

Kurssin peda.net-sivut: <https://peda.net/p/pluoma/opetus/matematiikka/mtjt2233>

Kertausta:



PETRI LUOMA

– Jos osaat derivoida niin osaat luultavasti integroida

– Derivointisäännöt

$$D ax^n + bx + c = anx^{n-1} + b + 0$$

$$D \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = -\sin x, \quad D \tan x = 1 + \tan^2 x$$

$$D a^x = a^x \ln a, \quad D e^x = e^x, \quad D \ln x = \frac{1}{x}$$

$$D u(s(x)) = s'(x) u'(s(x))$$

– Derivaatan käyttö: funktion ääriarvot, kulkukaavio, pienin/suurin arvo

- yleensä
1. Määritä $f'(x)$
 2. Laske nollak. $f'(x) = 0$
 3. Tee merkki- ja kulkukaavio

	-2	1	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗
	maks. kohta	min. kohta	

– Geogebra osan $f'(x)$ -merkinnän:

1. Syöte kenttään $f(x) = x^3 - 2x + 4$
2. — " — $f'(x) \rightarrow$ vastaus Algebra-ikkunaan

Integraalifunktion määritelmä

maanantai 1. huhtikuuta 2019 7:58

- $F(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio, joss $F'(x) = f(x)$. Siis helppo todeta derivoimalla väitetty integ. Funktio
- Jos $F(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio niin $F(x) + C$ on myös (C on vakio)
- Merkitään esim.

$$F(x) = \int f(x) dx \quad \leftarrow \text{muuttuja jonka suhteen integroidaan}$$

vrt.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Esim. a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$ on $f(x) = x^2 + 2$:n integ. funktio, koska

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$$

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + C \rightarrow F'(x) = x^2 + 2$

↑
integ. vakio

$$f(x) = x^2 - 1$$

Määritä $f(x)$:n ääriarvot.

Tarvitaan $f'(x) = f(x) = x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

	-1	1	
$F'(x)$	+	-	+
$F(x)$	↗	↘	↗
	max. kohta		min. kohta

Ääriarvoja ei voi laskea kun $f(x)$:ää ei tiedetä.

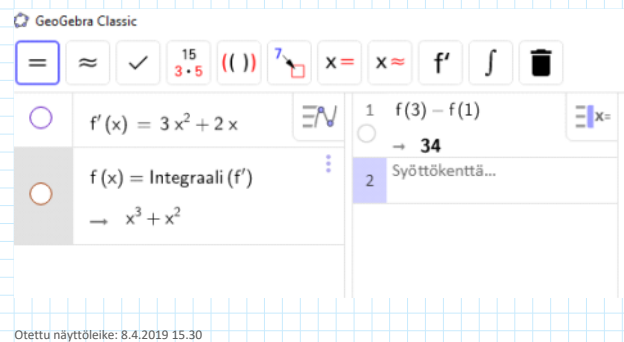
118.

perjantai 5. huhtikuuta 2019 14.11

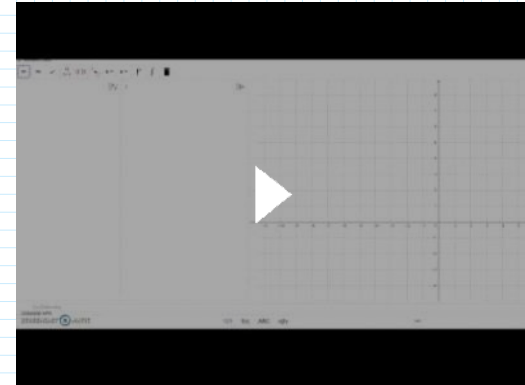
$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

Laske $f(3) - f(1)$.

1. Sijota $f'(x) = 3x^2 + 2x$ Geogebraan
2. Määritä $f(x)$ Geogebraalla.
3. Laske $f(3) - f(1)$ -:-.



[MAA9 teht118](#)



YDINTEHTÄVÄT

- ? 101. Onko funktio F funktion f integraalifunktio? Perustele.
 a) $F(x) = x^3 + x^2 + 2$ ja $f(x) = 3x^2 + 2x$
 b) $F(x) = x^4 + x + 1$ ja $f(x) = 4x^3$
 Ratkaise tehtävä ilman teknisiä apuvälineitä.

skenta

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

106. Osoita, että funktio $F(x) = \frac{1}{5}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + 3x^2 - \frac{2}{5}$ on funktion $f(x) = 2x^5 - 2x^4 + 6x$ integraalifunktio. Määritä myös jokin toinen funktion f integraalifunktio. Ratkaise tehtävä ilman teknisiä apuvälineitä.

Otetty näyttöleike: 8.4.2019 15:34

114. Mitkä funktioista $F_1(x) = \frac{1}{x}$, $F_2(x) = \frac{x+2}{2x}$ ja $F_3(x) = \frac{1-x}{x}$ ovat funktion $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ integraalifunktioita, kun $x > 0$? Esitä, jos mahdollista, funktioiden F_2 ja F_3 lausekkeet muodossa $F_1(x) + C$. Käytä tarvittaessa apuna symbolisen laskennan ohjelmaa.

Otetty näyttöleike: 8.4.2019 15:35

Ratkaise tehtävä ilman teknisiä apuvälineitä.

- ? 102. Määritä funktion $f(x) = 3x^2$
 a) jokin integraalifunktio
 b) kaikki integraalifunktiot
 c) se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta.
103. Määritä jotkin kolme funktion $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ integraalifunktiota.

$$a) F(x) = x^3$$

$$b) F(x) = x^3 + C$$

$$c) F(1) = 3 \rightarrow C = 2$$

$$\rightarrow F(x) = x^3 + 2$$

Polynomifunktion integrointi

maanantai 1. huhtikuuta 2019 8.11

Polyn. funktion integrointikaavat tulevat suoraan derivaattakaavoista:

INTEGRAALILASKENTA

Määritelmä

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ jossa } F'(x) = f(x)$$

Määräämättömään integraaliin liittyviä sääntöjä

- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int g'(x) f(x) dx$ (osittaisintegrointi)
- $\int f'(x) g'(f(x)) dx = g(f(x)) + C$

Integroimiskaavoja

- $\int 0 dx = C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$
- $\int f'(x) (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \quad (f(x) \neq 0)$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$

Otettu näyttöleike: 10.4.2019 7.58

Jos ei kysytä jotain tietyn pisteen kautta kulkevaa $F(x)$:ää niin muista laittaa lausekkeen perään C !

Geogebra laittaa perään $c:n$, jos integroit CAS-ikkunassa, mutta ei Syöttökentässä?!
--> käytä CAS-ikkunaa.

The screenshot shows the GeoGebra Classic interface. The top toolbar includes icons for equals, approximate, check, exponent, parentheses, fraction, multiply, divide, derivative, integral, and delete. The main input area shows $h(x) = \text{Integraali}(x)$ with a result of $\frac{1}{2} x^2$. On the right, the CAS window is open, showing a list of results: 1. Integraali(x) $\rightarrow \frac{1}{2} x^2 + c_1$, and 2. Input... An arrow points from the input field to the CAS window.

