

1. b) Määritä lauseen $(A \wedge \neg B) \vee B$ totuusarvotaulu. (2p.)

Ratkaisu:

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge \neg B) \vee B$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

c) Onko luku 1159 alkuluku? (2p.)

Ratkaisu: Jos luku 1159 on jaollinen jollakin alkuluvulla, niin alkuluku on enintään

$\sqrt{1159} \approx 34,04$. Tutkitaan, onko 1159 jaollinen millään lukua 34,04 pienemmällä alkuluvulla. Alkuluvut ovat 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 ja 31.

$$1159:2=579 \text{ jää } 1$$

$$1159:3=386 \text{ jää } 1$$

$$1159:5=231 \text{ jää } 4$$

$$1159:7=165 \text{ jää } 4$$

$$1159:11=105 \text{ jää } 4$$

$$1159:13=89 \text{ jää } 2$$

$$1159:17=68 \text{ jää } 3$$

$$1159:19=61$$

Koska $1159 = 19 \cdot 61$, niin luku 1159 ei ole alkuluku.

Vastaus: Luku 1159 ei ole alkuluku.

3.a) Osoita, että luku $n^3 - n$ on aina jaollinen luvulla kolme, kun n on kokonaisluku. (3p.)

Ratkaisu: Nyt $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1) = (n-1)n(n+1)$. Koska n on kokonaisluku, niin $n-1$, n ja $n+1$ ovat kolme peräkkäistä kokonaislukua. Tällöin jokin näistä on jaollinen luvulla kolme, joten luku $n^3 - n$ on aina jaollinen luvulla kolme. $\square$

b) Määritä Eukleideen algoritmin avulla lukujen 19941 ja 19665 suurin yhteinen tekijä. (3p.)

Ratkaisu:

$$19941 = 1 \cdot 19665 + 276$$

$$19665 = 71 \cdot 276 + 69$$

$$276 = 4 \cdot 69$$

$$\text{syt}(19665, 19941) = 69$$

Vastaus: Lukujen 19665 ja 19941 suurin yhteinen tekijä on 69.

4. Kultasepän liikkeeseen oli murtauduttu lauontain vastaisena yönä. Kateissa oli arvokas timanttisormus. Silminnäkijähavaintojen mukaan varkaat olivat liikkeellä autolla. Konstaapeli Koivunen haastatteli ihmisiä ja sai selville, että ainoastaan Aapo, Batu tai Cisse olisivat voineet olla murron takana. Lisäksi konstaapeli Koivunen sai selville, että Cisse ei tee koskaan keikkaa ilman Aapoa ja että Batu ei osaa ajaa autoa. Auta konstaapeli Koivusta ratkaisemaan rikos.

Ratkaisu: Merkitään A="Aapo on syytön"

B="Batu on syytön"

C="Cisse on syytön"

Lauseet ovat tällöin $\neg C \Rightarrow \neg A$ (koska Cisse ei tee keikkaa ilman Aapoa) ja $\neg B \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ (koska Batu tarvitsee rikostoverin).

A	B	C	$\neg C$	$\neg A$	$\neg C \Rightarrow \neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg C$	$\neg B \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$	$(\neg C \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg B \Rightarrow (\neg A \vee \neg C))$
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Koska joku kolmesta oli syyllinen, niin vaihtoehtoa kaikki syyttömiä (ylin rivi), ei oteta huomioon.

Neljän viimeisen rivin perusteella Aapo on varmasti syyllinen, mutta Batun ja Cissen syyllisyydestä ei ole tietoa. (Toivottavasti Aapo paljastaa konstaapeli Koivuselle mahdollisen rikostoverinsa.)

Vastaus: Aapo on varmasti syyllinen, mutta Batun ja Cissen syyllisyydestä ei ole tietoa.

6. Määritä Diofantoksen yhtälön $112x + 73y = 1$ yksi ratkaisu.

Ratkaisu: Tehdään Eukleideen algoritmi.

$$112 = 1 \cdot 73 + 39$$

$$73 = 1 \cdot 39 + 34$$

$$39 = 1 \cdot 34 + 5$$

$$34 = 6 \cdot 5 + 4$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1$$

$$\text{syt}(112, 73) = 1$$

$$1 = 5 - 1 \cdot 4 = 5 - 1 \cdot (34 - 6 \cdot 5) = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 34 = 7 \cdot (39 - 1 \cdot 34) - 1 \cdot 34 = 7 \cdot 39 - 8 \cdot 34$$

$$= 7 \cdot (112 - 1 \cdot 73) - 8 \cdot (73 - 1 \cdot 39) = 7 \cdot 112 - 15 \cdot 73 + 8 \cdot 39$$

$$= 7 \cdot 112 - 15 \cdot 73 + 8 \cdot (112 - 1 \cdot 73) = 112 \cdot 15 + 73 \cdot (-23)$$

Yksittäisratkaisu on $x_0 = 15$ ja $y_0 = -23$.

7. Osoita, että luku $\sqrt{7}$ on irrationaaliluku.

Ratkaisu: Jos luvun q neliö on 7, niin luku q on irrationaaliluku.

Oletus: $q^2 = 7$

Väitös: Luku q on irrationaaliluku.

Todistus: Tehdään vastaoletus: Luku q on rationaaliluku.

Vastaoletuksen nojalla on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n , että $q = \frac{m}{n}$. Jos molemmat luvut ovat jaollisia seitsemällä, osamäärä $\frac{m}{n}$ voidaan supistaa luvulla 7. Jos supistuksen jälkeen osoittaja ja nimittäjä ovat molemmat vielä jaollisia seitsemällä, niin supistetaan luvulla 7 jne. Ennen pitkää päädytään supistettuun muotoon $q = \frac{a}{b}$, jossa korkeintaan toinen kokonaislukuista a ja b on jaollinen luvulla 7.

Koska $q^2 = 7$, niin $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 7 \Leftrightarrow a^2 = 7b^2$. Luku a^2 on siis jaollinen luvulla 7. Koska $a^2 = a \cdot a$, niin a on jaollinen luvulla 7. On siis olemassa sellainen luku k , että $a = 7k$. Tällöin $(7k)^2 = 7b^2 \Leftrightarrow 49k^2 = 7b^2$ eli $7k^2 = b^2$. Luku b^2 on siis jaollinen luvulla 7. Koska $b^2 = b \cdot b$, niin b on jaollinen luvulla 7. Siis luvut a ja b ovat jaollisia luvulla 7. Nyt on päädytty ristiriitaan, koska enintään toinen luvuista a ja b on jaollinen luvulla 7. Siis vastaoletus on väärä ja väitys oikea. $\square$

9. Määritä luvun $3^{91} \cdot 2 + 7^{11} \cdot 5$ viimeinen numero.

Ratkaisu: $3^{91} \cdot 2 + 7^{11} \cdot 5 \equiv (3^2)^{45} \cdot 3 \cdot 2 + (7^2)^5 \cdot 7 \cdot 5 \equiv (-1)^{45} \cdot 6 + (-1)^5 \cdot 35 \equiv -6 - 35 \equiv -41 \equiv 9 \pmod{10}$

Luvun $3^{91} \cdot 2 + 7^{11} \cdot 5$ viimeinen numero on 9.

Vastaus: Luvun $3^{91} \cdot 2 + 7^{11} \cdot 5$ viimeinen numero on 9.