

Kurssin suorituksesta

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 7.28

- Kurssin peda.net-sivut:
<https://peda.net/p/pluoma/opetus/matematiikka/mtjt22327>
- Tuntimuistiinpanot tässä Onenote-tiedostossa, jakolinkki Gadian
emalissasi

Esitiedot

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 9.03

- Matem. lausekkeen sieventäminen, päässälkut (murtoluvut!)
- Muuttuja, funktio, funktion arvo, funktion kuvaaja, funktion nollakohta
- Kirjan s. 5

1. Yhdistä lausekkeisiin A-C sievennetty lauseke I-III.

A $3x + 2x$	B $3x \cdot 2x$	C $x(2x + 3x) = x(5x) = 5x^2$
I $6x^2$ B	II $5x^2$ C	III $5x$ A

2. Laske ilman teknisiä apuvälineitä.

a) $4 \cdot \frac{3}{8}$	b) $\sqrt{9}$	c) $\frac{4}{5} - \frac{5}{6}$	d) $3^2 + (-2)^3$
--------------------------	---------------	--------------------------------	-------------------

3. Tarkastellaan funktiota $f(x) = 5x + 3$.

a) Määritä $f(-1)$.

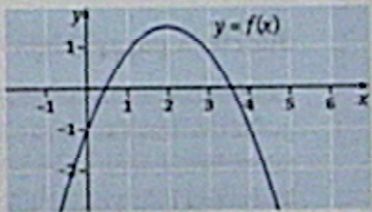
b) Millä muuttujan x arvolla funktio saa arvon 13?

4. Vastaa funktion f kuvaajan perusteella.

a) Määritä $f(2)$.

b) Millä muuttujan x arvoilla $f(x) = 0$?

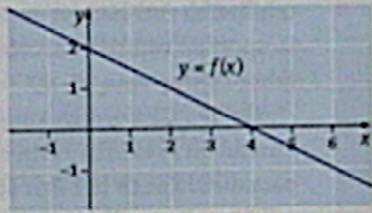
c) Millä muuttujan x arvoilla $f(x) = -1$?



5. Vastaa funktion f kuvaajan perusteella.

a) Millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on positiivinen?

b) Milloin funktion arvo on pienempi kuin 1?



6. Sievennä lauseke ja laske sen arvo, kun $x = 3$.

a) $2(x-2) = 2x-4$

b) $2 - (4-x) = 2-4+x = x-2$

c) $x(x-5) = x^2-5x$

d) $x(x-2) - 2(x^2+1) = x^2-2x-2x^2-2 = -x^2-2x-2$

7. Muodosta ja sievennä lausekkeiden $4x + 1$ ja $-2x - 3$

a) summa b) erotus c) tulo.

8. Jos luku kerrotaan 5:llä, saadaan sama tulos kuin jos kyseiseen lukuun lisättäisiin luku 5. Mistä luvusta on kyse?

$$8. x = \text{luku}$$

$$5x = x + 5$$

$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$$(4x+1) - (-2x-3)$$

$$= 4x+1+2x+3 = 6x+4$$

$$(4x+1)(-2x-3)$$

$$= \underset{1.}{-8x^2} - \underset{2.}{12x} - \underset{3.}{2x} - \underset{4.}{3}$$

$$= -8x^2 - 14x - 3$$

Polynomi?

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 11.07

- Polynomi on matem. lauseke jossa ei jaeta x:llä eikä siinä ole mitään erikoisuuksia (juuria, sin, cos, taneja, jne), pelkkiä yhteen/vähennys/kerto-laskuja.

Esim.

a) $2x^1 + 1$

1. asteen polyn.

b) -7

0. -1. -

c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x$

2. -1. -

d) $x^5 - \frac{3}{5}x^3 - x + 1$

5. -1. -

- Polynomi koostuu termeistä, joissa voi olla muuttujaosa ja kerroin. Termit kirjoitetaan yleensä eksponentin mukaiseen laskevaan järjestykseen:

$$x^5 - \frac{3}{5}x^3 - x + 1 = -x + x^5 + 1 - \frac{3}{5}x^3$$

- Polynomin asteluku = isoin x:n eksponentti.
- Vakiopolynomi = ei x:ää ollenkaan

Esim. Mikä on polynomin

$$x^5 - \frac{3}{5}x^3 - x + 1$$

5 asteluku, kolmannen asteen termin kerroin ja vakiotermi?

termin kerroin ja vakiotermi?

Kuvaaja ja nollakohdat

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 9.05

<https://www.geogebra.org/m/dbczevjr>

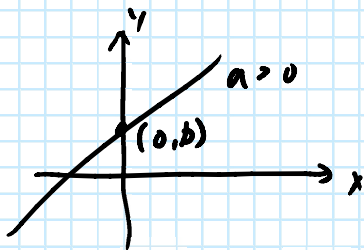
Miten tuommoinen Geogebra-appletti tehdään..?

- 1. asteen polynomi sievenee aina muotoon $ax+b \rightarrow$
1. asteen (polynomi) funktio $f(x) = ax+b$.

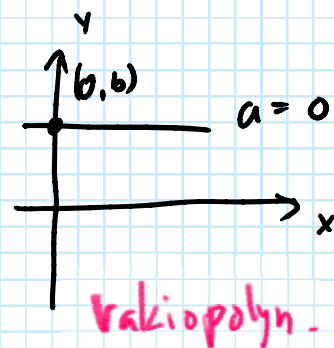
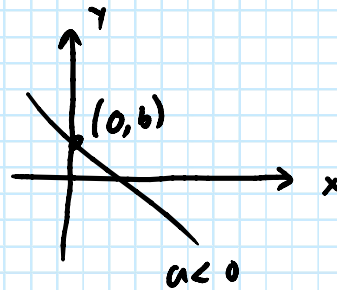
- 1. asteen funktion nollakohta:

$$ax+b=0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}, a \neq 0$$

- 1. asteen funktion kuvaaja:



1. asteen polyn.



vakio polyn.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-3) + 7(-x+4) \\ &= -5x + 29 \end{aligned}$$

Akselien ja suorien leikkauspisteet

keskiviikko 7. lokakuuta 2020 12.26

Kun haluat laskea suoran yhtälön ja ..

1. X-akselin leikkauspisteen --> merkitse lauseke = 0 ja ratkaise x-koordinaatti
2. Y-akselin leikk. pisteen --> sijoita lausekkeeseen $x = 0$ ja ratkaiset lausekkeen arvo = y-koordinaatti

Esim. $f(x) = 5x - 3$

1. $5x - 3 = 0$
 $5x = 3$
 $x = \frac{3}{5}$ Vast: $(\frac{3}{5}, 0)$

2. $5 \cdot 0 - 3 = -3$ Vast: $(0, -3)$

Oikea $(3, 7)$
Suoralla?
sijoita $x=3$
ja laske
tulokso = 7.

Kun haluat laskea kahden suoran leikk. pisteen:

1. Merkitse lausekkeet yhtäsuuriksi.
2. Ratkaise yhtälöstä x.
3. Sijoita saatu x:n arvo jompaankumpaan lausekkeista --> y-koord.

Esim. $f(x) = 5x - 3$ ja $g(x) = -x + 1$
leikkaavat. Laske lp.

$$5x - 3 = -x + 1$$

$$6x = 4$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Wert: } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Funktion arvo kohdassa nolla ja nollakohta

keskiviikko 7. lokakuuta 2020

12.55

- Funktion arvo kohdassa nolla : sijoita $x=0$
lausekkeeseen
 $x=0$

- Nollak.: x -aks. leikkauksipiste eli ratk. x
yhtälöstä

112. b)

keskiviikko 7. lokakuuta 2020 11.33

$$2 \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{x}{2} - 1$$

$$\frac{2x}{4} - \frac{2}{3} = \frac{x}{2} - 1 \quad | \cdot 12$$

$$\frac{\cancel{12} \cdot 2x}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{12} \cdot 2}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{12}x}{\cancel{2}} - \frac{12}{1}$$

$$6x - 8 = 6x - 12$$

$$6x - 6x = -12 + 8$$

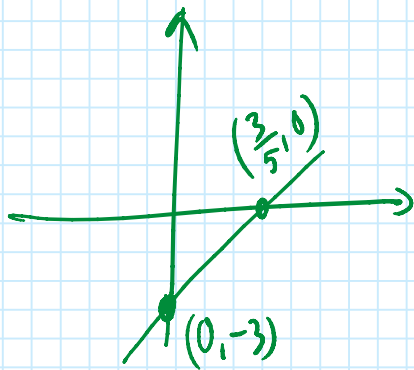
$$0 = -4$$

ei vastausta

$$f(x) = y = 5x - 3$$

1. x -aks - $lp =$ nollak. $\rightarrow$ laita $y=0$ ja ratke x

2. y —||— $\rightarrow x=0$ ja ratke y



113.

