

Perustele vastauksesi ja laita laskujen välivaiheita näkyviin. Vastaa kolmeen tehtävään. Kustakin tehtävästä saa maks. 12 p.

1. Suorakulmion kaksi kärkeä on x -akselilla ja kaksi kärkeä käyrällä

$$y = \frac{4}{2+x^2}$$

Mitkä ovat suorakulmion sivujen pituudet, kun sen pinta-ala on suurin mahdollinen? k2010:7

Ratkaisu: Suorakulmion kanta $2x$ ja korkeus $y = 4/(2+x^2) \rightarrow A(x) = 8x/(2+x^2) \rightarrow A'(x) = (-8x^2 + 16)/(2+x^2)^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$. Merkkikaavio $\rightarrow x = \sqrt{2}$ maksimikohta jolla kanta $2\sqrt{2}$ ja korkeus $y = 1$.

2. a) Mikä yhteys on funktion $f(x)$ derivaatan $f'(a)$ ja pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn funktion $f(x)$ kuvaajan tangentin välillä?

b) Määritä $f'(1)$, kun funktion f kuvaajalla on pisteessä $(1, -\frac{3}{4})$ tangentin suora $4y + 5x = 2$.

c) Voiko funktion $f(x) = x^2$ kuvaajalla olla tangentin suora $y = x - 2$ käyrän jossakin pisteessä?

d) Mitä tarkoitetaan funktion suurimmalla arvolla? Anna esimerkki funktiosta, jolla ei ole suurinta arvoa. Voiko funktio saada suurimman arvonsa kahdessa eri pisteessä? Perustele vastauksesi esimerkillä. s2000:10

Ratk: a) Derivaatan arvo $f'(a)$ on funktiolle $f(x)$ pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

b) Ratkaise suoran yhtälö $\rightarrow y = -5/4x + 1/2$, tämän kulmakerroin $-5/4$ on kysytty derivaatan arvo $f'(1)$.

c) Suoran $kk = 1 = f'(x) = 2x \rightarrow$ kysytty piste olisi $(1/2, 1/4)$. Mutta jos siihen laitetaan tangenti niin yhtälöksi tulee $y - 1/4 = 1(x - 1/2) \rightarrow 4y - 4x = -1$. Eli ei voi olla.

d)

13. Funktion suurin arvo on funktion saamista arvoista suurin, ts. välillä $[a, b]$ määritellyn funktion f suurin arvo on $f(x_0)$, jos jokaisella arvolla $x, a \leq x \leq b$, on $f(x) \leq f(x_0)$. Esimerkiksi välillä $[-1, 1]$ määritellyn funktion $f(x) = x^2$ suurin arvo on 1, koska jokaisessa pisteessä $x, -1 \leq x \leq 1$, on $f(x) = x^2 \leq 1$ ja $f(1) = 1 = f(-1)$. Samalla on osoitettu, että funktio voi saada suurimman arvonsa kahdessa pisteessä. Mm. kaikilla reaaliarvoilla x määritellyllä funktiolla $f(x) = x$ ei ole suurinta arvoa. Jos nimittäin a olisi suurin arvo, olisi $f(a+1) = a+1 > a$, mikä on ristiriidassa määritelmän kanssa.

3. a) Määritä funktion $f(x) = -\frac{8x}{1+x^2}$ paikalliset ääriarvot. (4 p.)

b) Määritä vakio a siten että funktion $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x + a$ suurin arvo välillä $-3 \leq x \leq 10$ on 10. (8 p.)

a) $f'(x) = 8(x^2 - 1)/(x^2 + 1)^2 = 0 \rightarrow x = -1$ tai 1 . Merkkikaavio $+$ $-$ $-$ $+$ joten kohta $f(1) = -4$ on paikallinen minimi ja kohta $f(-1) = 4$ paikallinen maksimi.

b) $f'(x) = 6x^2 + 30x + 24 = 0 \rightarrow x = -4$ tai -1 . Suurin tai pienin arvo on välin päätepisteissä tai välillä olevissa deriv. nollakohdissa. Sijoitetaan arvot alkup. funktioon $\rightarrow f(-3) = a + 9, f(-1) = a - 11$ ja $f(10) = a + 9$. Näistä $a + 9$ on suurin: $a + 9 = 10 \rightarrow a = 1$.

4.

Suunnittele sellainen suoran lieriön muotoinen juomalasi, jonka pohjan paksuus on 5,0 mm, seinämän paksuus 2,0 mm, vetoisuus 2,0 dl ja jonka valmistamiseen tarvitaan mahdollisimman vähän lasia. Ilmoita lasin korkeus ja ulkopuolelta mitattu pohjan halkaisija.



Lähde: <<https://www.prisma.fi/>>. Luettu 8.4.2016.

k2017: 7

Ratkaisu:

Merkitään sisäsädettä r ja sisäkorkeutta h (mm). Tilavuusehdosta saadaan $\pi r^2 h = 200000$ (mm³).
 Pohjan tilavuus $\pi(r+2)^2 \cdot 5$
 Seinämän tilavuus $\pi[(r+2)^2 - r^2]h$
 Minimoitava lauseke on $\pi(4r+4)\frac{200000}{\pi r^2} + 5\pi(r+2)^2$.
 Derivaatta $800000(-r^{-2} - 2r^{-3}) + 10\pi(r+2) (= (r+2)(10\pi r^3 - 800000)r^{-3})$
 $\Rightarrow$ minimi saavutetaan kun $r = \sqrt[3]{\frac{80000}{\pi}} \approx 29,42$. Halkaisija on siten $2(r+2) \approx 62,84 \approx 62,8$ ja korkeus $h+5 \approx 78,55 \approx 78,6$.

5. a) Esittele derivaatan matemaattinen määritelmä.

(4 p.)

b)

(8 p.)

Funktion $g(x)$ arvoille on voimassa $-20 \leq g(x) \leq 16$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$.

k16: 9.2

Ratkaisu:

- Esittele kaava ja sen idea: raja-arvolause on erotusosamäärä eli sekantin kulmakerroin. Osoittajassa on y-koordinaattien erotus ($y = f(x)$) ja nimittäjässä x :ien erotus. Jos lausekkeen arvo on laskettavissa kohdassa $x = a$ niin derivaatta $f'(a)$ on olemassa ja $f(x)$ derivoituva tässä kohdassa.
- Määritelmän mukaan $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - f(0)) / (x - 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) / x = \lim_{x \rightarrow 0} x g(x) = 0 \cdot a = 0$ koska $g(x)$:n arvo $= a$ on rajattu välille $-20 \dots 16$ ja $f(0) = 0$. Funktiolla $f(x)$ on siis derivaatta kohdassa $x = 0$, ja sen arvo on nolla.