

Vastaa viiteen tehtävään. Laita laskujen välivaiheita näkyviin ja ilmoita vastaus järkevällä tarkkuudella yksiköineen.

1. Todista väite:

Jos luku a on irrationaaliluku, niin myös luku $\frac{a+1}{2a+1}$ on irrationaaliluku.

s71

2. Muodosta alla olevien lauseiden totuustaulukot.

a) $(\neg A \vee B) \rightarrow A$

b) $(A \vee C) \rightarrow (B \vee \neg C)$

311,312

3. Selitä seuraavat käsitteet, voit käyttää myös esimerkkejä:

a) tautologia

(1 p.)

Vastaus: Lause, joka on aina tosi

b) $pyj(a,b)$

(1 p.)

Vastaus: pienin luku, joka on jaollinen sekä a :lla että b :llä

c) konjunktio

(1 p.)

Vastaus: = JA, esitä totuustaulukko

d) kontrapositiotodistus

(3 p.)

Vastaus: Ol. A , V . B . Tod: $ei - B \rightarrow ei - A$, osoita loog. ekvivalentiksi $A \rightarrow B$ kanssa.

4. Paavo kysyi ystävältään Kallelta: "Ketä tytöistä Saara, Marjut ja Tiina oikein rakastat?"

Kalle mietti hetken ja vastasi: "Saat itse päätellä seuraavien vihjeiden avulla." Ja Kalle antoi vihjeet:

(1) Rakastan ainakin yhtä kolmikosta.

(2) Jos rakastan Saaraa, mutten Tiinaa, niin rakastan myös Marjutia.

(3) Rakastan joko Tiinaa ja Marjutia molempia tai en rakasta kumpaakaan.

(4) Jos rakastan Tiinaa, niin rakastan myös Saaraa.

Paavo mietti hetken ja vastasi Kallelle: "Ahaa, nyt minä tiedän ketä sinä rakastat."

Mikä oli Paavon Vastaus: eli ketä Kalle rakasti?

Ratkaisu: A:"Kalle rakastaa Saaraa"; B:"Kalle rakastaa Marjutia"; C:"Kalle rakastaa Tiinaa"

(1) $A \vee B \vee C$; (2) $(A \wedge \neg C) \rightarrow B$; (3) $(C \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B)$; (4) $C \rightarrow A$

A	B	C	(1)	$A \wedge \neg C$	(2)	$C \wedge B$	$\neg C \wedge \neg B$	(3)	(4)	(1) ja (2) ja (3) ja (4)
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1

Kalle rakastaa kaikkia kolmea tyttöä.

Vastaus: Kalle rakastaa kaikkia kolmea tyttöä.

5. a) Osoita, että $20 \equiv 8 \pmod{4}$

(1 p.)

Ratkaisu: $20 - 8 = 12 = 3 \times 4$

b) Onko luku $46^{78} + 89^{67}$ jaollinen viidellä?

(2 p.) *yo k2011:12*

c) Määritä luvun $3^{91} \cdot 2 + 7^{11} \cdot 5$ viimeinen numero (2 p.)

Ratkaisu: $3^{91} \cdot 2 + 7^{11} \cdot 5 \equiv (3^2)^{45} \cdot 3 \cdot 2 + (7^2)^5 \cdot 7 \cdot 5 \equiv (-1)^{45} \cdot 6 + (-1)^5 \cdot 35 \equiv -6 - 35 \equiv -41 \equiv 9 \pmod{10}$

Luvun $3^{91} \cdot 2 + 7^{11} \cdot 5$ viimeinen numero on 9.

6. a) Kirjoita jakolaskun $54321 : 123$ jakoyhtälö. (1 p.)

Ratkaisu: $54321 = 441 \times 123 + 78$

b) Onko luku 1159 alkuluku? (1 p.)

Ratkaisu: ei, koska jaollinen 19:lla. Esim. kokeilemalla alkulukuja 3, 5, ..., 34 asti

c) Osoita, että luku $n(n^2 + 2)$ on aina jaollinen luvulla kolme, kun n on kokonaisluku. (4 p.)
kirja 182

7. a) Mitä tarkoittavat lukujen a ja b **syt(a, b)** ja **pyj(a, b)**. (2 p.)

Ratkaisu: syt = lukujen suurin yhteinen tekijä, pyj = pienin yhteinen jakaja = pym = pienin yhteinen monikerta

b) Määritä Eukleideen algoritmin avulla syt(19941,19665) ja sen avulla pyj(19941,19665). (4 p.)

Ratkaisu:

$$19941 = 1 \cdot 19665 + 276$$

$$19665 = 71 \cdot 276 + 69$$

$$276 = 4 \cdot 69$$

$$\text{syt}(19941, 19665) = 69$$

$$\text{pyj}(19941, 19665) = \text{tulo/syt} = 19941 \times 19665 / 69 = 5683185$$