

MALLIKOE

MAA13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi

III/2010

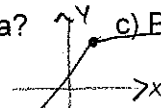
Vastaa viiteen tehtävään. Laita laskujen välivaiheita näkyviin ja ilmoita vastaus sopivalla tarkkuudella yksiköineen.

1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{kun } x \leq 2 \rightarrow 5 \\ x + 3, & \text{kun } x > 2 \rightarrow 5 \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 3) = 5$
 on jatkuva.

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-1-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x-2)}{x-2} = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$
 ei de deriv. kohdassa $x=2$

a) Onko funktio jatkuva? b) Onko funktio derivoituva kaikilla x :n arvoilla?



c) Piirrä funktio.

2. Määritä ykköstehtävän funktion se integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(-1, 5)$ kautta.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - x + C, & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 3x + D, & x > 2 \end{cases}$$

3. a) Osoita, että funktiolla $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ on käänteisfunktio.

$f(-1) = \frac{3}{2} + 1 + 4 + D = 5 \rightarrow D = -\frac{3}{2}$

b) Määritä $(f^{-1})'(1)$.

$f'(x) = -x(x^2 + 1)e^{-x} \leq 0$ aid. vähenen kirj 157

c) Missä kohdissa käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva?

b) $f^{-1}(1) = 0$ koska $f(0) = 1$
 siis $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{-0} = -1$

c) ei deriv. kun $f'(x) = 0$ eli kun $x = 1$. Kääntesf.

4. a) Osoita, että yhtälöllä $\sqrt{x^2 + 4} = 2^x$ on ainakin yksi juuri (Vinkki: Bolzano).

$f'(a) = 1 \rightarrow a = f(1) = 2^1 = 2$

b) Määritä se muuttujan x arvo, jossa funktiolla $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt$ on paikallinen minimi.

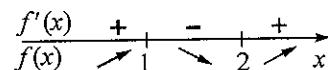
Ratkaisu: a) Merkitään $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - 2^x$. Funktio f on kaikkialla jatkuva ja saa välin $[1, 2]$ päätepisteissä

erimerkkiset arvot: $f(1) = \sqrt{5} - 2 > 0$ ja $f(2) = \sqrt{8} - 4 < 0$. Funktiolla on näin ollen nollakohta välillä $[1, 2]$.

Tämä nollakohta on yhtälön $\sqrt{x^2 + 4} = 2^x$ juuri.

b) Funktio f on määritelty kaikilla x :n arvoilla. Se on derivoituva ja

$f'(x) = x^2 - 3x + 2$. Derivaatan nollakohdat ovat 1 ja 2. Derivaatan merkkikaavion nojalla kohta 2 on minimikohta. Vastaus: $x = 2$



5. Määritä integraali $\int_2^5 \frac{5}{\sqrt{3x-6}} dx$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{5}{\sqrt{3x-6}} dx &= \lim_{a \rightarrow 2^+} \int_a^5 5(3x-6)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{5}{\frac{3}{2}} \int_a^5 (3x-6)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{5}{3} \int_a^5 \frac{1}{\sqrt{3x-6}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{10}{3} (\sqrt{9} - \sqrt{3a-6}) = \frac{10}{3} (3 - 0) = 10 \end{aligned}$$

6. Millä x :n arvoilla sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2\cos x)^n$ suppenee? (Vinkki: geometrinen sarja)

$= 1 + (1 - 2\cos x) + (1 - 2\cos x)^2 + \dots$
 $-1 < q = 1 - 2\cos x < 1$

$1 - 2\cos x > -1$ ja $1 - 2\cos x < 1$ yo k83:8
 $\cos x < 1$ ja $\cos x > 0$

$\rightarrow \frac{\pi}{2} + n2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + n2\pi$

7. a) Mitä raja-arvoa funktion $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ arvot lähenyvät, kun muuttujan arvot suurenevät ja pienenevät rajatta?

$= \frac{2x-1}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow 2$ kun $x \rightarrow \pm\infty$

b) Missä funktio f on kasvava ja missä vähenevä? Onko funktiolla ääriarvoja?

$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ aina eli kasvava kun $x \neq -1$ ei ääriarvoja

c) Hahmottele funktion kuvaaja. Piirrä samaan kuvioon myös kuvaajan mahdollinen pystysuora ja vaakasuora asymptootti.