↑
syöttökenttä

CAS-ikkuna

Tarkkana merkinnän kanssa:

$$\int x dx \neq \int x dt$$
$$\frac{1}{2} x^2 + C_1 \neq x t + C_2$$

Tasaisesti kiihtyvä liike ($a = \text{vakio}$)

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + s_0$$

deriv. ↓

$$s'(t) = v(t) = v_0 + at$$

deriv. ↓

$$s''(t) = v'(t) = a$$

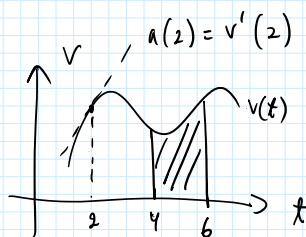
$$s(t) = \int v(t) dt = \int \int a dt = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C_2 = s_0$$

↑ integ.

$$v(t) = \int a dt = at + C = v_0$$

↑ integ.

$$a(t) = a \quad (\text{vakio})$$



$$\int_4^6 v(t) dt = \text{matka}$$

125.

keskiviikko 10. huhtikuuta 2019

9.05

$$\int (6x^2 - 4x + 1) dx = 2x^3 - 2x^2 + x + C$$

(2, 12):

$$2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + C = 12$$

$$16 - 8 + 2 + C = 12$$

$$C = 2$$

$$\text{Vast: } 2x^3 - 2x^2 + x + 2$$

$$a) \int \frac{2x^2 - 18}{x-3} dx, \quad x < 3$$

$$= \int \frac{2(x^2 - 9)}{x-3} dx = \int \frac{2(x-3)(x+3)}{\cancel{x-3}} dx = \int (2x+6) dx$$

$$= x^2 + 6x + C$$

$$b) \int \frac{2x^2 + 5x - 3}{6x - 3} dx = \int \frac{2(x - \frac{1}{2})(x+3)}{3(2x-1)} dx = \int \frac{(2x-1)(x+3)}{3(2x-1)} dx = \int \frac{x+3}{3} dx$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$\text{O.s. nollakke } 2x^2 + 5x - 3 = 0 \\ \vdots \\ x = -3 \text{ tai } \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \int (x+3) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + C \right)$$

$$= \frac{1}{6}x^2 + x + C$$

$$\S. 23 : 122, 124, \dots$$

Korkeamman asteen yhtälö

Normaalimuoto

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0 \text{ ja } n \in \{3, 4, 5, \dots\})$$

Vasen puoli jaetaan tekijöihin

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

Yhtälöllä on n juurta $x_1, x_2, \dots, x_n$, joista osa voi olla keskenään yhtä suuria, osa imaginaarisia luvulukuja.

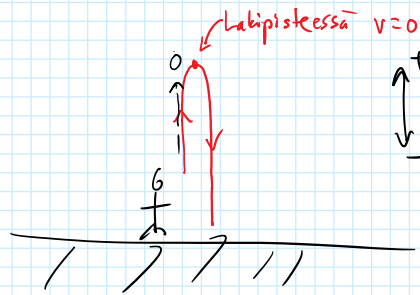
Jos kokonaislukukertoimisella yhtälöllä on rationaalisia juuria, ovat ne muotoa $\frac{p}{q}$, jossa p on jokin a_0 :n tekijä ja q on jokin a_n :n tekijä (luku itse, luku 1 sekä niiden vastahyvut mukaan lukien).

135.

perjantai 5. huhtikuuta 2019 15.08

$$a = -9,81 \text{ m/s}^2$$

$$V_0 = 150 \text{ km/h} \stackrel{:3,6}{=} 41,667 \text{ m/s}$$



$$(1) \quad v(t) = \int a \, dt = at + C_1. \quad \text{Hetkellä } t=0 \quad \text{nopeus} = V_0:$$

$$v(0) = a \cdot 0 + C_1 = V_0 \quad \rightarrow \quad C_1 = V_0$$

$$s(t) = \int at + V_0 \, dt = a \cdot \frac{1}{2} t^2 + V_0 t + C_2. \quad \text{Hetkellä } t=0 \quad s=0$$

$$\rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Siis } s(t) = \frac{1}{2} at^2 + V_0 t. \quad (2)$$

$$\text{Lakipisteessä } v=0 \quad \text{eli} \quad (1) \quad at + V_0 = 0 \quad \rightarrow \quad t = -\frac{V_0}{a} = -\frac{41,667 \text{ m/s}}{-9,81 \text{ m/s}^2} = 4,247 \text{ s}$$

$$\text{Korkeus} = s(4,247) \approx 88,5 \text{ m} \quad \text{Vast: n. } 90 \text{ m}$$

140.

perjantai 5. huhtikuuta 2019 15.12

Yleisen potenssifunktion integrointi

maanantai 1. huhtikuuta 2019 8.11

Kuten derivaatalle, voidaan myös integroinnille yleistää kaava

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad x \neq 0$$

Jos integroitavan funktion määr. joukko koostuu useasta välistä niin tehdään myös integrointi useassa osassa. Käytä eri integ. vakioita.

Esim. $\int \frac{1}{x} dx$. Määritetty kun $x \neq 0$ eli

1. $]-\infty, 0[\rightarrow \ln(-x) + C$

2. $]0, \infty[\rightarrow \ln(x) + D$

Vast:
$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + C, & \text{kun } x < 0 \\ \ln(x) + D, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - 4, \quad x > 0$$

$$F(x) = \int x^{\frac{1}{2}} - 4 \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 4x + C$$
$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 4x + C$$

$$(9, 18): \quad F(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - 4 \cdot 9 + C = 18$$

$$C = 36$$

$$\text{Vast: } F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 4x + 36$$

$$\text{Kun } x > 16, \text{ n\u00f6in } F'(x) = f(x) = \sqrt{x} - 4 > 0$$
$$\rightarrow F(x) \text{ kasvava}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

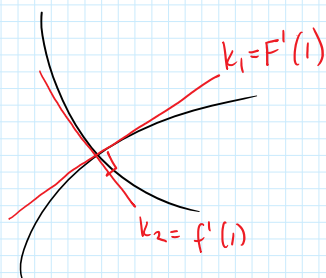
$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$F(1) = \ln 1 + C = 1$$

$$C = 1$$

$$F(x) = \ln x + 1$$

($f(1) = 1$ eli sekän kulkee $(1,1)$ kautta)

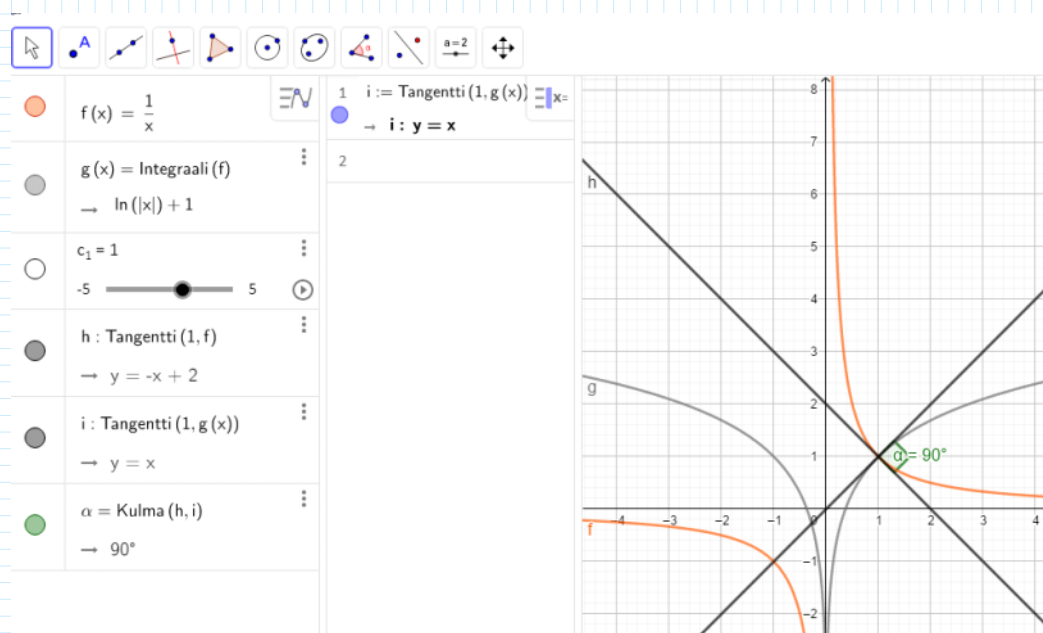


$$F'(x) = f(x) \rightarrow F'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$\text{tuloks} = -1 \quad \square.$$

koht
26.4
24.5.