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 9.43

[MAA2 113](#)

$$f(x) = a(x+2) + 1$$

↑
parametri,
sillä on joku
vakioarvo

$$\begin{aligned} b) \quad f(-2) &= a(-2+2) + 1 \\ &= a \cdot 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$



x

Näyttäs kulkevan aina $(-2, 1)$:n kautta, olipa a mikä vaan

socrative-kertaus 1. asteen polynomista

keskiviikko 7. lokakuuta 2020 12.49

socrative.com + student login + 02112

Epäyhtälö

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 9.25

Esim.

$$a) 2x + 7 = 4$$

$$b) 2x + 7 < 4$$

Ratkaise 1. asteen epäyhtälö jollakin kolmesta tavasta:

- 1) kuvaajan avulla
- 2) merkkikaaviolla, ihan hyvä koska toimii aina
- 3) ratkaisemalla kuten 1. asteen yhtälö (käännä epäyht. merkki jos jaat negatiivisella luvulla).

$$\text{Esim. } \underbrace{-\frac{1}{2}(3-x)}_{y\text{-koord.}} \geq \underbrace{x-1}_{y\text{-koord.}}$$

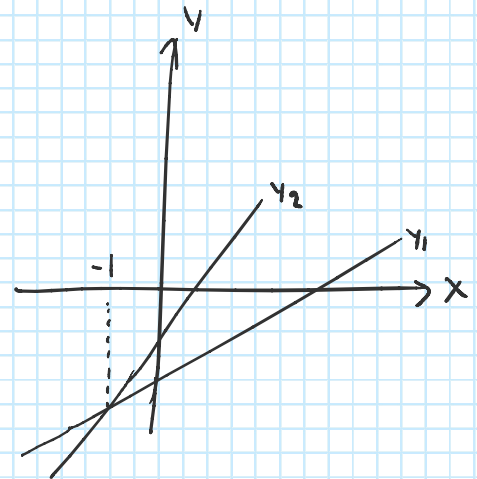
1. piirrä $y_1 = -\frac{1}{2}(3-x)$ ja $y_2 = x-1$
ja ratk. leikk. piste

$$-\frac{1}{2}(3-x) = x-1 \quad | \cdot 2$$

$$3-x = -2x+2$$

$$x = -1$$

Vast: kun $x \leq -1$



2. Ratk. vast. yht.

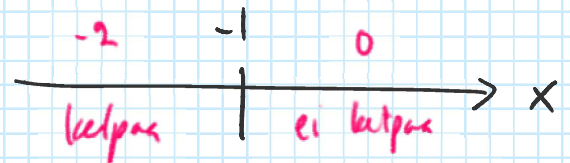
$$-\frac{1}{2}(3-x) = x-1 \quad | \cdot 2$$

$$3-x = -2x+2$$

$$x = -1$$

Piirrä lukusuora ja merk. sinne
saatan x:n arvo. Kokeile ei
luvulla toteutuuko väite vai ei.

Vast: $x \leq -1$



$$-\frac{1}{2}(3-(-2)) \geq -2-1$$

$$-\frac{5}{2} \geq -3$$

$$-\frac{1}{2}(3-0) \geq 0-1$$

$$-\frac{3}{2} \geq -1$$

$$3. \quad -\frac{1}{2}(3-x) \geq x-1 \quad || \cdot (-2)$$

$$3-x \leq -2x+2$$

$$-x+2x \leq 2-3$$

$$x \leq -1$$

135. b)

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 9.55

$$\frac{1}{2}(2+x) \leq 2(x+3)$$

$$1 + \frac{1}{2}x \leq 2x + 6$$

$$\frac{1}{2}x - 2x \leq 6 - 1$$

$$-\frac{3}{2}x \leq 5 \quad || : (-\frac{3}{2})$$

$$x \geq 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$x \geq -\frac{10}{3}$$

[MAA2 135b](#)



140. b)

keskiviikko 30. syyskuuta 2020

9.54

$$1 < 3x + 2 < x + 4$$

[MAA2 140b](#)

$$1 < 3x + 2$$

$$1 - 2 < 3x \quad || :3$$

$$-\frac{1}{3} < x$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

$$3x + 2 < x + 4$$

$$3x - x < 4 - 2$$

$$2x < 2 \quad || :2$$

$$x < 1$$

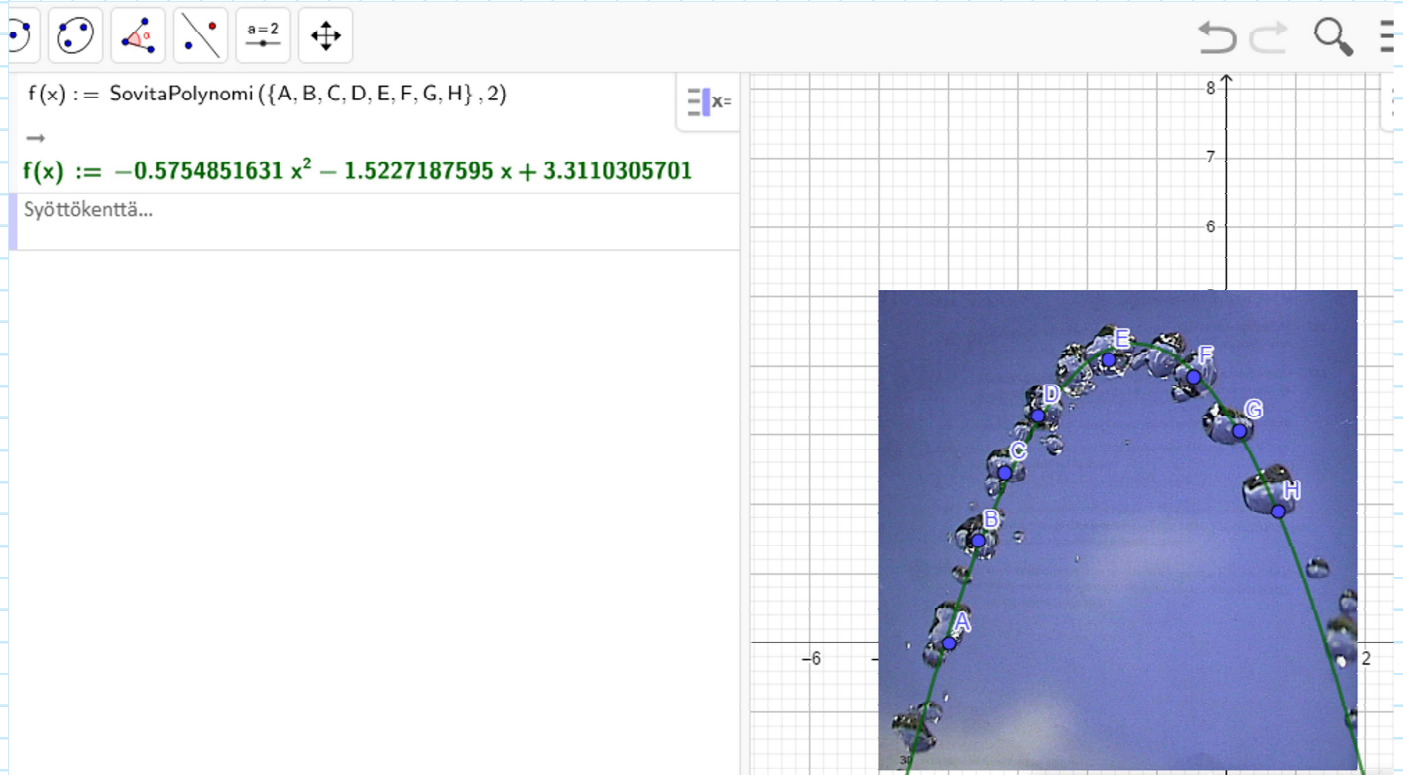


$$\text{Vast: } -\frac{1}{3} < x < 1$$



Heittoliike

maanantai 19. lokakuuta 2020 13.11

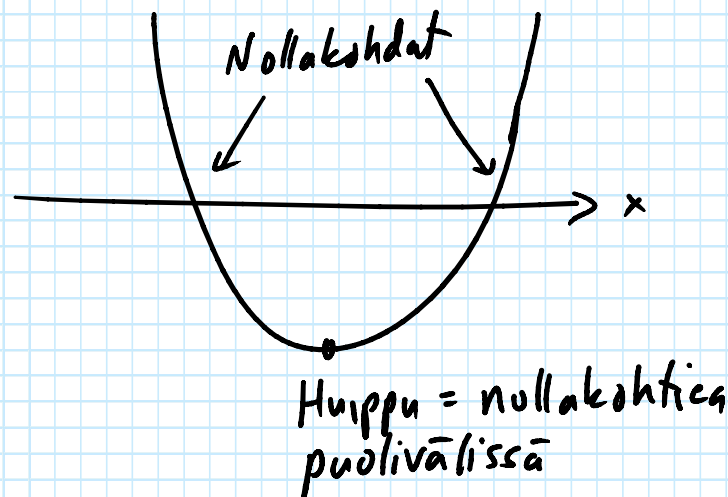
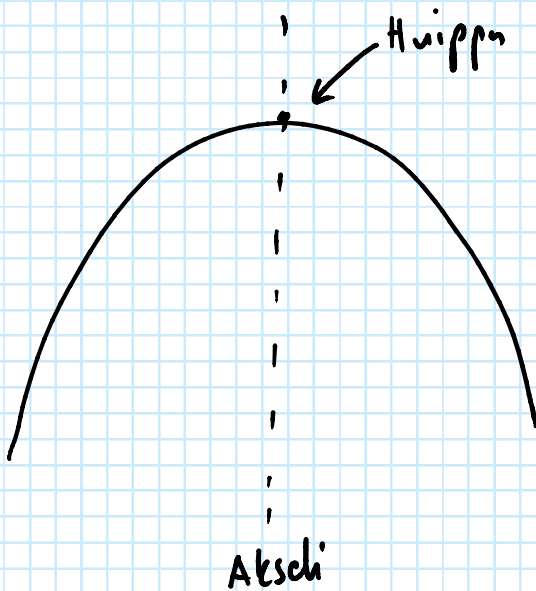
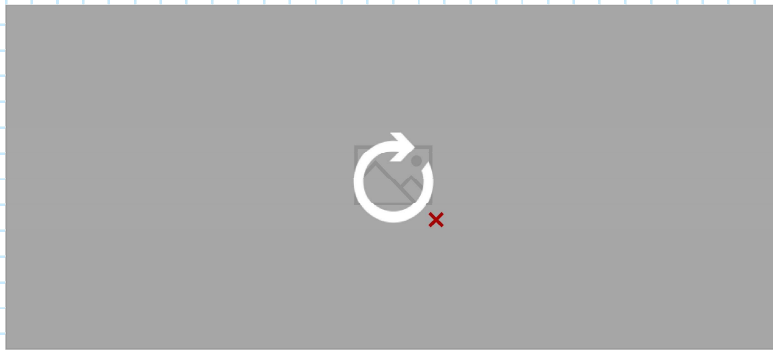


2. asteen polyn. Kuvaaja = paraabeli

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 9.05

- Toisen asteen polynomi sievenee aina muotoon $ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$.
- Kuvaaja on paraabeli:

Toisen asteen polynomifunktion kertoimet: a, b ja c



Lausekkeen sieventäminen

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 11.02

Ole tarkkana kun hävität sulkeita.

