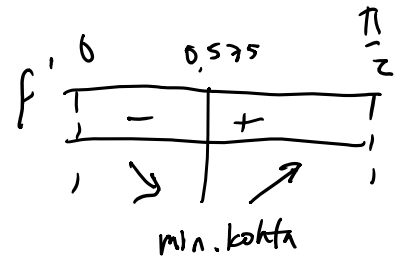
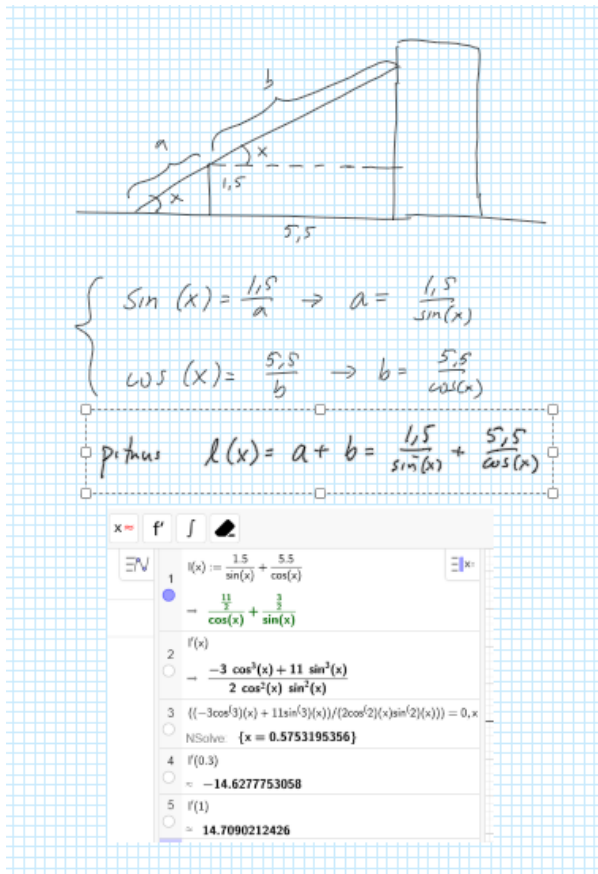


1. Tikapuut halutaan rakentaa niin, että ne ulottuvat 1,5 m korkean aidan yli toisella puolella olevan talon seinään. Talo on aidasta 5,5 m etäisyydellä. Mikä on tikapuiden ja maanpinnan välinen kulma, kun tikapuut ovat mahdollisimman lyhyet?

(8 p.)



Nuuta vielä $0,575 \text{ rad} = 33^\circ$

Vast: n. 33°

2. a) $\tan x = \sin x / \cos x$, määr. joukko x erisuuri kuin $\pi/2 + n\pi$, arvojoukko $= \mathbb{R}$. (2 p.)
b)

Missä kohdissa funktion $f(x) = -2x + \tan(2x)$ derivaatta on nolla? Määritä funktiolle $f(x)$ kohtaan $x = \pi/8$ piirretyn tangentin yhtälö. (6 p.)

Ratkaisu

Funktio f on määritelty, kun $2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, eli $x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Määritetään funktion f derivaatta.

$$f'(x) = -2 + (1 + \tan^2 2x) \cdot 2 = -2 + 2 + 2 \tan^2 2x = 2 \tan^2 2x$$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

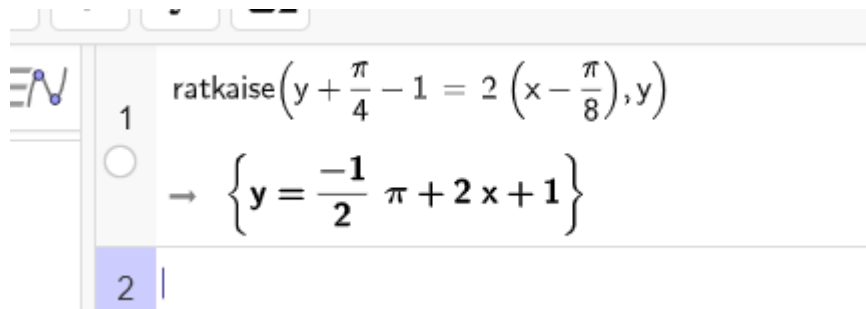
$$\begin{aligned} 2 \tan^2 2x &= 0 \\ 2(\tan 2x)^2 &= 0 \\ \tan 2x &= 0 \\ 2x &= 0 + n \cdot \pi \quad || : 2 \\ x &= n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$x_0 = \pi/8$$