Otettu näyttöleike: 12.4.2019 10.06

$\downarrow$ oltaava $\downarrow$ ei muutu
 $D \quad u(s(x)) = s'(x) u'(s(x))$

$\rightarrow \int \underline{s'(x)} u(s(x)) dx = U(s(x)) + C$

$\uparrow$
 oltaava,
 häviää
 integroinnissa

Esim. a) $\frac{1}{2} \int \underbrace{2}_{s'} \underbrace{(2x-4)^7}_{u(s(x))} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} (2x-4)^8 + C = \frac{1}{16} (2x-4)^8 + C$

b) $\int \frac{8x}{\sqrt{x^2+3}} dx = \frac{8}{2} \int \underbrace{2x}_{s'} (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} dx = 4 \cdot \frac{3}{1} (x^2+3)^{\frac{1}{2}} + C$

$\uparrow$
 $s' = 2x$

$= \underline{8\sqrt{x^2+3}} + C$

$$f(x) = \int x \sqrt{x^2+4} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int 2x (x^2+4)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\uparrow$$

$$s' = 2x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+4) \sqrt{x^2+4} + C$$

$$F(\sqrt{5}) = \frac{1}{3} (\sqrt{5}^2+4) \cdot \sqrt{\sqrt{5}^2+4} + C = 9$$

$$\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 + C = 9$$

$$C = 0$$

$$\text{Vast: } F(x) = \frac{1}{3} (x^2+4) \sqrt{x^2+4}$$

15 3.5 (()) 7. x = x ≈ f' ∫

5

1 $\int x \sqrt{x^2+4} \, dx$

→ $\frac{1}{3} \sqrt{x^2+4} (x^2+4) + c_1$

2 $\frac{1}{3} \sqrt{\sqrt{5}^2+4} \cdot \sqrt{\sqrt{5}^2+4} + c_1 = 9$

Ratkaise: $\{c_1 = 0\}$

3 Input...

s. 41 : 202, 204, 206
208, 210, ...

$$\int s'(x) u(s(x)) \, dx =$$

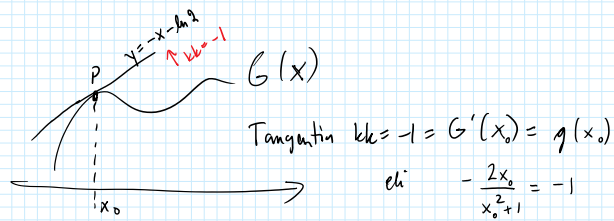
$$U(s(x)) + C$$

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

222. Määritä se funktion $g(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ integraalifunktio, jonka kuvaajalla on tangentinä suora $x + y + \ln 2 = 0$.

$$G(x) = -\int \frac{2x}{x^2+1} dx = -\ln(x^2+1) + C$$

$s(x) = x^2+1$
 $s'(x) = 2x$



s. 42:

$$\int s'(x) u(s(x)) dx = U(s(x)) + C$$

Vast: $G(x) = -\ln(x^2+1) - 1$

x =	x ≈	f'	f	
				$\frac{2x}{x^2+1} = -1$
				Ratkaise: $\{x = 1\}$
				Input...

$$\rightarrow P = \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 - \ln 2 \end{cases} \quad (\text{sijoi ta tang. suoran yhtälöön})$$

$$\rightarrow -\ln(x^2+1) + C = -1 - \ln 2$$

$C = -1$

$$a) \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)' dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C, x > 0$$

$s(x) = \ln x \rightarrow s' = \frac{1}{x}$
 $u(x) = x$

$$b) \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx$$
$$= \int \underset{\substack{\uparrow \\ s'}}{\frac{1}{x}} (\ln x)^{-1} dx = \underline{\underline{\ln (\ln x)}} + C, x > 1$$

$\uparrow$
 $s = \ln x$

$$\int s'(x) u(s(x)) dx = U(s(x)) + C$$

Esim. $\frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{s'} e^{\underbrace{x^2}_{s(x)}} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$s(x) = x^2$
 $u(x) = e^x$

$$-\frac{1}{3} \int -3 \cdot \sin(-3x) dx = \frac{1}{3} \cos(-3x) + C$$

Lause

a) $\int e^x dx = e^x + C$

b) $\int \cos x dx = \sin x + C$

c) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

16. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

229

230

232

233

⋮

$$h(x) = e^{2x}$$

$$H(x) = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$s(x) = 2x$
 $\downarrow$
 $u(x) = e^x$

$$H(0) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} + C = -1$$

$$\frac{1}{2} + C = -1$$

$$C = -\frac{3}{2}$$

x-aks. lp: lauta $y=0$ $\overline{p}$ ratk. x.

$$\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$e^{2x} = 3 \quad | \ln$$

$$2x = \ln 3$$

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Vast: $H(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2},$

x-aks. lp = $\left(\frac{\ln 3}{2}, 0 \right).$

$$f(x) = \sin x \cos x \quad \left(\frac{\pi}{3}, 1 \right)$$

$$1) \quad F(x) = \int \underset{s'}{\cos x} \cdot \underset{s(x)=\sin x}{(\sin x)'} dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C \rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^2 + C = 1$
 $\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + C = 1$
 $C = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$2) \quad F(x) = \frac{1}{2} \int \underset{u(x)=\sin x}{2} \underset{s(x)=2x}{\sin 2x} dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C = -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{7}{8}$$

$-\frac{1}{4} \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + C = 1$
 $-\frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + C = 1$
 $-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 1$
 $C = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

MAOL: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad || :2$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$1. a) \int (x^3 + 3x + 1) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

$$b) \int \frac{2}{x^2} dx = \int 2x^{-2} dx = 2x^{-1} \cdot \frac{1}{-1} + C = -\frac{2}{x} + C$$

$$c) \int \left(\frac{x^3-1}{x}\right) dx = \int \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \ln|x| + C$$

$$2. a) \int \cos(x) dx = \sin x + C$$

$$b) \frac{1}{4} \int 4(4x+1)^5 dx = \frac{1}{4} (4x+1)^6 \cdot \frac{1}{6} + C = \frac{1}{24} (4x+1)^6 + C$$

$$c) \int (e^{2x} - \sqrt{x}) dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$3. \int x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int \underbrace{-2x}_{s(x)} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{-1}{2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + C = -\frac{1}{3} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} + C$$

Sijoita $(0,1)$: $-\frac{1}{3} + C = 1$
 $C = \frac{4}{3}$

$$4. F'(x) = 3x^2 - \left(-\frac{5}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{5}{x^2} \neq f(x)$$

$$G'(x) = 3x^2 - \frac{5}{x^2} = f(x)$$

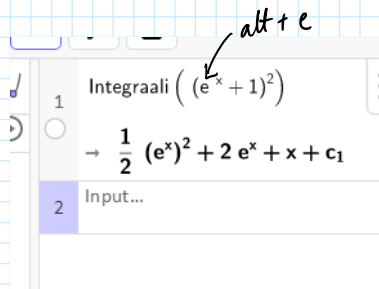
Vast: $G(x)$

b) Kumpi funktioista $F(x) = x^3 - \frac{5}{x}$, $x > 0$ ja $G(x) = \frac{x^4 + x + 5}{x}$, $x > 0$ on funktion $f(x) = 3x^2 - \frac{5}{x^2}$, $x > 0$ integraalifunktio? (3 p.)

$x^3 + 1 + \frac{5}{x}$

Otetu näyttöleike: 29.4.2019 14.56

$$\begin{aligned}
 a) \quad \int (e^x + 1)^2 dx &= \int (e^{2x} + 2e^x + 1) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx + 2 \int e^x dx + \int 1 dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x + C
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 b) \quad \int e^x (e^x + 1)^3 dx &= \frac{1}{4} (e^x + 1)^4 + C \\
 \underbrace{e^x}_{s'(x)} &= e^x + 1 \\
 s(x) &= e^x + 1 \\
 s'(x) &= e^x \\
 u(x) &= x^3 \rightarrow V(x) = \frac{1}{4} x^4 + C
 \end{aligned}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad - \int -\sin x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{(\cos x)^2} dx &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C = -\frac{1}{3} (\cos x)^3 + C \\
 s(x) &= \cos x \\
 s'(x) &= -\sin x \\
 u(x) &= x^2 \rightarrow V(x) = \frac{1}{3} x^3 + C
 \end{aligned}$$

S. 50-51

236.

maanantai 29. huhtikuuta 2019 15.47

$$a) \int \frac{e^x}{4} dx = \frac{1}{4} \int e^x dx = \frac{1}{4} e^x + C$$

$$b) \int e^{\frac{x}{4}} dx = 4 \int \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}x} dx = 4 e^{\frac{1}{4}x} + C$$

$s(x) = \frac{1}{4}x$
 $s'(x) = \frac{1}{4}$

$$c) \int \frac{e^{-4x}}{-4} dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-4} \int -4 e^{-4x} dx = \frac{1}{16} e^{-4x} + C$$

$$= \frac{1}{16 e^{4x}} + C$$

$$237. a) \int (e^x)^2 dx = \frac{1}{2} \int 2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Eksponentti- ja trigonom. funktioiden integrointi

maanantai 1. huhtikuuta 2019

8.11

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Esim. $\int x e^{x^2} dx$

248.