Esim.

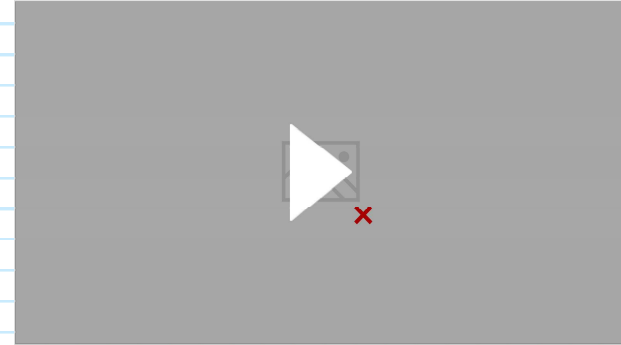
$$1 - (2-x)^2 - (2-x)(2+x) =$$

$$1 - \overbrace{(2-x)(2-x)} - \overbrace{(2-x)(2+x)} =$$

$$1 - (4 - 2x - 2x + x^2) - (4 - 2x + 2x - x^2) =$$

$$1 - 4 + \cancel{2x} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - 4 + \cancel{2x} - \cancel{2x} + \cancel{x^2} = -3$$

[MAA2 teht139a](#)





a) $x = -3$ on nollak. eli
 $f(-3) = 0.$

$$a \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 3a = 0$$

$$9a + 12 + 3a = 0$$

$$12a = -12 \quad \parallel : 12$$

$$a = -1$$

b) Kuvassa kulkee $(2, -1)$
 kautta $\rightarrow$
 $f(2) = -1.$

$$a \cdot (2)^2 - 4 \cdot (2) + 3a = -1$$

$$4a - 8 + 3a = -1$$

$$7a = 7 \quad \parallel : 7$$

$$a = 1$$



209. b) $12 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) - 3x^2 + 4x + 1 =$

$$\frac{12x^2}{2} - \frac{12x}{3} - 3x^2 + 4x + 1 =$$

$$\underline{6x^2} - \underline{4x} - \underline{3x^2} + \underline{4x} + 1 =$$

$$3x^2 + 1$$

a) $\frac{x^2}{7} + x + 2 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{4}x + 2 \right) =$

207. b)

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{x^2}{2} + x + 2 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{4}x + 2 \right) = \\
 & \frac{1}{2}x^2 + \cancel{x} + \cancel{2} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \cancel{2} = \\
 & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{4} \right) x = \\
 & \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x
 \end{aligned}$$

207. b)

$$5(6x+10)(x-2) =$$

$$5(6x^2 - 12x + 10x - 20) =$$

$$30x^2 - 10x - 100$$

$$d) (x+3)(x+4) - x(x+1) =$$

$$x^2 + 4x + 3x + 12 - (x^2 + x) = \dots$$

Muodosta 2. asteen funktio jonka :

1. toisen asteen termin kerroin = 1
2. Vakio termi = 3
3. $f(-3) = 6$

[MAA2 213](#)



215.

keskiviikko 21. lokakuuta 2020 11:26

$$\left\{ A_1 \right\} A_2$$



$$12874100 \cdot 0 = 0$$

$$2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

$$A = \underbrace{3 \cdot (11 - x)}_{A_1} + \underbrace{(2x + 3) \cdot (7 - x)}_{A_2}$$



Summa ala = 62 ruutua...

kun x:ksi valitaan
2



Mikä kuvaaja?

keskiviikko 21. lokakuuta 2020 11.17

socrative.com + student login + 02112

A $y = x^2 - 4x + 8$

1. Ylösp. aukeava
parabeli?

B $f(x) = \frac{3x - x^2 - 7}{4} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

2. Alasp. auk. par.?

C $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

3. Suora?

D $L(T) = L_0 (1 + \alpha T) = \underbrace{L_0}_{\text{alämpötila}} + \underbrace{L_0 \alpha}_{\text{1. asteen kromi}} \cdot T$

Tulo = kertolasku on nolla vain jos
jokien tulon tekijöistä on nolla.

$$a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ ja/ tai } b = 0$$

Ongelma: miten matem. lauseke saadaan
tulomuotoon?

a) $X + 1$ ei voi muuttua tuloksi.

$$b) X^2 + X = X(X+1) \quad \text{yhteinen tekijä}$$

$$\boxed{a \cdot (b+c) = ab + a \cdot c} \quad \text{MAOL}$$

$$c) X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 \quad \text{muistikaava}$$

Yrittää muuttaa
annettua lausekettä
tulomuotoon

d)



yril
an netun
tulo molo



- yhtälön ratk: tulo = 0 oltava nollä

$$(x+1) \cdot (x+2) = 0$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$x+2=0$$

$$x=-2$$



$$a) \quad \frac{x}{x+1} \neq \frac{3x}{2x+1}$$

$$\text{Verranto:} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$x(2x+1) = (x+1) \cdot 3x$$

$$2x^2 + x = 3x^2 + 3x$$

$$2x^2 - 3x^2 + x - 3x = 0$$

$$-x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (-x - 2) = 0$$

$$x = 0$$

$$-x - 2 = 0$$

$$x = -2$$

Vast: $x=0$ tai -2

TARKASTA!

$$c) \quad \frac{x}{x+1} = \frac{x+2}{x}$$

kerrotaan ristiin:

$$x \cdot x = (x+2)(x+1)$$

$$x^2 = x^2 + x + 2x + 2$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - x - 2x - 2 = 0$$

$$-3x - 2 = 0$$

$$-3x = 2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Tarkasta!

b) Geogebra CAS-ikkunaan:

b) Geogebraan (AS - ikkunaan:

Tarkka arvo



x

$$2x - 3x^2 = x(2 - 3x) = 0$$

$$x=0 \text{ tai } 2-3x=0$$

⋮



x

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \searrow \\ x = -3 \quad x > 2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \textcircled{x+3=0} \quad \textcircled{x-2=0} \\ \searrow \quad \swarrow \\ (x+3)(x-2) \end{array}$$

222. $0,2(2x-6)(8x-6) = 0$

↓
ei voi
olla nolla

↓
 $2x-6=0$

$x=3$

↓
 $8x-6=0$

$x = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 226. \quad a) \quad & 5x(x+0,1) = -2,5x \\
 & 5x^2 + 0,5x + 2,5x = 0 \\
 & 5x^2 + 3,0x = 0 \\
 & x(5x + 3,0) = 0 \\
 & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 & x = 0 \qquad \qquad 5x + 3,0 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad x = -0,6
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \frac{2}{3}(6x-1)(3x+2) = -\frac{4}{3} \quad | \cdot 3$$

$$2(6x-1)(3x+2) = -4 \quad | : 2$$

$$(6x-1)(3x+2) = -2$$

$$18x^2 + 12x - 3x - 2 = -2$$

$$18x^2 + 9x = 0$$

$$x(18x+9) = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{tai } 18x + 9 = 0 \\ x = -\frac{1}{2}$$

$$c) \quad \frac{x^2}{5} - x = \frac{3}{10}x^2 + \frac{x}{2}$$

$$\frac{2x^2}{10} - \frac{10x}{10} = \frac{3x^2}{10} + \frac{5x}{10} \quad | \cdot 10$$

$$2x^2 - x = 3x^2 + 5x$$

$$-x^2 - 6x = 0$$

$$x(-x-6) = 0$$

$$8(2x-1)(x+3) = 0$$

$$\downarrow \\ 2x-1=0 \\ x=\frac{1}{2}$$

$$\downarrow \\ x+3=0 \\ x=-3$$

$$x(-x-6)=0$$

$$\underline{x=0} \quad \text{or} \quad \underline{\underline{x=6}}$$

$$\underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$$

$$\underline{\underline{x=-3}}$$

- Neliöjuuri = ratkaisun yhtälöön $x^2 = a$

Eli $x = \sqrt{a}$.

↑ EI 1. Asteen
TERMIÄ!

- Mutta myös $-\sqrt{a}$ toteuttaa alkup. yhtälön, niinpä ratkaisuvaiheet:

1. Sievennä yhtälö muotoon

$$x^2 = a$$

2. Ratkaise $x = \pm\sqrt{a}$



- a :n oltava ≥ 0
- Tarkka arvo vs. likiarvo:

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41$$

↑ Tarkka ↑ Likiarvo

- Geogebra ja Speedcrunch: $\text{sqrt}(2) = 1,41\dots$



252.

perjantai 23. lokakuuta 2020 12.43

$$a) \quad 4x^2 - 1 = 2$$

$$4x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \approx \pm 0,87$$

$$b) \quad (x-1)^2 = 2$$

$$x-1 = \pm \sqrt{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 2,41 \\ -0,41 \end{cases}$$

$$Vast: \quad x = 1 + \sqrt{2} \text{ tai } 1 - \sqrt{2}$$



[MAA2 252](#)



$$\sqrt{49} = 7$$

$$-\sqrt{49} = -7$$

$$\sqrt{-49} = \text{error}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$245. e) X^2 = 100X$$

$$X^2 - 100X = 0$$

$$X \cdot (X - 100) = 0$$

$$\swarrow$$
$$X = 0$$

$$\searrow$$
$$X - 100 = 0$$

$$244. a) (X+3)^2 = 25$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$X+3 = \pm 5$$

$$X = -3 \pm 5 = \begin{cases} -8 \\ 2 \end{cases}$$

Neliöjuuren laskusäännöt

perjantai 23. lokakuuta 2020 12.40

Käytetään mm. lausekkeiden sievennykseen.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Esim a) $\sqrt{4 \cdot x} = \sqrt{4} \sqrt{x} = \underline{2\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{81}} = \frac{2}{9}$

258.

