Lukujono suppenee jos $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

Erit. geom. lukujono suppenee jos $a_1 = 0$ tai $-1 < q \leq 1$

429. b) $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{\sin^{n+1} x}{2^{n+1}}}{\dfrac{\sin^n x}{2^n}} = \dfrac{(\sin x)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{\sin^n x} = \dfrac{\sin x}{2}$ = vakio

$$-1 < \frac{\sin x}{2} \leq 1 \quad | \cdot 2$$

$$-2 < \sin x \leq 2$$

tosi kaikilla x:in arvoilla

MAA9: $-1 \leq \sin x \leq 1$

• raja-arvo $-2 < \sin x < 2 \to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Sarja

= lukujonon termeistä muodostetun päättymättön summa

– merk. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c$$

– "pika-testi" hajaantumiselle:

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ sarja hajaantuu

Jos $\lim_{n\to a} a_n = 0 \Rightarrow$ tutkittava lisää

Geom. sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots$$

Geom. sarja suppenee jos: $\boxed{a_1 = 0}$, raja-arvo $= S = 0$

$$\boxed{-1 < q < 1}, \quad \boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

Esim. $1 - x + x^2 - x^3 \ldots = 5$

geom. $q = -x =$ valio

$$-1 < -x < 1$$

$-1 < -x$ ja $-x < 1$

$1 > x$ ja $x > -1$

$-1 < x < 1$

vasen puoli = geom. sarja $= \frac{a_1}{1-q} = \boxed{\frac{1}{1+x} = 5}$

$x = -\frac{4}{5}$

Esim. 4.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt[3^k]{5} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[9]{5} \cdot \sqrt[27]{5} \cdot \ldots$$

$$= 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots$$

$$= 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

eksp. = geom. sarja, $q = \frac{1}{3}$. Nyt sillä $-1 < q < 1$ eli sarja suppenee.

Sen arvo $= S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

539. $e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots = 1$

2) $q = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$

1) $a_1 = e^x \neq 0$ ei toteudu koskaan

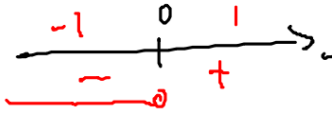
$-1 < e^x < 1$ toteutuu aina (MAA 8)

$e^x < 1$

$e^x - 1 < 0$

$e^x = 1 \quad \| \ln$

$x = \frac{\ln 1}{\ln e} = 0$



vaskea puoli on supp. geom. sarja:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \boxed{\frac{e^x}{1-e^x} = 1}$$

$e^x = 1 - e^x$

$2e^x = 1 \quad \| : 2$

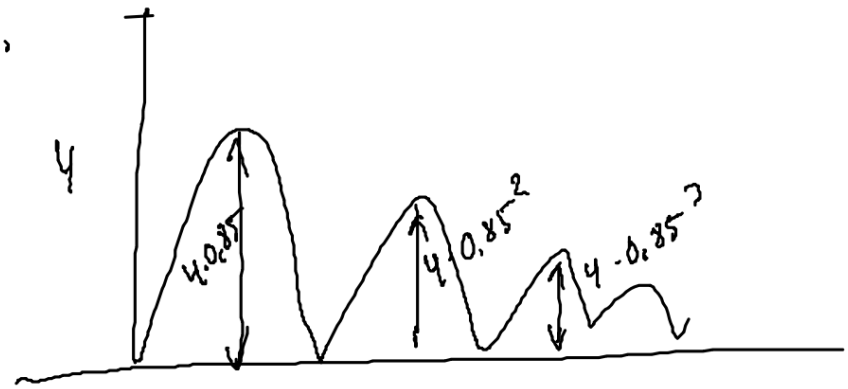
$e^x = \frac{1}{2} \quad \| \ln$

$x = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln e} = \ln \frac{1}{2} \approx -0{,}693$

V: $x = \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$

542.

(m)



s. 97:

532 – 535,

537 – 541

matka = $4 + 2\cdot 4\cdot 0{,}85 + 2\cdot 4\cdot 0{,}85^2 + \dots$

geom. sarja $q = 0{,}85$

$-1 < q < 1$ eli

sarja suppenee

$a_1 = 8\cdot 0{,}85$

$S = \frac{8\cdot 0{,}85}{1-0{,}85} = 45{,}33$

V: n. 49 m