torstai 18. huhtikuuta 2019 8.41

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$$

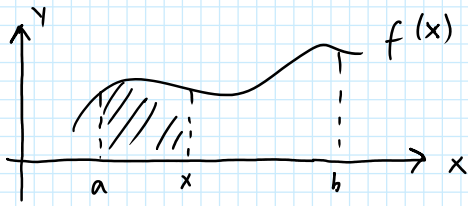
255.

torstai 18. huhtikuuta 2019

8.42

$$f(x) = \sin x \cos x$$

$$F\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$



• $A(x)$ = pinta-ala a :sta x :ään (kintä), siis a pysyy paikollaan ja x muuttuu

• $A(x)' = f(x) \rightarrow A(x) = F(x) + C$

Koska $A(a) = 0 \rightarrow C = -F(a) \rightarrow$

pinta-ala välillä $a \dots b = \boxed{F(b) - F(a)}$

$$f(x) = \frac{1}{2x+4}, \quad x > -2$$

$$\text{väli: } [0, 6]$$

$$F(x) = \int \frac{1}{2x+4} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2}_{\substack{s=2x+4 \\ s'=2}} (2x+4)^{-1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2x+4) + C$$

$$\text{alku } 0 \dots 6 = F(6) - F(0) =$$

$$\frac{1}{2} \ln(16) + \cancel{C} - \frac{1}{2} \ln(4) - \cancel{C} =$$

$$\frac{1}{2} \ln 16 - \frac{1}{2} \ln 4 =$$

$$\ln \sqrt{16} - \ln \sqrt{4} = \ln 4 - \ln 2$$

$$= \ln \frac{4}{2} = \ln 2$$

S. 63: 305

309

311

314

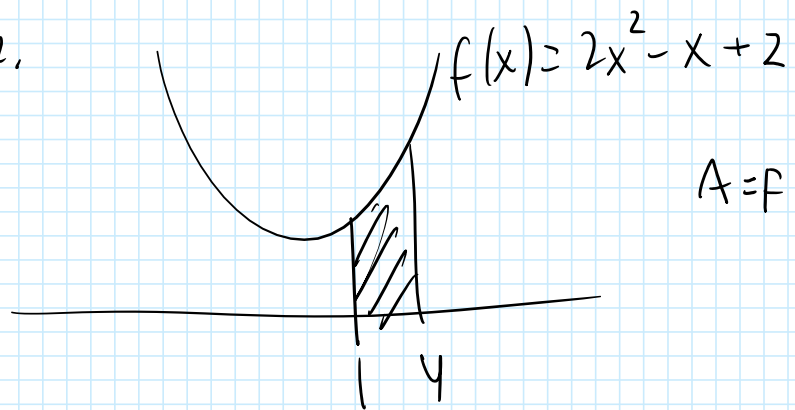
314.

perjantai 3. toukokuuta 2019 10.43

$$1. f' = 4x - 1, \quad f(1) = 3$$

$$f = 2x^2 - x + C \rightarrow C = 2$$

2,



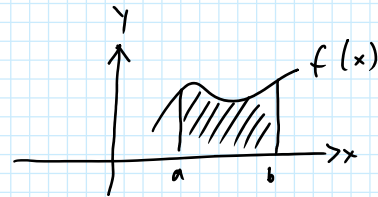
$$A = F(4) - F(1)$$

- Määritelmä: määrätty integraali

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left. F(x) \right|_a^b$$

- Jos $f(x)$ jatkuva ja ei-negat. välikä $[a, b]$ niin

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



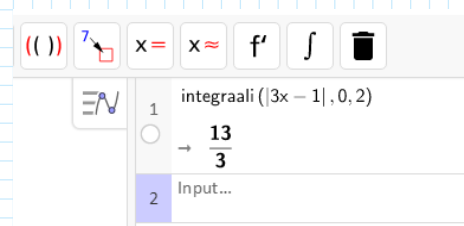
- $f'(x)$ = muutosnopeus $\rightarrow$ $f(x)$:n muutos $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

Esim. $v(t) = 2 + 1,5t \rightarrow$ kuljetun matkan $0 \dots 5s =$

$\uparrow v_0 (\frac{m}{s})$ $\uparrow a (\frac{m}{s^2})$

$$\int_0^5 2 + 1,5t dt = \int_0^5 2t + 0,75t^2 = \dots (m)$$

- Geogebra: "integraali (funktio, alkuarvo, loppuarvo)"



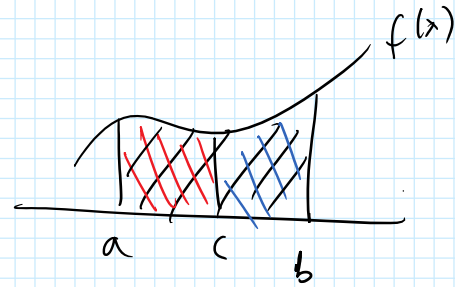
$$\bullet \int_a^b f + g \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_a^b g \, dx$$

$$\bullet \int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\bullet a < c < b : \int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

$$\bullet \int_a^b f \, dx = - \int_b^a f \, dx$$

$$\bullet \int_a^a f \, dx = 0$$



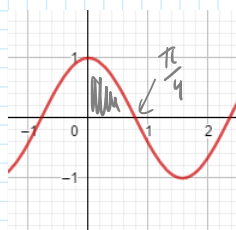
$$a) \int_0^1 x(\sqrt{x}-1) dx \quad b) \int_1^e \frac{2x+2}{x} dx \quad c) \int_0^2 12x \sqrt{2x^2+1} dx$$

$$a) \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x) dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{2}{5} \cdot 1^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) - (0 - 0) = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$$

$$b) \int_1^e \left(2 + \frac{2}{x} \right) dx = \left[2x + 2 \ln x \right]_1^e = (2e + 2 \ln e) - (2 \cdot 1 + 2 \ln 1) = 2e + 2 - 2 = 2e$$

$$c) \int_0^2 12x (2x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (2x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{3} (2 \cdot 2^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (2 \cdot 0^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = 52$$

S. 77-78 (ei 327)



Otettu näyttöleike: 6.5.2019 15.20

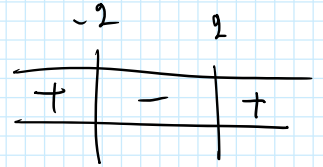
334. b

keskiviikko 8. toukokuuta 2019 8.12

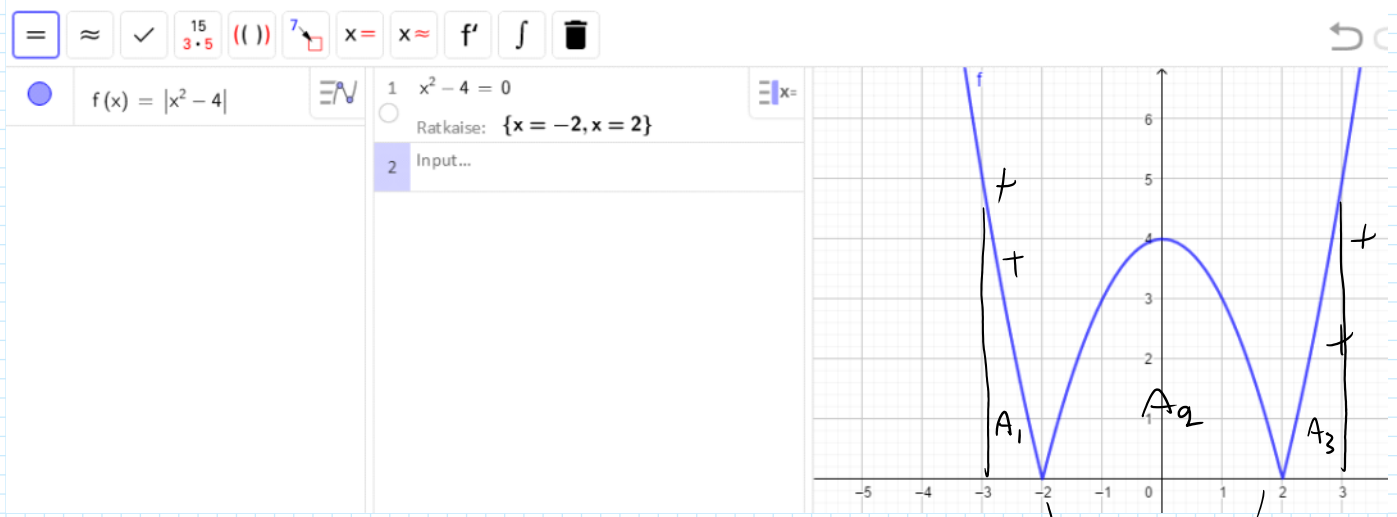
$$\int_{-3}^3 |x^2 - 4| dx$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$



