

Vastaa kaikkiin tehtäviin. Laita laskuihin välivaiheita näkyviin.

1. Tutkitaan rationaalifunktiota $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.
- a) Millä muuttujan x arvoilla funktio f on määritelty?
- b) Ratkaise funktion f nollakohdat.
- c) Määritä ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on positiivinen.

Ratkaisu

- a) Funktio f on määritelty, kun nimittäjä ei ole nolla.

$$\begin{aligned} x + 2 &\neq 0 \\ x &\neq -2 \end{aligned}$$

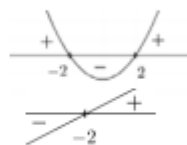
- b) Rationaalilauseke saa arvon nolla, kun osoittaja on nolla ja nimittäjä ei ole nolla.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2 \text{ tai } x = -2 \end{aligned}$$

Funktio ei ole määritelty kohdassa $x = -2$. Näin ollen ainoa nollakohta on $x = 2$.

- c) Taulukoidaan merkkikaavioon lausekkeen $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ osoittajan ja nimittäjän merkit. Osoittajan ja nimittäjän nollakohdat tiedetään a- ja b-kohdista.

	-2	2
$x^2 - 4$	+	-
$x + 2$	-	+
$\frac{x^2 - 4}{x + 2}$	-	+



Funktion arvo on positiivinen, kun $x > 2$.

2. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 6x}{3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

Ratkaisu

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 - 2} = 7$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 6x}{3x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x}(x-2)}{\cancel{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = 0 - 2 = -2$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{(x-2)^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0}$ Raja-arvoa ei siis ole olemassa

3. a) Olkoon funktio $f(x) = \frac{x^2 - 16}{4x + 16}$, $x \neq -4$. Määrittele arvo $f(-4)$ siten, että funktio on jatkuva kohdassa $x = -4$.
- b) Määritä sellainen vakio a , että funktio $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{kun } x < -3 \\ ax^2 + x, & \text{kun } x \geq -3 \end{cases}$ on jatkuva kohdassa $x = -3$.

Ratkaisu

a) Funktion raja-arvo kohdassa $x = -4$ on $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{4x + 16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x-4)}{4\cancel{(x+4)}} = \frac{-4-4}{4} = -2$.

Jotta funktio olisi jatkuva kohdassa $x = -4$, tulee funktion arvon olla sama kuin raja-arvo, eli $f(-4) = -2$.

- b) Lasketaan toispuoliset raja-arvot kohdassa $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} (ax + 1) = a \cdot (-3) + 1 = -3a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} (ax^2 + x) = a \cdot (-3)^2 + (-3) = 9a - 3$$

Funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = -3$, jos toispuoliset raja-arvot ovat samat.

$$9a - 3 = -3a + 1$$

$$9a + 3a = 1 + 3$$

$$12a = 4 \quad || : 12$$

$$a = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Funktio on jatkuva kohdassa $x = -3$, kun sen arvo kohdassa $x = -3$ on sama kuin sen raja-arvo tässä kohdassa.

$$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + (-3) = 9a - 3.$$