perjantai 23. lokakuuta 2020 12.43

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$a) \frac{2 + \sqrt{28}}{2} =$$

$$\frac{2 + \sqrt{4 \cdot 7}}{2} =$$

$$\frac{2 + \sqrt{4} \sqrt{7}}{2} =$$

$$\frac{2 + 2 \sqrt{7}}{2} =$$

$$\frac{2 \cdot (1 + \sqrt{7})}{2} = 1 + \sqrt{7}$$

$$d) (2\sqrt{7})^3 =$$

$$2^3 \cdot (\sqrt{7})^3 =$$

$$8 \cdot \sqrt{7}^2 \sqrt{7}^1 =$$

$$8 \cdot 7 \cdot \sqrt{7} =$$

$$56 \cdot \sqrt{7}$$

$$e) (2\sqrt{3})^4 =$$

$$2^4 \sqrt{3}^4 =$$

$$2^4 \cdot \underbrace{\sqrt{3}^2} \cdot \underbrace{\sqrt{3}^2} =$$

$$16 \cdot 3 \cdot 3 = 144$$

[MAA2 258](#)



x

Ratkaise

02112

1. $x^2 = 9$

A $x = \sqrt{9} = 3$

B $x = -\sqrt{9} = -3$

C Ei ratkaisua

2. $-2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = -4$

A $x = \sqrt{4}$

B $x = -\sqrt{4}$

C Ei ratkaisua

3. Sievennä $\sqrt{\frac{3}{4} + 1}$

A $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

B $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C ei sievene

4. Ratkaise $\frac{5}{x} \overset{257.9)}{\cancel{=}} \frac{x}{20} \rightarrow x \cdot x = 5 \cdot 20 \rightarrow \dots$

A 100

B -100

C 10

D -10

E ei ratkaisua

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

a) $1 - \sqrt{2} \approx 1 - 1,4 \approx -0,4$ ei voi olla
minkään luvun neliöjäännös

b) $a = 2 - \sqrt{3} \approx 2 - 1,7 = 0,3$ on jonkun luvun sqr.

s. 58-59

251. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

a) $f(-\sqrt{3}) = 3 \cdot (-\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-\sqrt{3}) + 1$
 $= 3 \cdot 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 10 + 2\sqrt{3}$

b) $f(x) = 1$

$$3x^2 - 2x + 1 = 1$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

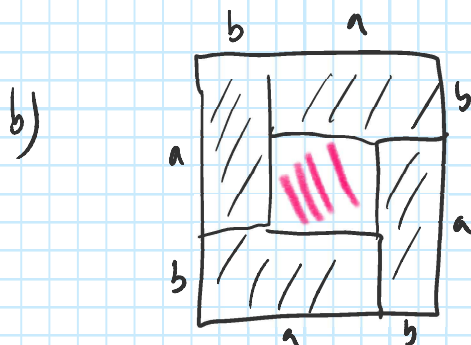
$$x(3x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ x=0 & x=\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

266. a) $\frac{2+b}{2}$

$$\sqrt{2 \cdot 6}$$



Vllv. $a \cdot a = 4ab$

ko ko $a \cdot a = (a+b)^2$

$$(a+b)^2 \geq 4ab \quad | \sqrt{}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad | : 2$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

952. $(x-1)^2 = 2$

$$x-1 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{2}$$

$$x = 1 - \sqrt{2}$$

258.

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \frac{3 - \sqrt{54}}{6} &= \frac{3 - \sqrt{9 \cdot 6}}{6} \\
 &= \frac{3 - 3\sqrt{6}}{6} \\
 &= \frac{3(1 - \sqrt{6})}{6} \\
 &= \frac{1 - \sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{a)} \quad \frac{2 + \sqrt{28}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{2} = \cancel{2} \frac{(1 + \sqrt{7})}{\cancel{2}}$$

Muistikaavat

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 10:58

Sulkeiden poisto on helppoa: teet vain **kaikki** kertolaskut ja yhdistät samanmuotoiset (siis täsmälleen saman muuttujaosan omaavat) termit.

$$(2x+1)^2 = (2x+1)(2x+1) = 4x^2 + \underline{2x} + \underline{2x} + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(k-2)(k+2) = k^2 + \cancel{2k} - \cancel{2k} - 4 = k^2 - 4$$

Mutta miten lauseke saadaan takaisin sulkumuotoon eli tuloksi? Ja mihin tätä tarvitaan?

Ainakin kolme tapaa:

1. Geogebren "Jaa tekijöihin"-toiminnolla
2. Muistikaavoilla, tämän luvun asia.
3. Nollakohtien avulla (tämä lisää myöhemmin).

Ja miksi? Sulkumuodosta (= tulosta) voi supistaa!

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 9}{x+3} &= \frac{x^2 - 3^2}{x+3} \\ &= \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \\ &= x-3 \end{aligned}$$

MUISTIKAAVAT

MAOL:



Esim.

A) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

B) $2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 3^2) = 2(x-3)^2$

C) $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

268, 269, 273, 274, 281, 284

268. a) $(3x+2)^2 = (1x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

273. a) $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x-6)(x+6)$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 - 35 = x^2 - (\sqrt{35})^2 = (x - \sqrt{35})(x + \sqrt{35})$$

281. a) $(x+2)^2 = (x-4)(x+4)$

$$\cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} - 16$$

$$4x = -20 \quad || :4$$

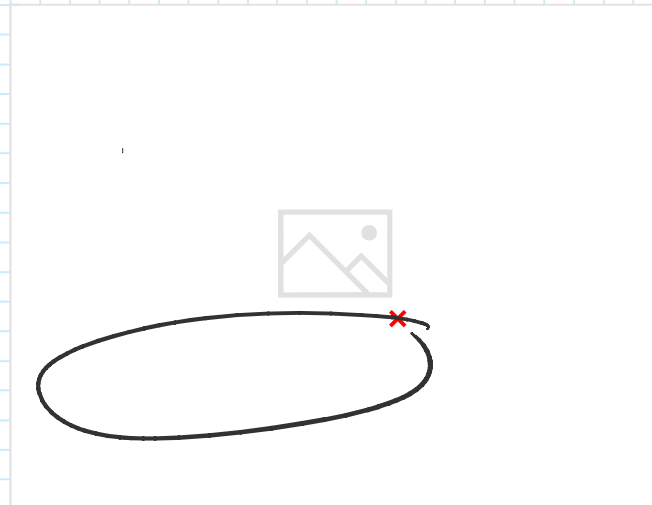
$$x = -5$$

Muuta polyn. takaisin "binomin neliöksi" eli sulkeumaton.

$$a) \quad \begin{array}{c} x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a^2 \quad \quad b^2 \\ a=x \quad \quad b=2 \end{array}$$

$$b) \quad \begin{array}{c} x^2 - 16x + 64 = (x-8)^2 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a^2 \quad \quad b^2 \end{array}$$

$$c) \quad \begin{array}{c} x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a^2 \quad \quad b^2 \end{array}$$



293. a)

torstai 29. lokakuuta 2020 9.00

Osoita että $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on luvun
 $5 + 2\sqrt{6}$ neliöjuuri.

Jos a on b :n neliöjuuri, pitää olla

1. $a \geq 0$

2. $a^2 = b$



Ratkaisukaava

keskiarvio 30. syyskuuta 2020 9.05

Täydellinen 2. asteen yhtälö = 2. asteen yhtälö jossa on 2. asteen, 1. asteen ja 0. asteen termit (= vakiotermi).

Esim. $2x^2 - 3x = 8$

$$\frac{-x^2 - 4x + 1}{3} = \frac{-\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}}{1}$$

Kaikki täyd. 2. asteen yhtälöt sievenevät muotoon

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \text{ vakioita ja } a \neq 0.$$

Tälle voidaan muodostaa ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tämä toimii myös silloin kun $b = 0$ (et tarvitse Neliöjuuri-luvun tietoja) tai jos $c = 0$ (et tarvitse tulon nollasääntöä).

Esim.

a) $x^2 - 9x - 18 = 0$ $a=1, b=-9, c=-18 \rightarrow$

b) $-x^2 = 3x$

c) $2x^2 - x = 8 - x$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{153}}{2}$$

b) $-x^2 - 3x = 0$ tulon nollas. TA1

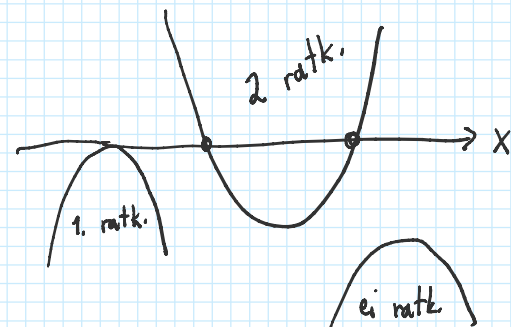
$a=-1, b=-3, c=0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{3 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{6}{-2} = -3 \\ \frac{0}{-2} = 0 \end{cases}$$

c) $2x^2 - x - 8 + x = 0$

$a=2, b=0, c=-8$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{\pm \sqrt{64}}{4} = \frac{\pm 8}{2} = \pm 4$$



$$3x - 1 + 7x^2 \quad a = \frac{7}{2}$$

$$\frac{3x - 1 + 7x^2}{2}$$

$$= -\frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{7}{2}$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

314.

torstai 29. lokakuuta 2020 9.23

MAA2 314

V

Millä a :n arvolla $x = -2$ on yhtälön

$$x^2 + ax + a^2 - 7 = 0$$

juuri?

