

1. Jaa jakokulmassa $\frac{x^3 + x - 3}{1 - x}$. Kirjoita tulos jakoyhtälömuodossa.

Ratkaisu:

$$\begin{array}{r}
 -x^2 - x - 2 \\
 1 - x \overline{) x^3 + x - 3} \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 x^2 + x - 3 \\
 \underline{-(x^2 - x)} \\
 2x - 3 \\
 \underline{-(2x - 2)} \\
 -1
 \end{array}$$

Täten jakoyhtälön nojalla $x^3 + x - 3 = (1 - x)(-x^2 - x + 2) - 1$.

2. Kalastuskunnan hoitamalla vesialueella lasketaan olevan erään vuoden alussa 300 000 siikaa. Vuosittain saaliin arvioidaan olevan 30 % vuoden alun siikakannasta. Tutki kalakannan kehitystä, kun vuosittain istutetaan a) 100 000 b) 10 000 siian poikasta.

Ratkaisu: Tämä on oppikirjan esimerkki 2 sivulla 80. Vastaus: a) Kanta kasvaa hieman, vakiintuu 330 000 yksilöön. b) Kanta romahtaa noin 33 000 yksilöön.

3. Määritä funktion $f(x) = x^3 + 2x + 4$ nollakohta viiden desimaalin tarkkuudella Newtonin menetelmällä.

Ratkaisu: Funktio on polynomina derivoituva ja derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Käytetään Newtonin algoritmia $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ eli $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n + 4}{3x_n^2 + 2}$.

Alkuarvo $x_0 = 0$ ja $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0^3 + 2 \cdot 0 + 4}{3 \cdot 0^2 + 2} = -2$.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -2 - \frac{(-2)^3 + 2 \cdot (-2) + 4}{3 \cdot (-2)^2 + 2} = -\frac{10}{7} = -1,428571429.$$

$$x_3 = -1,210337401$$

$$x_4 = -1,180044085$$

$$x_5 = -1,179509189$$

$$x_6 = -1,179509025$$

$x_7 = x_6$, joten juuren likiarvo on

viiden desimaalin tarkkuudella $x = -1,17951$.

Vastaus $x_1 = -2$, $x_2 = -1,428571429$ ja likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella $x = -1,17951$

4. Kirjoita funktion $f(x) = 3^x$ erotusosamäärän lauseke kohdassa $x = 1$ ja arvioi

numeerisesti arvoa $f'(1)$ Vertaa saatua tulosta tarkkaan arvoon $f'(1) = 3 \ln 3$. (Laske suhteellinen virhe.)

Ratkaisu: $f'(1) \approx E(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3^{1+h} - 3}{h}$, joten $E(0,01) = \frac{3^{1,01} - 3}{0,01} = 3,314007581$ ja

$$E(-0,01) = \frac{3^{0,99} - 3}{-0,01} = 3,277798748. \text{ Täten arvon } f'(1) \text{ approksimaatioksi otetaan saatujen arvioiden}$$

$$\text{keskiarvo ns. keskeisdifferenssi Siten lopulta } f'(1) \approx \frac{E(0,01) + E(-0,01)}{2} = 3,295903165. \text{ Tulos on varsin lähellä}$$

laskimen antamaa arviota

$$3 \ln 3 = 3,295836866. \text{ Tämä merkitsee vain } 0,002 \% \text{ suhteellista virhettä.}$$

On huomioitava, että eri laskinmallit voivat antaa erilaisia loppudesimaaleja.

5. Funktion $f(x) = x^x + 1$ kuvaaja rajoittaa välillä $1 \leq x \leq 3$ x - akselin kanssa alueen A .

Laske alueen A pinta-alan likiarvo käyttäen Simpsonin sääntöä ja neljää osaväliä.

Ratkaisu: Kuvio on x -akselin yläpuolella. Välin pituus on $3 - 1 = 2$, joten $h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$$A \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [(1^1 + 1) + 4(1,5^{1,5} + 1) + 2(2^2 + 1) + 4(2,5^{2,5} + 1) + (3^3 + 1)] = 15,81282333.$$