GeoGebra Classic



$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \\ -(x^2 - 4), & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$A_1: \int_{-3}^{-2} x^2 - 4 dx = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{3}x^3 - 4x = \left(\frac{1}{3}(-2)^3 - 4 \cdot (-2) \right) - \left(\frac{1}{3}(-3)^3 - 4 \cdot (-3) \right) = \frac{7}{3}$$

$$A_2: \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx = \int_{-2}^2 -\frac{1}{3}x^3 + 4x = \frac{32}{3}$$

$$A_3: \int_2^3 x^2 - 4 dx = \int_2^3 \frac{1}{3}x^3 - 4x = \frac{7}{3}$$

$$\text{yht: } \frac{46}{3} = 15 \frac{1}{3}$$

3

4 $\int_{-3}^3 f(x) \, dx$



$\Rightarrow \frac{46}{3}$

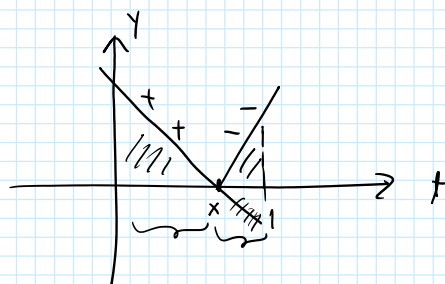
5

$$f(x) = \int_0^1 |x-t| dt, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(t) = x-t$$

$$x-t=0$$

$$t=x$$

$$|x-t| = \begin{cases} x-t, & t < x \\ -(x-t), & t > x \end{cases}$$



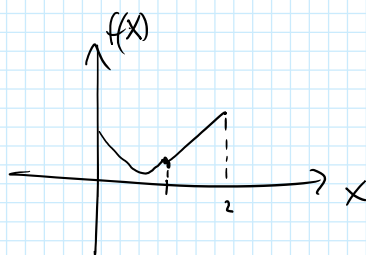
1. Jos $x \in [0, 1]$ niin $|x-t|$ on pötköinen kahdella lausekkeella:

$$f(x) = \int_0^x x-t dt + \int_x^1 -(x-t) dt = \int_0^x xt - \frac{1}{2}t^2 + \int_x^1 -xt + \frac{1}{2}t^2$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{2}$$

2. $x \in [1, 2]$: $f(x) = \int_0^1 x-t dt$

$$= \int_0^1 xt - \frac{1}{2}t^2 = x - \frac{1}{2}$$



Summa ja pieni: vähin päätap. tai deriv. nolatti.

0...2

$$D x^2 - x + \frac{1}{2} = 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 0^2 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leftarrow \text{summa}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \leftarrow \text{pieni}$$

330.

keskiviikko 8. toukokuuta 2019 8.40

330. Määritä vakio A siten, että $\int_{-1}^0 (e^x + Ax) dx = 0$. [S91/3a]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 e^x + A \frac{1}{2} x^2 &= \left(e^0 + \frac{1}{2} A \cdot 0^2 \right) - \left(e^{-1} + \frac{1}{2} A \cdot (-1)^2 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{2} A = 0 \\ -\frac{1}{2} A &= \frac{1}{e} - 1 \quad \parallel \cdot (-2) \\ A &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

5. 78 $\rightarrow$

$$2 \int_2^4 \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \int_2^4 e^{\frac{x}{2}}$$

Kaavaeditorin kehitysversio

- "Lisää kaava" -napin alta löydät yleisimpiä matematiikassa, fysiikassa ja kemiassa käytettäviä merkintöjä. Lisäksi erikoismerkkejä voi käyttää kaavan kirjoittamiseen.
- Kaavoja voi rakentaa klikkaamalla valikon merkintöjä ja/tai kirjoittamalla LaTeXia.
- Editorin vastauskenttään voi kirjoittaa tekstiä ja kaavoja sekä lisätä kuvia.

Liitä kuva leikep

Kirjoita kaava

Kaavassa

Jakoviiva

Kertomerkki

EkspONENTTI

Sulje kaava

Lisää kaava seu

Vastaus 1

$$\int_2^4 e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \int_2^4 e^{\frac{x}{2}} = \dots$$

333. a, b

keskiviikko 8. toukokuuta 2019 9.04

$$\text{b) } \int_{-1}^1 x \sin^2 x \, dx + \int_{-1}^1 x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int_{-1}^1 x \sin^2 x + x \cos^2 x \, dx$$

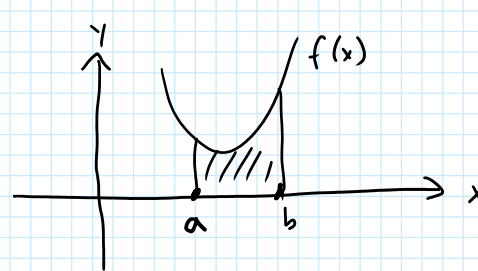
$$= \int_{-1}^1 x \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} \, dx = \int_{-1}^1 x \, dx \dots$$

$$\text{c) } \int_0^1 (x-1) \, dx + \int_0^1 (x^2-x) \, dx + \int_0^1 (x^3-x^2) \, dx + \dots + \int_0^1 (x^9-x^8) \, dx$$

Otettu näyttöleike: 8.5.2019 9.10

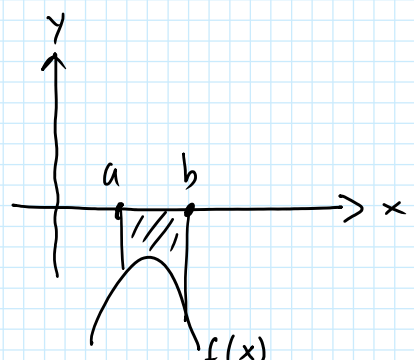
$$\int_0^1 \cancel{x} - 1 + \cancel{x^2} - \cancel{x} + \cancel{x^3} - \cancel{x^2} \dots + x^9 \, dx = \int_0^1 -1 + x^9 \, dx$$

• Jos $f(x) > 0$:



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

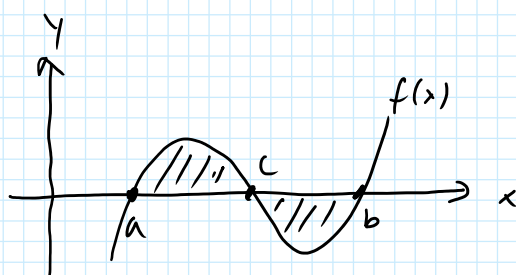
• Jos $f(x) < 0$:



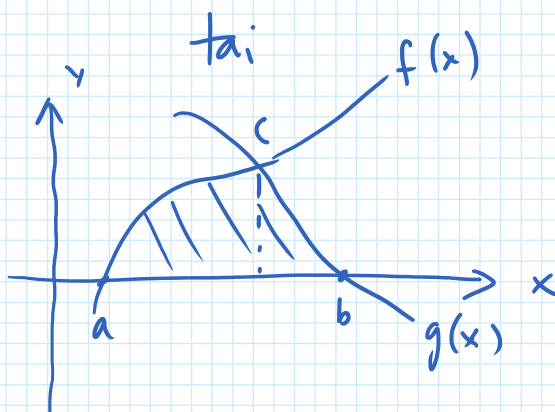
$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

} $A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

• Moni - osainen : integroi osissa



$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$

HUOM! HUOM! HUOM!

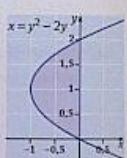
perjantai 10. toukokuuta 2019 9.34

Esimerkki 4 Laske käyrän $x = y^2 - 2y$ ja y-akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.

Aiemmissa esimerkeissä alue on sijainnut käyrän ja x-akselin välissä. Nyt alue on käyrän ja y-akselin välissä.