Juuri = nollak.

$$(-2)^2 + a \cdot (-2) + a^2 - 7 = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $a=1$ $b=-2$ $c=-3$

$$a = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \longrightarrow \dots$$

$$\longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \longrightarrow \dots$$

MAA2 318



/

Epäyhtälö

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 10.59

Kaikki epäyhtälöt voi ratkaista kuvaajan tai merkkikaavion avulla, kun ensin sievennät epäyhtälön muotoon

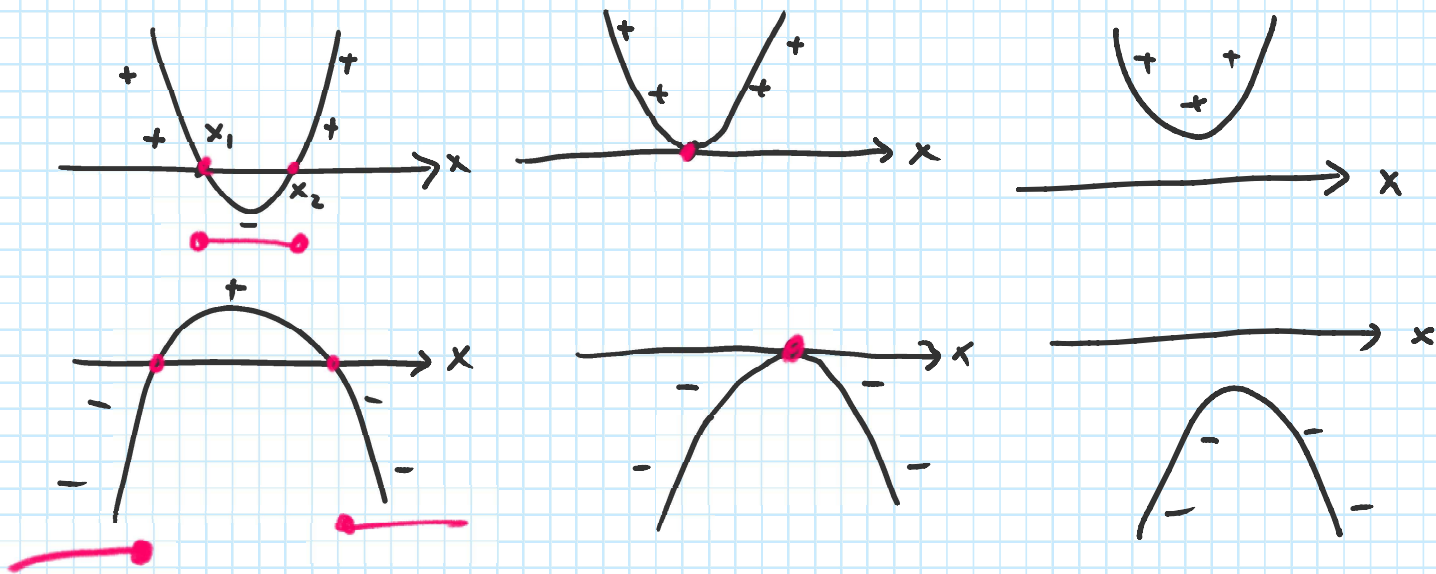
$$f(x) < 0.$$

Tämä siksi että pääset vertaamaan nollaan ts. katsomaan kuvasta millä x :n arvoilla kuvaaja on x -akselin ylä- (>0) tai alapuolella (<0).

Siis sievennyksen jälkeen ratkaiset vastaavan yhtälön nollakohdat, piirrät karkean kuvaajan ja vastaat alkup. epäyhtälöön.

$$f(x) \leq 0$$

Toisen asteen kuvaajat ja mahdolliset epäyht. ratkaisut, kun nollak. ovat x_1 ja x_2 :



Ilmoita vastaus epäyhtälömerkeillä tai hakasulkeilla:



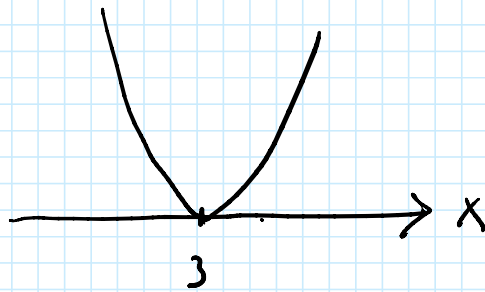
x

Esim.

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

⋮

$$x = 3$$



Vast: karkki $x=n$ amet kelpa paitsi $x=3$.

$$x < 3 \quad \vee \quad x > 3$$

$$]- \infty, 3[\quad \vee \quad] 3, \infty[$$

334.

keskiviikko 4. marraskuuta 2020

8.01

$$a) \quad x^2 + 3x + 5 > 0$$

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

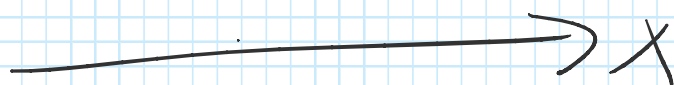
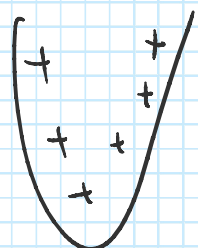
$$a=1$$

$$b=3 \quad c=5$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} \quad \text{ei ratk.}$$

ylösp.
auk.
par



Vast: kaikki kää

Ratkaisut kuvaajaa käyttäen:

[MAA2 334](#)

$$c) \quad -2x^2 + 4x - 2 < 0$$

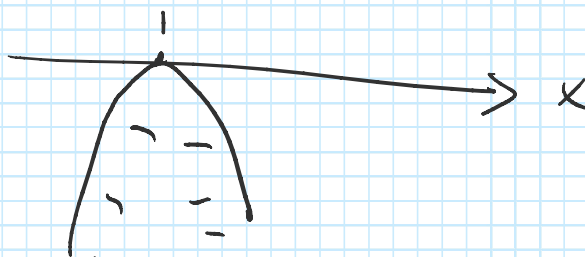
$$-2x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-4}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

alasp.



Vast: muutt paitsi $x=1$

336.

keskiviikko 4. marraskuuta 2020 8.01

"... luvut joiden neliö on pienempi kuin luku $\cdot 5$."

Videolla ratkaisu kuvaajan avulla, tähän merkkikaavio-versio:

$x =$ kysytty luku

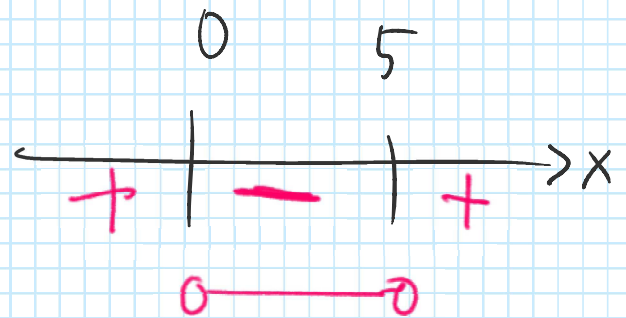
$$x^2 < x \cdot 5$$

$$x^2 - 5x < 0$$

$$x^2 - 5x > 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $x=0$ $x=5$



Vast: $0 < x < 5$
 (x välillä] 0, 5 [)

[MAA2 336](#)



324

$$a) \underset{a}{3} \underset{b}{x}^2 - \underset{c}{4}x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$



c) $\left[-\frac{2}{3}, 6\right]$



a) $0,5 \text{ km} = 500 \text{ m}$ eli 10 matkaa

$$60 + 62 + 64 + 66 + 68 + 70 + 72 + 74 + 76 + 78 \\ = 690 \text{ (s)}.$$

b) $0,5 \text{ h} = 1800 \text{ s}$

$$60 + \dots + a_n = 1800$$

Aritm. summa, jossa $d=2$

$$n \cdot \frac{60 + (60 + (n-1) \cdot 2)}{2} = 1800$$

$$n \cdot \frac{(120 + 2n - 2)}{2} = 1800 \quad | \cdot 2$$

$$n(118 + 2n) = 3600$$

$$2n^2 + 118n - 3600 = 0$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$n = \cancel{-81,7} \text{ tai } 22,3$$

↓
Vast: 22 alttamittana

$$\begin{cases} S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{cases}$$



x



Summe $q_1 + \dots + q_{22} = 1782$

341.

perjantai 6. marraskuuta 2020 8.20

14

2^2



3^2

0

0

5

12

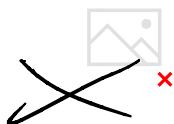
21

100...1000

$$\cancel{100 < n^2 + 4n < 1000}$$

$$n^2 + 4n = 100$$

$$n^2 + 4n = 1000$$



$$a_8 < 100$$

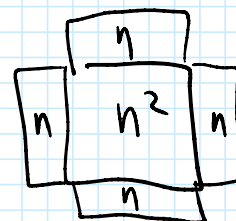
$$\textcircled{a_9} > 100$$



$$\textcircled{a_{29}} < 1000$$

$$a_{30} > 1000$$

Vant: kuviot $a_9 \dots a_{29}$, yht. 21 kpl



kuvio n

$$\textcircled{n^2 + 4n}$$

$$3. \quad 1\sqrt{-3}$$

Diskriminantti

keskiviikko 30. syyskuuta 2020

10.59

$$ax^2 + bx + c = 0$$



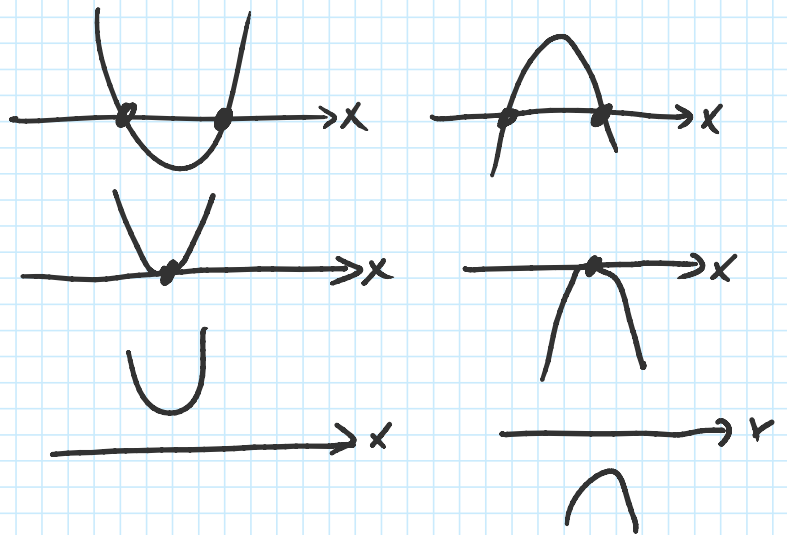
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kolme vaihtoehtoa:

1. Kaksi ratk.

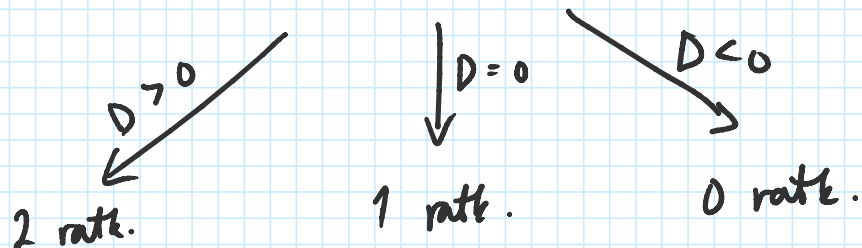
2. Yksi ratk.