$$k = f'(\pi/8) = 2 \cdot \tan^2(2 \cdot \pi/8) = 2 \cdot \tan^2(\pi/4) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y_0 = f(\pi/8) = -2 \cdot \pi/8 + \tan(2 \cdot \pi/8) = -\pi/4 + 1$$

$$\text{Tangentin yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0) \rightarrow y + \pi/4 - 1 = 2(x - \pi/8)$$



Handwritten solution showing the steps to solve for the tangent line equation:

$$\begin{aligned} &\text{ratkaise } \left(y + \frac{\pi}{4} - 1 = 2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right), y \right) \\ &\rightarrow \left\{ y = \frac{-1}{2} \pi + 2x + 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Vast: } y = 2x - \frac{1}{2}\pi + 1$$

3. Vain b:t ja c:t (4 p.) + (4 p.)

Muodosta yhdistetty funktio $(f \circ g)(x)$.

(2 p/kohta)

~~a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - 1$~~

b) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = \sin x$

c) $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = f'(x)$

Ratkaisu

~~a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = \sin(x - 1)$~~

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2 + 3 = \sin^2 x + 3$

c) $f'(x) = 2(x + 1) = 2x + 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(f'(x)) = f(2x + 2) = ((2x + 2) + 1)^2 = (2x + 3)^2$

Tunnista yhdistetyn funktion f ulkofunktio $u(x)$ ja sisäfunktio $s(x)$ ja derivoi funktio.

(2 p/kohta)

~~a) $f(x) = \sin 2x$~~

b) $f(x) = (3x - 5)^4$

c) $f(x) = \cos^2 x$

Ratkaisu

~~a) Esimerkiksi $u(x) = \sin x$ ja $s(x) = 2x$.~~

~~$f'(x) = u'(s(x)) \cdot s'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$~~

b) Esimerkiksi $u(x) = x^4$ ja $s(x) = 3x - 5$.

$f'(x) = u'(s(x)) \cdot s'(x) = 4(3x - 5)^3 \cdot 3 = 12(3x - 5)^3$

c) Esimerkiksi $u(x) = x^2$ ja $s(x) = \cos x$.

$f'(x) = u'(s(x)) \cdot s'(x) = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$

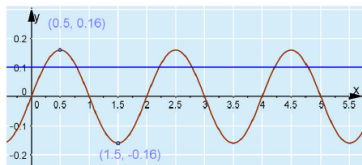
4.

Hitaasti värähtelevään jouseen ripustettiin raskas punnus. Funktio $f(t) = 0,16 \sin \pi t$ (m) ilmaisee värähtelevän punnuksen sijainnin suhteessa tasapainoasemaan kuluneen ajan t (s) funktiona.

- Kuinka suuri on punnuksen ääriasentojen välinen etäisyys?
- Millä ajan hetkillä punnus on 10 cm tasapainoaseman yläpuolella? Kuinka monta tällaista hetkeä sattuu ensimmäisen 5 sekunnin värähtelyn aikana?
- Mikä on punnuksen nopeus, kun se on 10 cm tasapainoaseman yläpuolella? (6 p)

Ratkaisu

- Ääriasenoissa funktion arvo on suurin tai pienin. Funktion f arvo on suurin, kun $\sin \pi t$ saa suurimman arvonsa 1. Tällöin funktion arvo on 0,16.
Vastaavasti $\sin \pi t$ pienin arvo on -1, joten funktion f pienin arvo on -0,16.
Ääriasentojen välinen etäisyys on $0,16 \text{ m} - (-0,16 \text{ m}) = 0,32 \text{ m}$.



- Ratkaistaan yhtälö $f(t) = 0,10$.

