}{73} \approx 0,054$	Vastaus: 0,52	$\frac{3}{13}$
252.		a) $\frac{1}{13}$
Oletetaan, että parhaita	253.	b) $\frac{1}{13}$
pelaajia ovat ne, jotka	1	
voittavat aina kaikki muut	254.	264.
pelaajat. Tällöin parhaat	-	$\frac{2}{3}$
pelaajat ovat loppuottelussa,		a) $\frac{2}{3}$
jollei he pelaa toisiaan	255.	$\frac{1}{3}$
vastaan alkukierroksilla.	1	b) $\frac{1}{3}$
1. kierroksella on 32 ottelijaa.		c) $\frac{3}{5}$
Paras pelaajavoi saada	256.	265.
parikseen 31 pelaajaa, joista	0,429	0,556
yksi on toiseksi paras.	257.	
$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 1.}$	22 %	266.
$\text{kierroksella}) = \frac{30}{31}$		0,39

267.

0,81

Pienin todennäköisyys

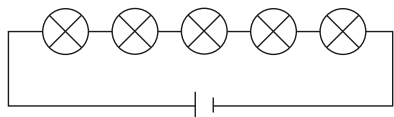
aidoille helmille saadaan, kun

sijoitetaan toiseen astiaan

ainoastaan yksi muovihelmi

ja toiseen kaikki muut helmet.

268.



sarjaankytkentä

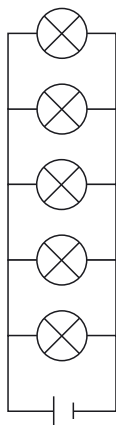
$$P(\text{aidot}) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (0) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{50}{99}\right) = 0,252525... \approx 25\%$$

a) 0,70

272.

$$0,44^2 + 0,17^2 + 0,08^2 + 0,31^2 \approx 0,325$$

b) 1,00



rinnankytkentä

273.

a) 50 %

b) 42 %

c) 3,3 %

275.

0,4

274.

Koska oppilas on

myöhästynyt maanantaina,

niin tiistaina hän myöhästyy

30 % todennäköisyydellä

ja tulee ajoissa kouluun 70

% todennäköisyydellä. Jos

oppilas on myöhästynyt

tiistaina, hän tulee

keskiviikkona ajoissa

todennäköisyydellä 70

% ja jos hän on tullut

ajoissa tiistaina, hän tulee

keskiviikkona ajoissa 90 %

todennäköisyydellä.

Todennäköisyys, että oppilas

tulee keskiviikkona ajoissa

kouluun on

$$0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,9 = 0,84$$

269.

a) 0,76

b) 0,24

270.

Todennäköisyysjakaumassa

mediaanilla tarkoitetaan

sitä arvoa, jota pienempien

ja suurempien arvojen

todennäköisyys on yhtä suuri

eli 0,5.

271.

Todennäköisyys kummankin

astian valitsemiselle on $\frac{1}{2}$

276.

96 %

277.

0,92

278.

0,66

279.

a) 0,7

b) 0,2

280.

0,65

281.

47

282.
0,03

b) 0,94

283.
95 %

292.
0,42. Vihje: Hyödynnä
vastatapahtumaa.

284.
a) 0,21
b) 0,89
c) kolmessa

293.

$$P(\text{neljä ässää}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \approx 3,7 \cdot 10^{-6}$$

$$P(\text{ei yhtään ässää}) = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \approx 0,72$$

285.
a) 0,2
b) 0,3

294.

Diskreetti muuttuja voi saada
vain erillisiä arvoja ja jatkuva
muuttuja voi saada kaikkia
arvoja joltakin väliltä.

298.
5,6

287.
a) 56 %
b) 6 %

295.

a) jatkuva
b) diskreetti
c) diskreetti
d) jatkuva

299.
Keskiarvo on 3,1

288.
a) 51 %
b) 38 %
c) 90 %

296.