3. Ei ratk.



Vaiko $\sqrt{b^2 - 4ac}$:n laskea? Voi jos se on ≥ 0 .

Diskriminantti $D = b^2 - 4ac$



$$2x^2 - 10x + 12$$

lukumuotoon =
tekijöihin jako?

~~$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$~~

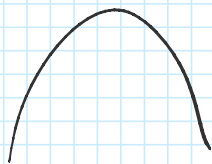
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$-2x^2 + bx - 3 \geq 0 \quad \text{aina epätyösi?}$$

$a = -2 \quad b = b \quad c = -3$

Millä b :n arvolla epäyhtälöllä ei ole ratkaisua? Kuvaajan oltava

→ x



$$D < 0 \quad !$$

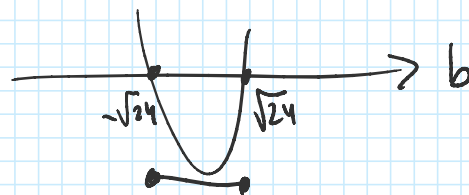
$$D = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) < 0$$

$$b^2 - 24 < 0$$

$$b^2 - 24 = 0$$

$$b = \pm \sqrt{24}$$

[MAA2 358](#)



Vast: ei ratk. kun $-\sqrt{24} < b < \sqrt{24}$

$$f(x) = \underset{a=p}{p}x^2 + \underset{b=p+1}{(p+1)}x + \underset{c=1}{1}$$



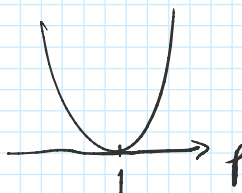
yksi nollak $\rightarrow D = b^2 - 4ac = 0$

$$\rightarrow (p+1)^2 - 4 \cdot p = 0$$

$$p^2 + 2p + 1 - 4p = 0$$

$$\underset{a=1}{p^2} - \underset{b=-2}{2p} + \underset{c=1}{1} = 0$$

$$p = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$



JOS $p=0$ niin

$$f(x) = x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

ylin ratk!



x



- parametri p voi saada vain yksittäisiä arvoja
- Muuttuja x voi saada vaikka mitä arvoja
- Vähint. yksi ratk. $\rightarrow D \geq 0$

$$\begin{aligned} a &= p \\ b &= -4 \\ c &= 2p \end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

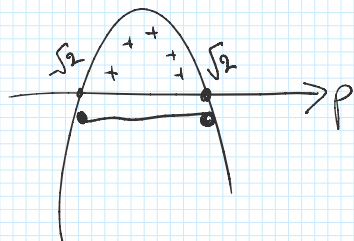
$$16 - 4 \cdot p \cdot 2p \geq 0$$

$$16 - 8p^2 \geq 0$$

$$16 - 8p^2 = 0$$

$$p^2 = 2$$

$$p = \pm\sqrt{2}$$



Vast: (p kuuluu välille $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$)
 $-\sqrt{2} < p \leq \sqrt{2}$

s. 99 :

353, 357, 360, 362



$$\begin{aligned} a &= a \\ b &= -6 \\ c &= -10 \end{aligned}$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot a \cdot (-10)$$

$$a) 36 + 40a = 0$$

$$b) 36 + 40a > 0$$

$$362. \quad x^2 + (a+2)x + 2a = 0$$

$$\begin{matrix} a=1 & b=a+2 & c=2a \end{matrix}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$1 \quad -1^2 \quad 11 \quad 10$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (a+2)^2 - 4 \cdot 12a$$

$$= a^2 + 4a + 4 - 48a$$

$$= a^2 - 44a + 4 = (a-2)^2 \geq 0$$

missäkönt!

a:sta riippumatta $D \geq 0$ onko
 $\rightarrow$ 2 tai 1 ratk.

Tekijöihin jako

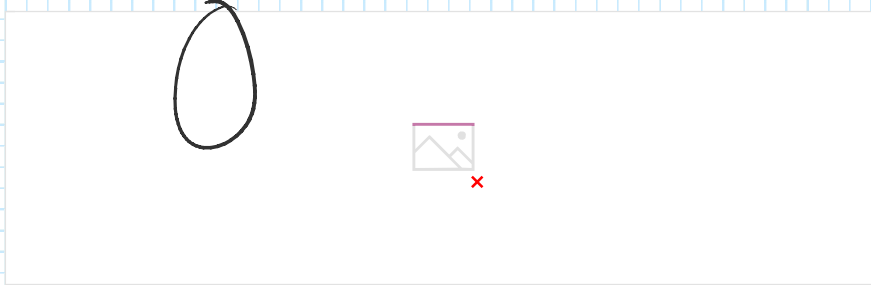
keskiviikko 30. syyskuuta 2020 10:59

= palauttaa 2. asteen polynomi (tai mikä matem. lauseke tahansa) takaisin tulomuotoon

Miksi? Koska tulosta voi sieventää ja siihen voi soveltaa tulon nollasääntöä

Miten?

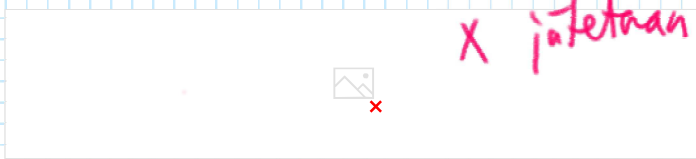
1. Geogebren CAS-ikkunan JaaTekijöihin-toiminto:



2. Muistikaavoilla

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$$

3. Nollakohtien avulla (MAOL)



*X jaetaan rauhaan,
x₁ ja x₂ korvataan
luvulla*

**Onko polynomi $p(x)$ jaollinen polynomilla $x-a$? ON JOS
NIILLÄ ON SAMA NOLLA KOHTA $x = a$!!!**

Esim. Jaan $6x^2 - x - 2$ tekijöihin, jos mahdollista.

Nollakohtat $6x^2 - x - 2 = 0$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ja } \frac{2}{3}$$

Tulomuoto siis

$$\begin{aligned} & 6 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) \\ &= 2 \cdot 3 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) \\ &= (2x+1)(3x-2) \end{aligned}$$

Esim. Sieveneckö

$$\frac{\text{Os.} = x^2 + 8x + 16}{\text{nim.} = x^2 - 16} ?$$

Os. noluk. ratk. kaavalla : $x = -4$ (kaksinkert. juuri)

Nim. ——— : $x = \pm 4$

$$\rightarrow \frac{(x+4) \cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)} (x-4)} = \frac{x+4}{x-4}$$

HUOM! $x \neq 4$ ja $x \neq -4$

385.

keskiviikko 11. marraskuuta 2020 9:38

$$\frac{x^2 + x + a}{(x-1)(x-2)}$$

, Nim. nollak. $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$
 $x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$

[MAA2 385](#)



Esim. 2. asteen polynomin nollakohdat ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = 5$. Lisäksi tiedetään että se kulkee pisteen $(0, 3)$ kautta. Määritä sen yhtälö.



$$a(x-2)(x-5) = a(x^2 - 7x + 10) \\ = ax^2 - 7ax + 10a$$

Sijota $x=0$ ja pitää tulla 3:

$$\cancel{a \cdot 0} - 7\cancel{a \cdot 0} + 10a = 3 \\ a = \frac{3}{10}$$

$$\text{Vast: } \frac{3}{10}x^2 - \frac{21}{10}x + \frac{3}{10}$$

Varl: $\frac{3}{10}x^2 - \frac{21}{10}x + \frac{3}{10}$

Esim.
a) $X^2 = 4$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ X = +\sqrt{4} = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ X = -\sqrt{4} = -2 \end{array}$$

b) $X^3 = 5 \rightarrow X = \sqrt[3]{5}$

c) $X^4 = 8 \rightarrow X = \pm \sqrt[4]{8}$

- $X^n = a$

$\xrightarrow{n \text{ parillinen}} X = \pm \sqrt[n]{a}$
 $\searrow n \text{ pariton} \quad X = \sqrt[n]{a}$

,
 $a \geq 0$

- Sievennä ensin, juuri sitten

- $\dots - 3 \dots$ $\dots - 6 \dots$ $\dots - 12 \dots$

Esim. a) $5x^3 + 13 = 0$

$$5x^3 = -13 \quad || :5$$

$$x^3 = -\frac{13}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{13}{5}} \approx$$

b) $2x^6 - 18 = 0$

$$x^6 = 9$$

$$x = \sqrt[6]{9}$$

Geogebra (As - komento nroot (luku, aste)

Speedcrunch:

$$x^n = a$$

$$|| \quad ()^{\frac{1}{n}}$$

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$$

↓

1. ...

$$x = a^{\frac{1}{n}}$$

Eli:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$



Same kuin $\sqrt[3]{8}$

Entä a^{-1} ?