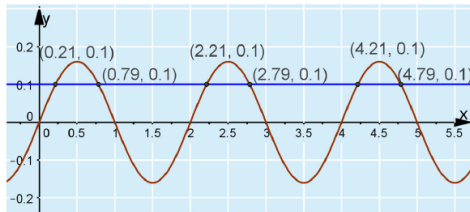
$$0,16 \sin \pi t = 0,10 \quad || : 0,16$$

$$\sin \pi t = 0,625$$

$$\pi t = 0,675... + n \cdot 2\pi \quad || : \pi \quad \text{tai} \quad \pi t = \pi - 0,675... + n \cdot 2\pi$$

$$t = 0,214... + 2n \quad \quad \quad t = 0,785... + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

5 s värähtelyn aikana kohtia ovat 0,2 s; 2,2 s ja 4,2 s sekä 0,8 s; 2,8 s ja 4,8 s. eli kohtia on kuusi kappaletta.



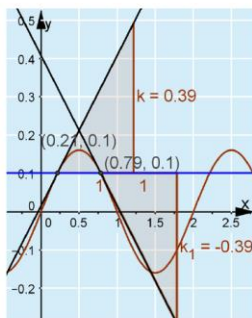
(2 p.) + (2 p.)

- Punnuksen nopeus, eli sijainnin muutosnopeus on derivaatta $f'(t)$.

$$f'(t) = 0,16 \cos \pi t \cdot \pi$$

Ylöspäin mennessä, eli esim. kohdassa 0,214... s punnuksen nopeus on $f'(0,214...) = 0,16 \cos(\pi \cdot 0,214...) \cdot \pi = 0,39... \approx 0,4 \text{ m/s}$.

Alaspäin mennessä, eli esim. kohdassa 0,785... s punnuksen nopeus on $f'(0,785...) = 0,16 \cos(\pi \cdot 0,785...) \cdot \pi = -0,39... \approx -0,4 \text{ m/s}$.



(4 p.)

5. a)

s03|

6. Määritä $\sin(x - y)$, kun $\sin x = \frac{1}{4}$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, ja $\cos y = -\frac{1}{3}$, $\pi \leq y \leq 2\pi$.
Tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.

Ratkaisu:

Jos $|x| \leq \pi/2$ ja $\pi \leq y \leq 2\pi$, on $\cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x}$ ja $\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$. Siis
 $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}) - \sqrt{\frac{15}{16}}\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{30}-1}{12} \approx 0,83$.

(4 p.)

b) Osoita, että yhtälöllä $x - \sin x = 5$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Ratk: tutkitaan funktion $f(x) = x - \sin x - 5$ nollakohtia. Esim. välillä $]1, 5[$ funktio vaihtaa merkkiä:

$f(1) < -4,84...$ ja $f(5) > 0,95...$. Koska $f(x)$ on jatkuva niin Bolzanon lauseen perusteella sillä on tällä välillä ainakin yksi nollakohta. Tämän kohdan voi kuitata kuvankaappauksella mutta lisäksi allaoleva:

Onko useita nollakohtia? Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla:

$f'(x) = 1 - \cos x$. Koska $\cos x$ arvot ovat välillä $-1 \dots 1$ niin derivaatta saa arvot $0 \dots 2$ eli se on aina ≥ 0 .

Eli $f(x)$ on kasvava eikä kuvaaja täten vaihda suuntaa $\rightarrow f(x)$:llä vain yksi nollakohta ja kysytyllä yhtälöllä vain yksi ratkaisu.

(4 p.)

6.

a) Kirjoitusvirhe, yhtälössä piti olla -3: $\tan x = \sin x / \cos x = -3 \rightarrow \sin x = -3 \cos x$ ja peruslauseen avulla $(-3 \cos x)^2 + \cos^2(x) = 1 \rightarrow$

$\cos x = -1/\sqrt{10}$ (miinus koska ollaan 2. neljänneksessä) ja edelleen $\sin x = 3/\sqrt{10}$ (plus oltava).

(4 p.)

b)

Funktion f derivaatta on

$$f'(x) = 1 + \underbrace{\tan^2 x}_{\geq 0} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

joten funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio. $\square$

(4 p.)