Luokittelulla aineisto
jaetaan suurempiin ryhmiin.
Luokittelemalla menetetään
osa aineiston informaatiosta,
mutta useissa tapauksissa
sillä lisätään tulosten
havainnollisuutta.

300.
HP 8,5, Canon 8,2, Epson
7,8, Lexmark 7,7

289.
0,97

301.

Moodi on muuttujan arvo,
joita on eniten. Mediaani
tarkoittaa keskimmäistä
muuttujan arvoa, kun aineisto
on suuruusjärjestyksessä.

290.
a) 0,072
b) 0,97

297.

a) kyllä
b) ei
c) ehkä

302.
moodilla

291.
a) 0,06

303.

Ainoastaan, jos
tilastomuuttujan arvot
voidaan järjestää
suuruusjärjestykseen.

304.

Moodi on 8 ja mediaani on 8.

305.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) ei
- d) ei

306.

3,1

307.

- a) ...vaihteluväli,
vaihteluvälin pituus ja
keskihajonta.
- b) ...keskiarvo, moodi ja
mediaani.

308.

Vaihteluväli on suurin ja
pienin arvo. Vaihteluvälin
pituus on näiden arvojen
erotus.

309.

24 tai 5

310.

Viivin

311.

- a) {e}
- b) {c, d, e, f, g}

312.

symmetriaa

313.

- a) 17
- b) 19

314.

- a) $\frac{5}{6}$
- b) $\frac{2}{2}$
- c) $\frac{2}{3}$

315.

Kannattaa. Jos pidät
alkuperäisen valintasi, voitat
1/3 todennäköisyydellä. Jos
vaihdat valintaa, voitat 2/3
todennäköisyydellä.

316.

- a) $\frac{8}{27}$
- b) $\frac{19}{27}$

317.

väkiluku oli 5 194 901

- a) 0,126
- b) 0,117
- c) 0,108

318.

0,143

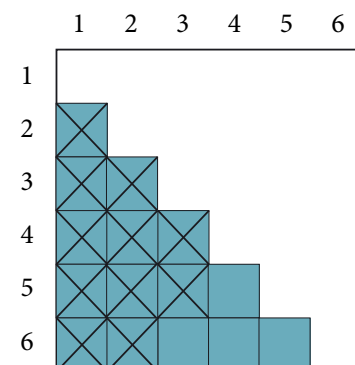
319.

- $\frac{1}{18} \approx 0,06$
- a) $\frac{13}{18} \approx 0,72$
- b) $\frac{1}{18} \approx 0,06$
- c)

320.

Alkeistapauksia on yhteensä
15, näistä 11 tapausta on
sellaista, joissa näkyviin
jäävien sivujen yhteenlaskettu
pisteluku on yli 12. Joten
kysytty todennäköisyys on

$$\frac{11}{15} \approx 0,73.$$



321.

0,0059

322.

0,33

323.

10 000 000

324.

$$3^{13} = 1594323$$

325.

0,44

326.

$\frac{1}{60}$

327.

0,61

328.

0,51

329.

88,3 %

330.

0,74

331.

a) 0,4

b) Vaadittavia tietoja ei ole
annettu.

Taulukko-osio

Reaalilukujen laskulait

$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

vaihdantalaki

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c$$

liitântälaki

$$a(b + c) = ab + ac$$

osittelulaki

$$a + (-a) = 0$$

luvun a vastaluku $-a$

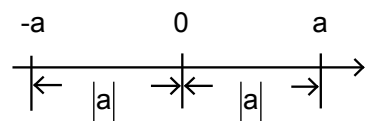
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

luvun a käänteisluku $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)

$$|a|$$

itseisarvo

Graafinen tulkinta: $|a|$ = luvun a vastinpisteiden etäisyys nolasta



Murtolukujen laskutoimitukset

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \text{ missä } k \neq 0$$

laventaminen ($\rightarrow$) ja supistaminen ($\leftarrow$)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

yhteenlasku (lavennus samannimisiksi)

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

vähennyslasku (lavennus samannimisiksi)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

kertolasku

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

jakolasku

Potenssi

$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ n tekijää, a = kantaluku, n = eksponentti