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{2}} = x^2$$

$$\sqrt{} \quad \frac{1}{n}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[5]{x^7} = x^{\frac{7}{5}}$$

410.

perjantai 13. marraskuuta 2020 7:26

<https://youtu.be/jGBbZ8TuSU0>

Arvo uutena 31500 €. Neljän vuoden päästä
17200 €. Montaa % vuodessa?

$$a_1 = 31500 \xrightarrow{q} a_2 \xrightarrow{q} a_3 \xrightarrow{q} a_4 \xrightarrow{q} a_5 = 17200$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$\rightarrow 17200 = 31500 \cdot q^4 \quad \parallel : 31500$$

$$q^4 = \frac{17200}{31500}$$

$$q = \pm \sqrt[4]{\frac{17200}{31500}} = \pm 0,8595$$

jäljellä jäädä on 86%

$\rightarrow$ 14 % häviötä
joka vuosi

$$0,5a = 1 - \log_{10} m$$

$$0,5a = 1 - 0,86^x$$

$$0,5 = 0,86^x$$

$$x = \log_{0,86} 0,5$$

$$K = K_0 a^h$$

← mindesten 1 km.

$$K_n = K_g^n$$

$\uparrow$ without
no

$\uparrow$ after
and

$\leftarrow$ mutation

409.

perjantai 13. marraskuuta 2020

9.23

v. 1880 : 2 milj.
v. 1950 : 4 milj.

$$2 \cdot q^{70} = 4$$

$$q^{70} = 2$$

$$q = \pm \sqrt[70]{2}$$



$$= 100,995\%$$

Vant: kasva n. 1% vuodessa.

$$1950 - 2025 = 75 \text{ v.}$$

$$4 \cdot 1,00995^{75}$$



Vort: n. 8,4 mitj.

Korkeamman asteen yhtälö

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 11.01

Kaikki n :n asteen polynomit sievenevät muotoon

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \text{ posit. kokonaisluku.}$$

Yleistä ratkaisukaavaa ei ole olemassa joten tällä kurssilla ratkotaan korkeamman kuin 1. tai 2. asteen polynomi yhtälöitä joko n :n juuren tai tulon nollasäännön avulla.

Esim. a) $2x^8 - 16 = 0$

$$2x^8 = 16$$

$$x^8 = 8$$

$$x = \pm \sqrt[8]{8}$$

b) $2x^8 - 16x^3 = 0$

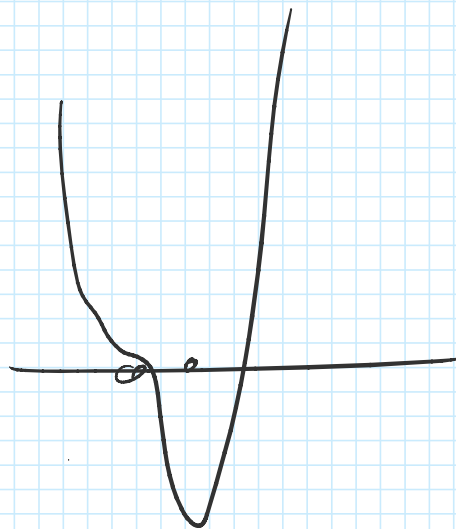
$$x^3 \cdot (2x^5 - 16) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^5 - 16 = 0$$

$$x = 0$$

$$x^5 = 8$$

$$x = \sqrt[5]{8}$$



c) $2x^8 - 16x^3 = 1$

ei ratkea näillä tiedoilla

— n :n asteen polynomi yhtälöä maks. n kpl nollakohtaa

— $n:n$ asteen polynomi yhtälön maks. n kpl nollakohta

Yhteinen tekijä ja tulon nollasääntö

perjantai 13. marraskuuta 2020

11.18

Esim. a) $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$

$$x^2(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$\vdots$ $\underset{a}{x} \quad \underset{b}{-} \quad \underset{c}{-} \quad \vdots$

b) $x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$

$$(x+1)(x^2 - 4) = 0$$

$$x+1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4 = 0$$

$\vdots$ $\vdots$

c) $x^3 + 2x - 7x^2 - 14 = 0$

Ryhmittely-menetelmä! $\checkmark$

$$x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$$

$$x^2(x-7) + 2(x-7) = 0$$

$$(x-7)(x^2 + 2) = 0$$

- $x = a$ on polynomin nollakohta $\Leftrightarrow x - a$ on polynomin tekijä



$$a) \quad (x-1)(x-2)(x-3) = \dots$$



$$b) \quad (x+3)(x+1)(x-2)$$



$$c) \quad x(x+2)(x+2)$$



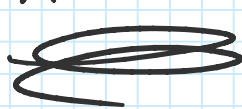
436.

maanantai 16. marraskuuta 2020

13.31

$$a) \quad \underbrace{x^3 + 2x^2} + \underbrace{9x + 18} = 0$$
$$\underline{x^2(x+2)} + \underline{9(x+2)} = 0$$

$$(x+2)(x^2+9) = 0$$

$$\swarrow$$
$$x = -2$$


$$\searrow$$
$$x^2 + 9 = 0$$

ei ratk.

Summan kuutio

maanantai 16. marraskuuta 2020 13.06

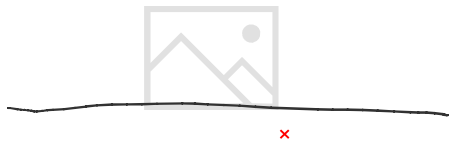


Ei löydy MAOLsta...

MAOL:



✓



$$(a+b)^n$$

$$(a+b)^5 =$$

$$1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

$$(a+b)^{10} =$$

$$\begin{matrix} 1 \cdot a^{10} \\ \uparrow \\ \binom{10}{0} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} +10 a^9 b \\ \uparrow \\ \binom{10}{1} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} +45 a^8 b^2 \\ \uparrow \\ \binom{10}{2} \end{matrix}$$

...

$$+10 a^1 b^9 + 1 \cdot b^{10}$$

451.

perjantai 13. marraskuuta 2020 11.22

 $x = \text{kyssythy luku}$

$$x^2 = \frac{x^3 + x^4}{2}$$

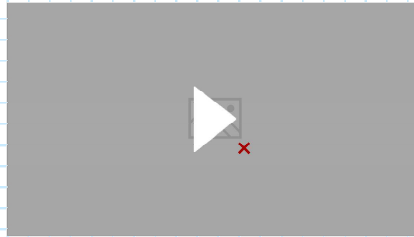
$$2x^2 = x^3 + x^4$$

$$x^4 + x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x=0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

[MAA2 451](#)

s. 130: 425, 427, 428, 430, 432, 434, 436

$$x \cdot (x+9)^2 \cdot (-x+7) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x=0 \quad x=-9 \quad x=7 \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 8 \\ x &= \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

Erikoistapaus: bikvadraattinen yhtälö

perjantai 13. marraskuuta 2020 11:14

Joskus korkeamman asteen yhtälön voi kirjoittaa 2. asteen yhtälöä vastaavaan muotoon:

$$\begin{aligned}
 x^6 - x^3 - 6 &= 0 \\
 \downarrow \\
 (x^3)^2 - (x^3) - 6 &= 0 \\
 \downarrow x^3 = t \\
 t^2 - t - 6 &= 0 \\
 \downarrow \\
 t = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \\
 \downarrow t = x^3 \\
 x^3 = -2 &\text{ tai } x^3 = 3 \\
 \downarrow \\
 x = \sqrt[3]{-2} &\text{ tai } x = \sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

Bikvadraattinen yhtälö: oltava kolme termiä, ja kahdessa x:ää sisältävässä termissä eksponenttien suhde 2:1.

Harj. Bikvadr. yhtälö

a) Ratkaise $2x^4 - 5x^2 = 3 \rightarrow 2t^2 - 5t - 3 = 0$ $x^2 = t$

b) $x^8 - 6x^4 + 9 = 0 \rightarrow t^2 - 6t + 9 = 0$ $x^4 = t$

Teht. 448, 442, 449

$t = 3$
 $x = \pm \sqrt[4]{3}$

1. $x^2 = 3 \rightarrow x = \pm \sqrt{3}$
 2. $x^2 = -\frac{1}{2}$ ei ratk.

442. a) $f(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)(x-2)$ ja $f(0) = 1$

$a \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 1$

$a \cdot 6 = 1 \rightarrow a = \frac{1}{6}$

c) $f(x) = a(x+2)(x-1)(x^2+1) \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

2. asteen termi jolle ei ole
 hollakohdtaa

449. a) $t^2 - 9t + 8 = 0$

$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2}$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Korvataan $x^2 = t$:

$$(x^2)^2$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$a=1 \quad b=-3 \quad c=-4$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Korvataan $t = x^2$:

$$1. \quad x^2 = 4 \rightarrow \pm 2$$

$$2. \quad x^2 = -1 \rightarrow \text{ei ratk.}$$

Vast: $x = \pm 2$

$$a) \quad x^{\textcircled{6}} - 2x^{\textcircled{3}} - 1 = 0$$

$$x^3 = t$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

;

$$b) x^8 - 5x^4 + 3 = 0$$

$$t = x^4$$

$$t^2 - 5t + 3 = 0$$

;

Korkeamman asteen epäyht.

keskiviikko 30. syyskuuta 2020 11.01

POLYNOMIN ETUMERKKI VOI VAIHTUA VAIN NOLLAKOHDASSA!!!

Joten epäyhtälön ratkaisuvaiheet:

1. Sievennä epäyhtälö muotoon "lauseke $<> 0$ "
2. laske lausekkeen nollakohdat
3. tee nollakohtien perusteella merkkikaavio
4. vastaa alkup. epäyhtälöön.