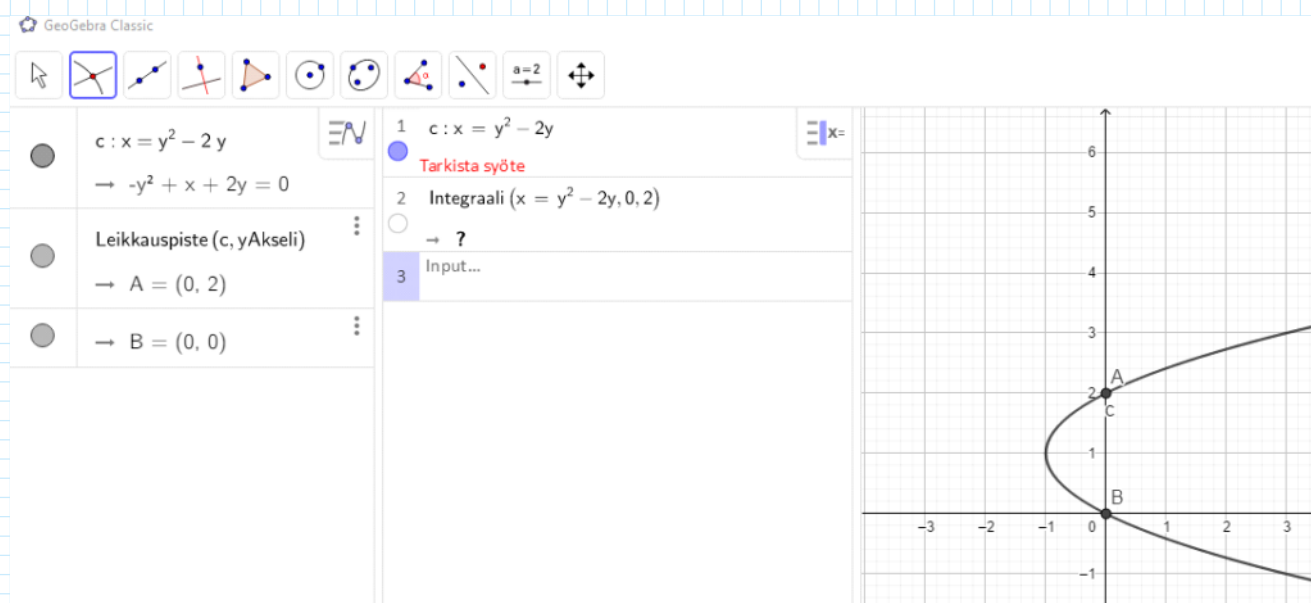
Käännetään kuva niin, että y-akseli tulee vaakasuoraan ja x-akseli pystysuoraan. Kyseessä on peilaus suoran $y = x$ suhteen.



Geogebra pöytä "kyljellä" olevan käyrän ja laskee sen ja y-akselin leikk. pisteet

MUTTA EI INTEGROI!

Koska kyseessä ei ole funktio.



411.

keskiviikko 8. toukokuuta 2019 7.48

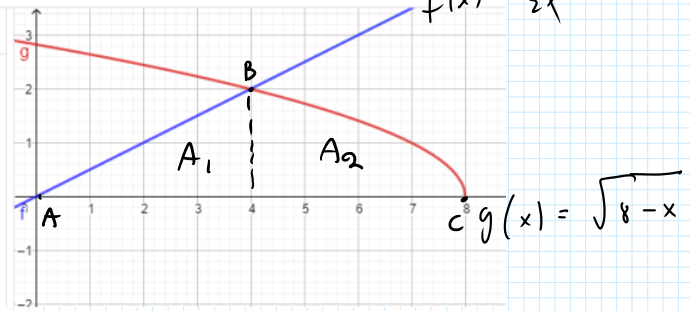
GeoGebra Classic



1 Input...

$g(x) = \sqrt{8-x}$

$f(x) = \frac{1}{2}x$



Leikkapistot :

$$A \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

B

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \sqrt{8-x} \end{cases} \quad x \leq 8 !$$

$$C \quad \begin{cases} \sqrt{8-x} = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{8-x} \quad | ()^2$$

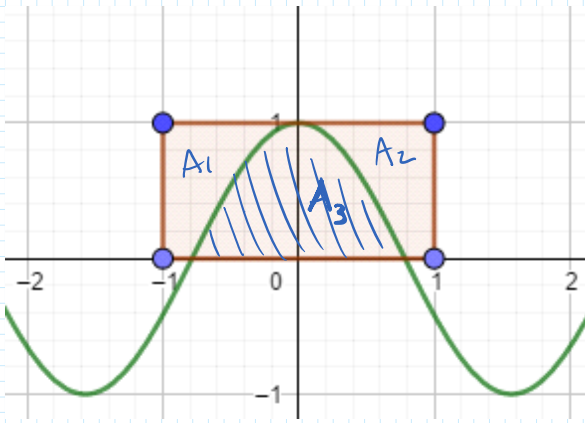
$$\frac{1}{4}x^2 = 8-x$$

$$x = 4 \quad (\text{ja ... ei kelpaa})$$

$$A_1 = \int_0^4 \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 4$$

Voi laskea geom.

$$A_2 = - \int_4^8 \sqrt{8-x} \, dx = - \int_4^8 \frac{2}{3} (8-x)^{\frac{3}{2}} = - \frac{2}{3} \left((8-x)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_4^8 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 4 \sqrt{4} = \frac{16}{3}$$



$$A_1 + A_2 = A_3$$

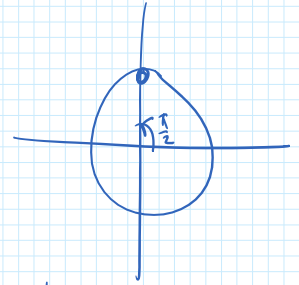
$$\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$$



$$2x = \pm \frac{\pi}{2} + n2\pi \quad || :2$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + n\pi$$



$$A_3 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2 \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 2x = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Kokonaismuotoon $A = 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow A_3$ on puolet A :sta.

Perusyhtälöitä

24. $\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + n2\pi \vee x = \pi - y + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$

25. $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$

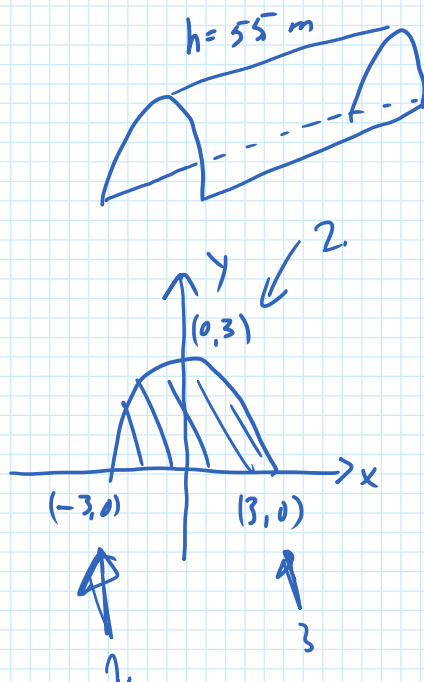


26. $\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

418.

perjantai 10. toukokuuta 2019 8.50

40 k93

Lierion $V = Ah$

Panna belin yhtälö

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} 1. & \quad 0 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \\ 2. & \quad 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 3 \\ 3. & \quad 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu Geogebraalla:

Integroidaan $y = -1/3x^2 + 3$, välillä -2...2:

Geogebra Algebra View showing the solution of the system of equations:

- $0 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c$
 $\rightarrow 0 = 9a - 3b + c$
- $3 = c$
 $\rightarrow 3 = c$
- $0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$
 $\rightarrow 0 = 9a + 3b + c$

Result set: $\{ \$1, \$2, \$3 \}$

4 Ratkaise:
 $\left\{ \left\{ a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = 3 \right\} \right\}$

5 Input...

Geogebra Calculator View showing the integration:

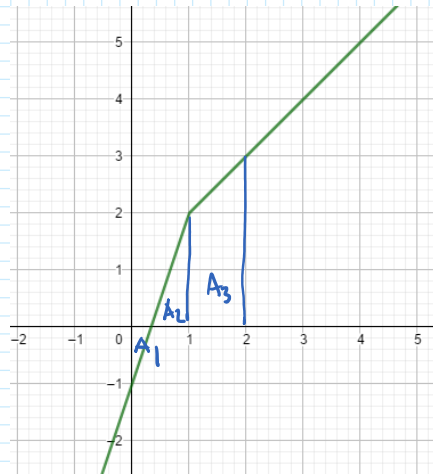
5 Integraali $\left(-\frac{1}{3}x^2 + 3, -3, 3 \right)$
 $\rightarrow 12$

Vastaus: Tilavuus $V = 55 \text{ m} \cdot 12 \text{ m}^2 = 660 \text{ m}^3$.