$a^0 = 1$ $a \neq 0$, 0^0 ei ole määritelty

$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$ $a \neq 0$

Laskusääntöjä

$a^m a^n = a^{m+n}$ samankantaisten potenssien tulo

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ samankantaisten potenssien osamäärä

$(ab)^n = a^n b^n$ tulon potenssi

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ osamäärän potenssi

$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ potenssin potenssi

Polynomin jakaminen tekijöihin

$ab + ac = a(b + c)$ yhteinen tekijä

$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$ ryhmittely

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ muistikaavat

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Neliöjuuri

Jos $\sqrt{a} = b$, niin $b^2 = a$ ja $b \geq 0$ (pätee myös toisinpäin).

Laskusääntöjä

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Lukujonot

Aritmeettinen lukujono

$$d = a_2 - a_1$$

erotusluku

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

yleinen termi

Geometrinen lukujono

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

suhdeluku

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

yleinen termi

Toisen asteen yhtälö

Normaalimuoto $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Ratkaisukaava: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Paraabelin aukamissuunta ja muoto:

Jos $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin.

Jos $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

Jos $|a|$ on pieni, paraabeli on leveä.

Jos $|a|$ on suuri, paraabeli on kapea.

Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt

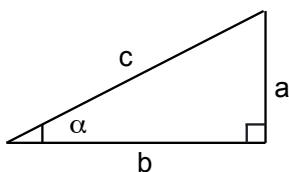
Yhtälön $ax^2 + c = 0$ ratkaisujen määrä riippuu vakiosta c :

- $c < 0$: kaksi ratkaisua, ratkaisut toistensa vastalukuja
- $c = 0$: ainoa ratkaisu $x = 0$
- $c > 0$: ei ratkaisua

Yhtälön $ax^2 + bx = 0$ ratkaisut:

- aina kaksi ratkaisua, toinen on aina $x = 0$

Suorakulmaisen kolmion trigonometria



$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Pythagoraan lause)}$$

$$A = \frac{1}{2}ab$$

Trigonometriset funktiot

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Suora

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora on

- nouseva, jos $k > 0$
- laskeva, jos $k < 0$
- x-akselin suuntainen, jos $k = 0$
- y-akselin suuntainen, jos k :ta ei voida määrittää.

Tarkastellaan suoria s_1 ja s_2 , joiden kulmakertoimet ovat k_1 ja k_2 .

Suorat ovat yhdensuuntaiset eli $s_1 \parallel s_2$, jos $k_1 = k_2$ tai suorat ovat y-akselin suuntaiset.

Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli $s_1 \perp s_2$, jos $k_1 k_2 = -1$ tai toinen suora on x-akselin ja toinen y-akselin suuntainen.

Suoran yhtälön yleinen muoto:

$$ax + by + c = 0$$

Suoran yhtälön ratkaistu muoto:

$y = kx + b$, missä k on kulmakerroin ja b vakiotermi (suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti).

x- akselin suuntaisen suoran yhtälö:

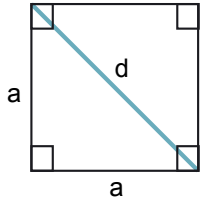
$y = t$, missä t on suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti

y-akselin suuntaisen suoran yhtälö:

$x = u$, missä u on suoran ja x-akselin leikkauspisteen x-koordinaatti

Tasokuvioita

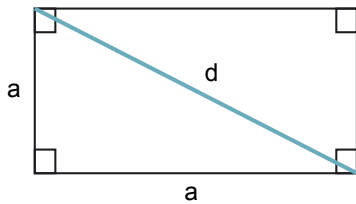
Neliö



$$A = a^2$$

$$d = \sqrt{2}a$$

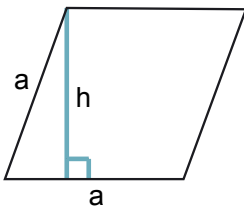
Suorakulmio



$$A = ab$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Neljäkäs



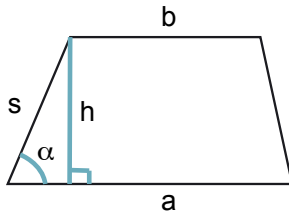
$$A = ah$$

Suunnikas



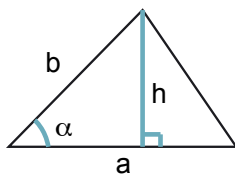
$$A = ah = ab \sin \alpha$$

Puolisuunnikas



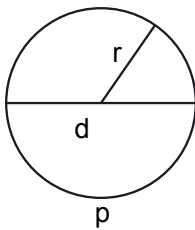
$$A = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(a+b)s\sin\alpha$$

Kolmio



$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

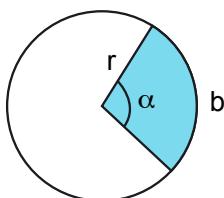
Ympyrä



$$A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$

$$p = 2\pi r = \pi d$$

Sektori

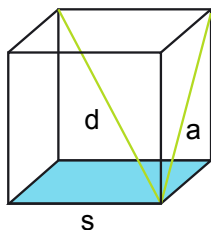


$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r \quad (\text{kaaren pituus})$$

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{br}{2}$$

Avaruuskappaleita

Kuutio

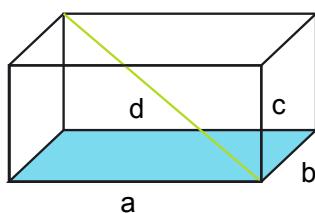


$$a = s\sqrt{2}, d = s\sqrt{3}$$

$$A = 6s^2$$

$$V = s^3$$

Suorakulmainen särmiö

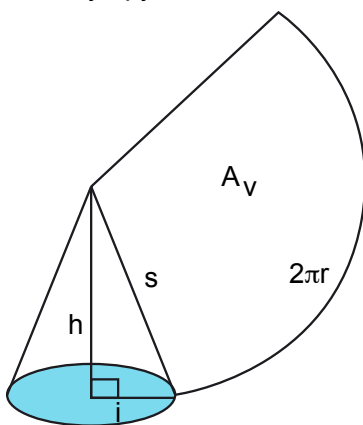


$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

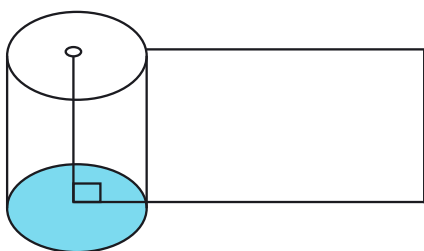
Suora ympyräkartiio



$$A_v = \pi rs$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Suora ympyrälieriö

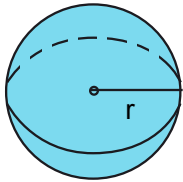


$$A_v = 2\pi rh$$

$$A_{\text{kok}} = A_v + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

Pallo



$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

π :n likiarvo 500 ensimmäisen desimaalin tarkkuudella

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72456 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 188857 52724 89122 79381 83011 94912

Tilastomatematiikka

Keskilukuja

keskiarvo $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

painotettu keskiarvo $\bar{x} = \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n}{q_1 + q_2 + \dots + q_n}$, missä $q_1, q_2, \dots, q_n$ ovat painokertoimia

Moodi eli tyyppiarvo tarkoittaa yleisintä, useimmin esiintyvää muuttujan arvoa.

Mediaani tarkoittaa keskimmäistä arvoa (tai kahden keskimmäisen arvon keskiarvoa), kun aineisto on järjestetty suuruusjärjestykseen.

Hajontalukuja

Keskihajonta ilmoittaa, kuinka kaukana muuttujan arvot ovat keskimäärin keskiarvosta.

Vaihteluväli kertoo millä välillä havainnot vaihtelevat.

Vaihteluvälin pituus on muuttujan suurimman ja pienimmän arvon erotus.