465. a) $x^4 + x^3 - 8x - 8 < 0$ (1) Ryhmitely!

$$x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0 \quad (2)$$

$$x^2(x+1) - 8(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 - 8) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 8 = 0$$

$$\underline{\underline{x = -1}} \quad \underline{\underline{x = \sqrt[3]{8} = 2}}$$



$$]-1, 2[$$

$$-1 < x < 2$$

x välillä -1...2, päätep. ei kuulu mukaan

455. b)

perjantai 20. marraskuuta 2020

9.06

hävittää sulkee rate.

lasku

↑
tulv-
muotoon

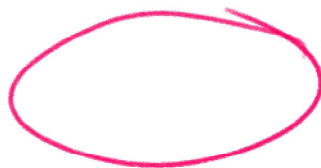


x

Vast: kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 3$



x



465. b)

perjantai 13. marraskuuta 2020

11.45

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$$

[MAA2 465b](#)



$$a) \quad px^3 + 6x^2 - x \geq 0$$

$$x \cdot (px^2 + 6x - 1) \geq 0$$

$$\uparrow$$

 $x \leq 0$

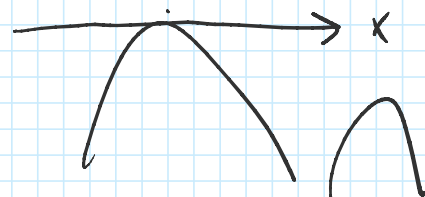
$$(\dots) \leq 0$$

1. $p \neq 0$, $p > 0 \rightarrow$ yläsp. aineen paraabeli



lauseke ei ole aina $\leq 0 \rightarrow$
 ei ole p:n arvo jolla epäyhtälö aina
 tosi

2. $p \neq 0$, $p < 0 \rightarrow$ alasp. aineen



Nyt sulkee lauseke ≤ 0 aina kun

$$D \leq 0$$

$$D \leq 0$$

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$36 + 4p \leq 0$$

$$4p \leq -36$$

$$p \leq -9$$

$$b) \quad x^6 - px^3 + 3 > 0$$

$$x^6 - px^3 + 3 > 0$$

$$x^3 = t$$

$$t^2 - pt + 3 > 0$$

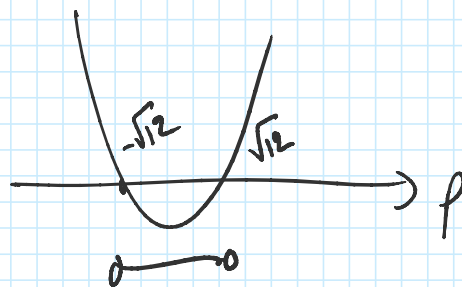
$$\begin{matrix} a & b & c \\ & & \cup \end{matrix}$$

$$\longrightarrow t$$

$$D < 0$$

$$D \Rightarrow p^2 - 4 \cdot 3 < 0$$

$$p^2 - 12 < 0$$



457. c)

maanantai 23. marraskuuta 2020

13.35

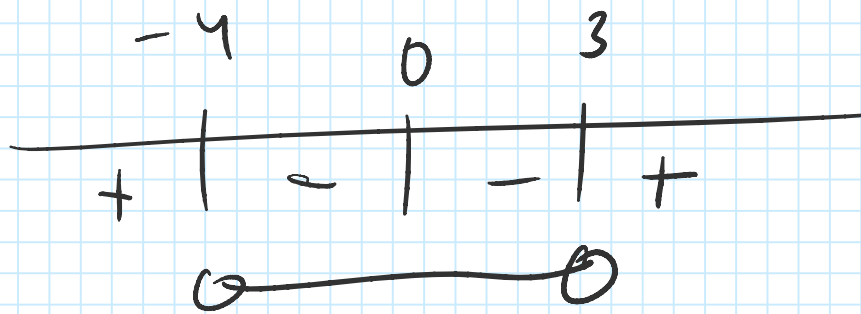


$$x^2(x^2 + x - 12) = 0$$

$$\swarrow$$
$$x = 0$$

$\searrow a, b, c$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = -1 \pm \frac{7}{2}$$



$$V: -4 \leq x \leq 3$$



$$a) \quad x^4 + qx^3 - 2qx^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 + qx - 2q) = 0$$

anna positi. Miten q :n avulla
täminkin ≥ 0 ?

$$x^2 + qx - 2q \geq 0$$

$a=1$ $b=q$ $c=-2q$

Ylöspäin aukeava paraabeli,
joten ≥ 0 silloin kun
silloin 0 tai 1 nollako.

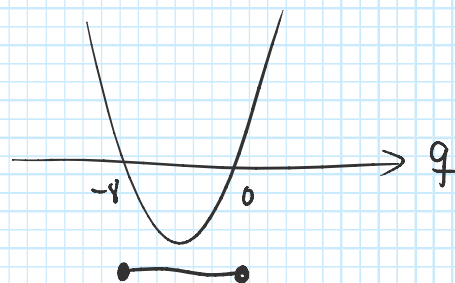
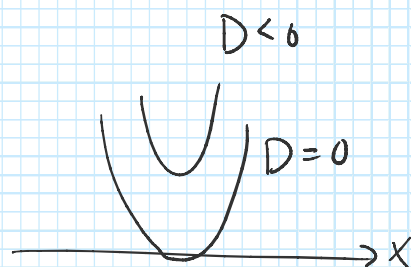
$$D \leq 0$$

$$q^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2q) \leq 0$$

$$q^2 + 8q \leq 0$$

$$q(q+8) \geq 0$$

$$q=0 \vee q=-8$$



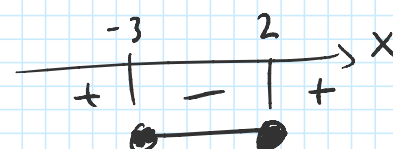
$$\text{Vast: } -8 \leq q \leq 0$$

Polyn. lauseiden käsittely ja yhtälön ratkais

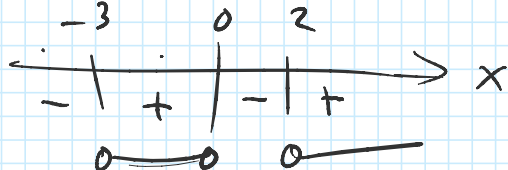
maanantai 23. marraskuuta 2020 13.05

- a) 1. aste: poista sulkeet, x:t yhtälön vasemm. ja vakiot oikealle puolelle, jaa x:n kertoimelle. Jos kyseessä epäyhtälö ja jaat negatiiviselle luvulla --> käännä epäyht. merki toisinpäin
- b) 2. aste: sulkeet pois, kaikki termit yht. vasemm. puolelle, yhdistä samanmuotoiset termit ja sijoita a,b,c ratkaisukaavaan. Epäyhtälö nollakohtien ratkaisun jälkeen merkkikaaviolla tai kuvaajan avulla
- c) 3. --> n. aste: sulkeet, ja joko n:s juuri tai tulon nollasääntö. Epäyhtälön ratkaisu nollakohtien avulla tehdystä merkkikaavioista.

$$\begin{aligned} a) \quad 2(x-1) &> 7 \\ 2x - 2 &> 7 \\ 2x &> 9 \\ x &> \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x^2 - x &\leq 6 \\ x^2 - x - 6 &\leq 0 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ x &= 2 \text{ ja } -3 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} c) \quad x^3 - x^2 - 6x &> 0 \\ x(x^2 - x - 6) &= 0 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \text{tai} \quad -3 \\ 0 \quad \quad 2 \end{aligned}$$



$$\text{Vast: } -3 < x < 0 \text{ tai } x > 2$$

n n)

1. 12

$$2x - 4(x-2) = 5$$

$$-2x = -3$$

$$x = \frac{3}{2}$$



x

$$\frac{14}{1} \uparrow$$

$$= \frac{12(1-x) - (5x+2)}{4} = \frac{10-17x}{4}$$

1a, 2b

$$\left(\frac{1-t^3}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 =$$

$$\frac{(1-t^3)^2 + (2t)^2}{(1+t^2)^2} =$$

$$\frac{1 - 2t^4 + t^6 + 4t^2}{(1+t^2)^2} =$$

$$\frac{1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = 1$$



$$a b c = \frac{(x+5)(x-2)}{3(x+5)} = \frac{x-2}{3}$$

$$\underline{U} \rightarrow x \text{ eli } D < 0 \text{ eli } a^2 - 12 < 0$$



$$(x-2)(x-1) - 3 \cdot 4 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = 5 \text{ tai } -2$$



4b, 5, 6

Koe ke 2.12.2020 klo 8.15-->

keskiviikko 2. joulukuuta 2020 7.50

Abitti-A2-207-24 + Oma nimi ja henk. tunnus + koodi ja salasana:

Avainluku	Vahvistuskoodi
8 5 9 4	g l

Peda.net-koe:

<https://peda.net/p/pluoma/opetus/matematiikka/mtjt22327/mk2js> +
salasana joulukuusi

Huom! Erilliset A- ja B-osion tehtävätiedostot ja palautuskansiot

Opetus

Fysiikka

Matematiikka

Geogebra-ohjelman peruskäyttö

MAY1 Luvut ja lukujonot

MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt

Polynomi

Ensimmäisen asteen polynomi

Toisen asteen polynomi

Korkeamman asteen polynomit

MAA2 koe 2. jakso, s2020

+Luo sivu

MAA3 Geometria

MAA4 Vektorit

Piilota toiminnot

Petri Luoma

Tehtävät

Muokkaa Siirrä Kopioi Poista

+ Lisää tiedosto + Lisää useita tiedostoja Järjestely

MAA2 2. jakso s2020 A-osio.pdf

MAA2 2. jakso s2020 A-osio.pdf 163,1 kt

VAIN SPEEDCRUNCH SALLITTU!

MAA2 2. jakso s2020 B-osio.pdf

MAA2 2. jakso s2020 B-osio.pdf 205,2 kt

Palautuskansio A

Muokkaa Siirrä Kopioi Poista Palautukset Yhteenveto

Kirjoita A-osion vastaukset esim. yhteen Word-tiedostoon ja palauta tiedosto tänne, mieluiten pdf:nä.

Palauta kuva tai muu tiedosto

Palautuskansio B

Muokkaa Siirrä Kopioi Poista Palautukset Yhteenveto

Ja tänne B-osion vastaukset, var sä god.

Palauta kuva tai muu tiedosto