423.

perjantai 10. toukokuuta 2019 8.59

$$f(x) = 2x - |1-x|, \quad x \in [0, 2]$$



$$1-x=0 \\ x=1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - (1-x), & x < 1 \\ 2x + (1-x), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$$

5, 93
↓

$$A_1 = - \int_0^{\frac{1}{3}} 3x-1 \, dx = \dots = \frac{1}{6} \quad (\text{tai kolmion ala})$$

Nollak. $3x-1=0$
 $x=\frac{1}{3} \quad \cdot!$

$x+1=0$
 $x=-1 \quad \nwarrow$

$$A_2 = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

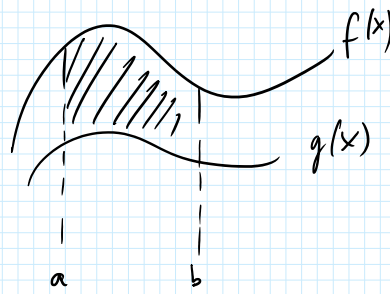
$$A_3 = \int_1^2 x+1 \, dx = \dots = \frac{5}{2}$$

$$V: \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{10}{3}$$

$$\underline{\underline{=}}$$

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

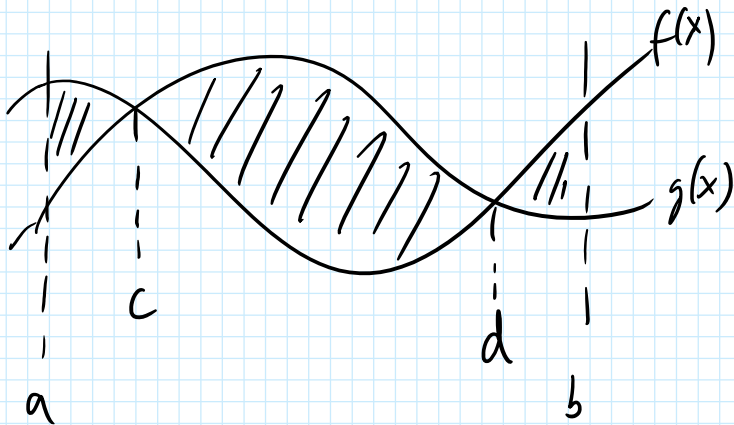
↑
"ylempi - alempi",
riippumatta siitä
missä x-akseli on.



Jos ero on väärinpäin $\rightarrow$ integr. arvo negat. $\rightarrow$ ilmoita vastaus erikseen ja jätä miinusmerkki pois

1. Ratkaise leikk.pisteet
2. Integroi osissa

Esim. Määritä A kun $x \in [a, b]$.



1. Laske c ja d

2. $A_1 = \int_a^c f(x) - g(x) dx$

$$A_2 = \int_c^d g(x) - f(x) dx$$

$$A_3 = \int_d^b f(x) - g(x) dx$$

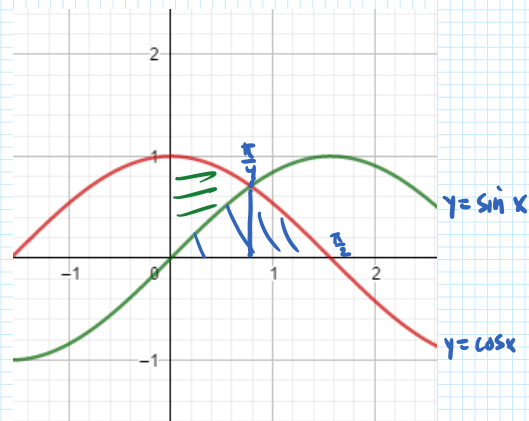
$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$x=0 \quad \begin{aligned} \sin 0 &= 0 \quad (A) \\ \cos 0 &= 1 \end{aligned}$$

$$C: \quad \begin{aligned} \cos x &= 0 \\ \cos x &= \cos \frac{\pi}{2} \\ x &= \pm \frac{\pi}{2} \quad (k \in 2\pi) \end{aligned}$$

$$B \quad \begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



b) Vihreä A:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x \, dx \\ &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - (\sin 0 + \cos 0) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (0 + 1) \\ &= \underline{1 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$a) \text{ Sininen A: } \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[\sin x \right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

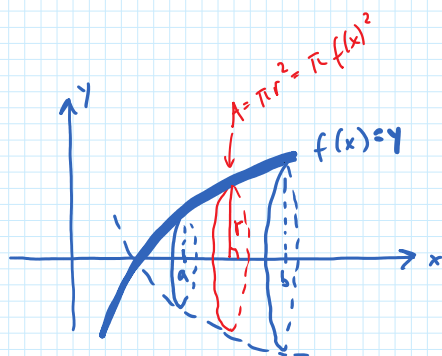
$$\begin{aligned} &= (-\cos \frac{\pi}{4}) - (-\cos 0) + (\sin \frac{\pi}{2}) - (\sin \frac{\pi}{4}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2 - \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

S. 102:
parillisia

Käsitellään vain kaksi tapusta:

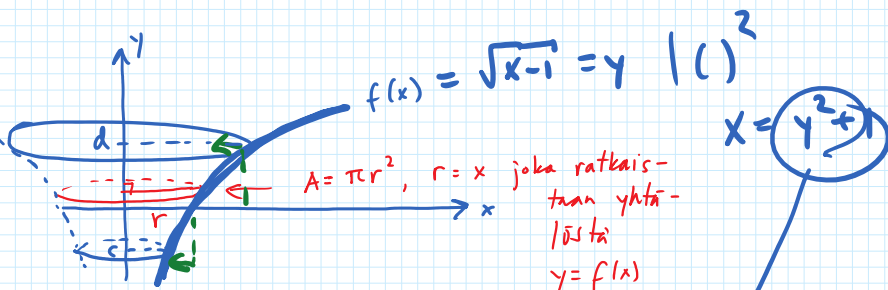
a) käyvä $y=f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri

b) käyvä $y=f(x)$ pyörähtää y -akselin ympäri



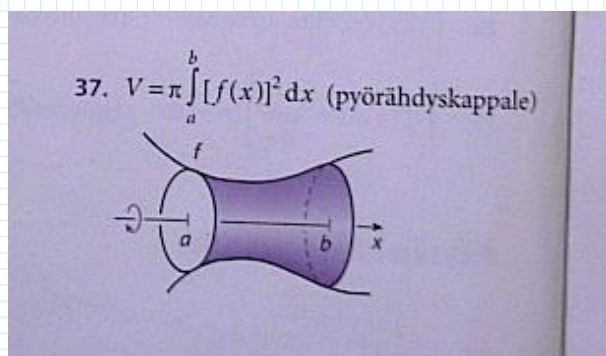
Tapaus a.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

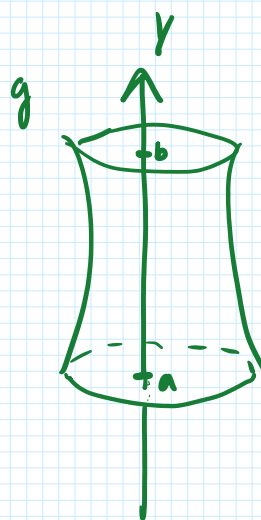


Tapaus b.

$$V = \pi \int_c^d r(y)^2 dy$$



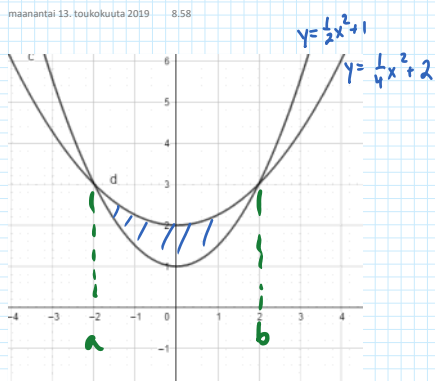
Otettu näyttöleike: 20.5.2019 14:47



$$V = \pi \int_a^b g(y)^2 dy$$

509.