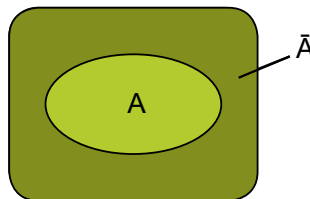
Todennäköisyyslaskenta

Klassinen todennäköisyys

$$P(A) = \frac{\text{suotuisten tapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien tapausten lukumäärä}}$$

Vastatapahtuman todennäköisyys

$$P(\bar{A}) = P(A \text{ ei tapahdu}) = 1 - P(A)$$



Yhteenlaskusääntö

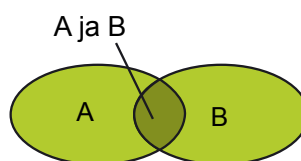
Kun A ja B erillisiä tapauksia

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$$



Kun A ja B eivät ole erillisiä

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

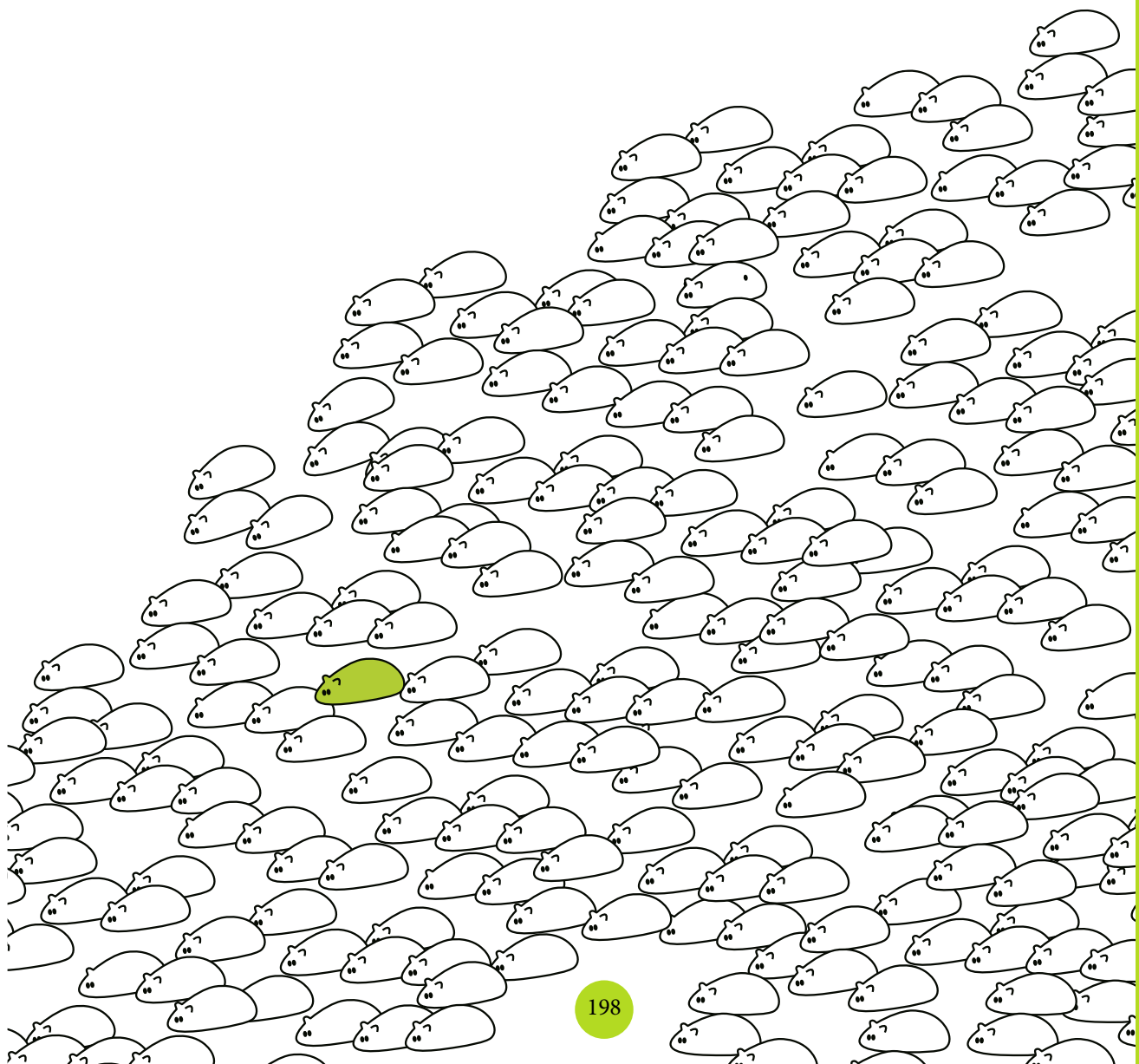


Kertolaskusääntö

Kun A ja B ovat riippumattomia $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$

Kun A ja B ovat riippuvia (yleinen kertosääntö)

$P(\text{ensin A ja sitten B}) = P(A) \cdot P(B, \text{kun A on tapahtunut})$



SI-järjestelmä

Kerrannaisyksiköiden etuliitteet					
Nimi	Tunnus	Kerroin	Nimi	Tunnus	Kerroin
eksa	E	10^{18}	desi	d	10^{-1}
peta	P	10^{15}	sentti	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	milli	m	10^{-3}
giga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^3	piko	p	10^{-12}
hehto	h	10^2	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^1	atto	a	10^{-18}

Lisäyksiköitä			
Suure	Yksikkö	Tunnus	Vastaavuus
aika	minuutti	min	1 min = 60 s
	tunti	h	1 h = 60 min
	vuorokausi	d	1 d = 24 h
	vuosi	a	1 a $\approx$ 365 d
tasokulma	aste	°	1° = 60'
	minuutti	'	1' = 60"
	sekunti	"	
tilavuus	litra	l	1 l = 1 dm ³
massa	tonni	t	1 t = 1000 kg
	atomimassayksikkö	u	1 u = 1,6605402 · 10 ⁻²⁷ kg
pituus	tähtitieteellinen yksikkö	AU	1 AU = 0,1495979 · 10 ¹² m
	parsek	pc	1 pc = 30,85678 · 10 ¹⁵ m

Muuntokertoimia	
Pituus	1" = 1 in = 1 tuuma = 25,40 mm
	1' = 1 ft = 1 jalka = 0,3048 m
	1 yd = 1 jaardi = 0,9144 m
	1 mi = 1 maili = 1,609344 km
	1 mpk = 1 M = 1 meripeninkulma = 1852 m
	1 vv = 1 valovuosi = $9,46055 \cdot 10^{15}$ m
	1 AU = tähtitieteellinen yksikkö = $149,5979 \cdot 10^9$ m
Massa	1 ka = 1 karaatti = 0,2 g
	1 u = $1,6605402 \cdot 10^{-27}$ kg
	1 lb = 1 naula = 0,4536 kg
	1 oz = 1 unssi = 28,35 g
Tasokulma	1° = $2\pi/360$ rad
Pinta-ala	1 b = 1 barn = 10^{-28} m ²
	1 acre = 1 eekkeri = $4,0469 \cdot 10^3$ m ²
Tilavuus	1 l = 1 dm ³ = 0,001 m ³
	1 bbl = 1 barreli = 0,1589873 m ³
	1 gal = 1 gallona (UK) = 4,546092 l
	1 gal = 1 gallona (US) = 3,785412 l
Nopeus	1 solmu = 1 mpk/h = 1,852 km/h = 0,5144 m/s

Luonnonvakioita		
Nimi	Tunnus	Lukuarvo ja yksikkö
putoamiskiihtyvyys	g	9,80665 m/s ²
valon nopeus	c	$2,99792458 \cdot 10^8$ m/s
elektronin massa	m_e	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
protonin massa	m_p	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$ kg
neutronin massa	m_n	$1,6749286 \cdot 10^{-27}$ kg