maanantai 13. toukokuuta 2019 8:58



Oletettu näytölle: 13.5.2019 9:00

Leikk. pistet: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 2 \end{cases}$
 $x = \pm 2$

1 $c: y = \frac{1}{4}x^2 + 2$
 $\rightarrow c: y = \frac{1}{4}x^2 + 2$

2 $d: y = \frac{1}{2}x^2 + 1$
 $\rightarrow d: y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

3 {c, d}
☐ Ratkaise:
 $\{\{x = 2, y = 3\}, \{x = -2, y = 3\}\}$

4 Input...

Oletettu näytölle: 20.5.2019 14:51

Ulompi $V_1 = \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2 dx$

Sisempi $V_2 = \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2 dx$

$$V_1 = \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{16}x^4 + x^2 + 4\right) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 4x\right) dx$$

$$= \pi \cdot \frac{332}{15}$$

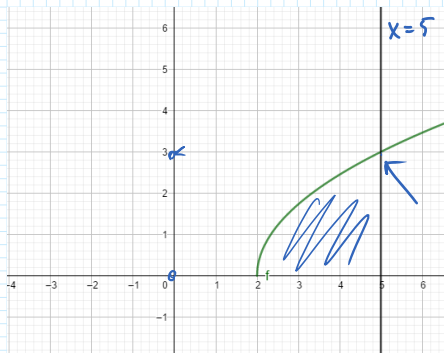
4 $\int_{-2}^2 \pi \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2 dx$
 $\rightarrow 332 \cdot \frac{\pi}{15}$
 5 Input...

$$V = V_1 - V_2 = \frac{48}{5}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1\right) dx =$$

$$= \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x\right) dx$$

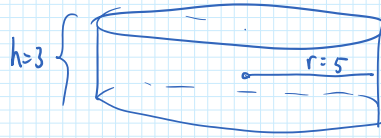
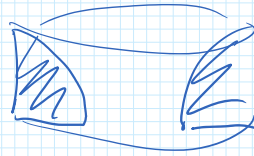
$$= \pi \cdot \frac{188}{15}$$



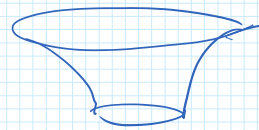
Oletettu näytöleike: 13.5.2019 9:16

$$\text{lp: } \begin{cases} x=5 \\ y=\sqrt{3x-6} = \sqrt{3 \cdot 5 - 6} = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{3x-6} \xrightarrow{(\cdot)^2} y^2 = 3x-6 \rightarrow x = \frac{1}{3}y^2 + 2$$

leikk. piste
(5,3)

Ympyrä pohja,
suora särmä
 $V_1 = Ah = \pi \cdot 5^2 \cdot 3$
 $= 75\pi$



$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}y^2 + 2 \right)^2 dy \\ &= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}y^4 + \frac{4}{3}y^2 + 4 \right) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5}y^5 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}y^3 + 4y \right]_0^3 \\ &= \frac{147}{5}\pi \end{aligned}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{228}{5}\pi$$

508 } x-akseli
510 }

514 } y-akseli
515 }

$$y = 2 \cdot \ln(x+1)$$

$$\frac{y}{2} = \ln(x+1)$$



$$e^{\frac{y}{2}} = x+1$$

$$x = e^{\frac{y}{2}} - 1$$

Integ.rajat: $x=0$

$$y = 2 \cdot \ln(0+1) = 2 \ln 1 = 0$$

$$x = e - 1$$

$$y = 2 \ln(e-1+1) = 2 \cdot \ln e = 2$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (e^{\frac{y}{2}} - 1)^2 dy = \pi \int_0^2 e^y - 2e^{\frac{y}{2}} + 1 dy \\ &= \pi \int_0^2 e^y - 1 dy - 2\pi \int_0^2 \frac{1}{2} e^{\frac{y}{2}} dy \\ &= \pi \left[e^y - y \right]_0^2 - 4\pi \left[e^{\frac{y}{2}} \right]_0^2 = \pi (e^2 - 4e + 5) \approx 4,76 \end{aligned}$$

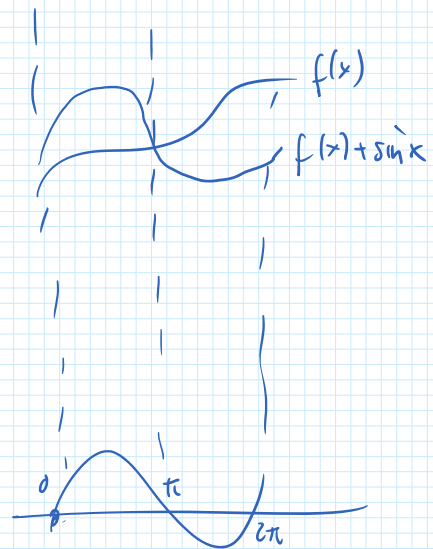
$s(x) = \frac{1}{2}y, s' = \frac{1}{2}$

8. Yritys valmistaa pallon muotoisia kaasusäiliöitä, joiden tilavuuden on tarkoitus olla 5000 litraa. Enintään 65 litran poikkeama jompaankumpaan suuntaan hyväksytään. Laske tavoitteena oleva säiliön halkaisija ja virherajojen mukaiset halkaisijat. Millä todennäköisyydellä valmistusprosessissa syntyy hyväksyttäviä säiliöitä, kun halkaisijoiden poikkeamat tavoitteesta ovat normaalisti jakautuneita parametrein $\mu = 0$ cm, $\sigma = 1,75$ cm?
9. Käyrän $y = 2 \ln(x+1)$, $0 \leq x \leq e-1$, pyörähtäessä y -akselin ympäri syntyy suppilomainen astia. Laske sen tilavuus. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.
10. Tulta syöksevät lohikäärmeet Draco ja Nid vartioivat solaa, ja solassa kulkeva jou-tuu menemään niiden välistä. Lohikäärmeiden välinen etäisyys on 200 kyynärää. Tulisuihkun vaikutus on suoraan verrannollinen lohikäärmeen kokoon ja kääntäen verrannollinen lohikäärmeestä mitatun etäisyyden kolmanteen potenssiin. Draco on kaksi kertaa niin suuri kuin Nid. Mistä kohtaa lohikäärmeiden välistä kulkijan on vaellettava, jotta hän selviäisi mahdollisimman vähällä? Anna vastaus kyynärän tarkkuudella.

KÄÄNNÄ!

MAA10 LASKIN OSIO
VALITSE KOLME (3) TEHTÄVÄÄ.

4. Määritä funktion $f(x) = 3ax^2 - 4x - a$ se integraalifunktio, jolla on nollakohdat $x = -1$ ja $x = 2$.
5. Aluetta rajaavat käyrät $y = x^3 + 1$ ja $y = x^3 - 2$ ja suorat $x = 1$ sekä $x = 5$. Laske alueen pinta-ala.
6. Käyrät $y = \cos x$ ja $y = \cos 2x$ rajaavat välillä $\left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$ kaksiosaisen alueen. Laske alueen pinta-ala.
7. Käyrien $x = y^2 - 2$ ja $x = 2$ rajaama alue pyörittää suoran $x = 2$ ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.



5. Käyrän $y = \frac{x^2}{3} - 3$ ja suoran $y = 1$ rajaama alue pyörittää y -akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

6. Funktio $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva. Laske käyrien $y = f(x)$, $y = f(x) + \sin(x)$ ja suorien $x = 0$, $x = 2\pi$ rajaaman alueen pinta-ala. k11:10
7. Tunnelin poikkileikkaus on alaspäin aukeavan paraabelin muotoinen. Tien leveys on 10 m ja tunnelin poikkileikkauksen ala on $25,0 \text{ m}^2$. Määritä tunnelin korkeus senttimetrin tarkkuudella. yo k10

$$A_1 = \int_0^{\pi} (f(x) + \sin x - f(x)) dx$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (f(x) - (f(x) + \sin x)) dx$$