

$$621. \quad f'(x) = 2 - (1 + \tan^2 x) = 0$$

Määr.joukko

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$1 - \tan^2 x = 0$$

$$\tan^2 x = 1 \quad \parallel \sqrt{}$$

$$\tan x = 1 \quad \text{tai} \quad \tan x = -1$$

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = \tan \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$\text{tai} \quad x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$$

$\tan x$ jaksollinen $\rightarrow$ merkkikaavioon riittää yksi jakso
 $n=0$ $n=-2$

	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	-	+	-	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		min	max	

vain $\frac{\pi}{4}$ tark. välillä vain $-\frac{\pi}{4}$ tark. välillä

V : min. kohta $-\frac{\pi}{4} + n\pi$
 max. kohta $\frac{\pi}{4} + n\pi$

Lukujono

a_3 a_5
↓ ↓

Fibonaccin lukujono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

"Seuraava jäsen = kahden edellisen summa"

- Lukujono koostuu jäsenistä / termeistä, järjestyksellä on väliä
- Lukujonoja on $\begin{cases} \text{päätyviä (MAA9)} \\ \text{äärellinen} \end{cases}$ ja $\begin{cases} \text{päättymättömiä (MAA13)} \\ \text{ääretön} \end{cases}$
- Lukujono nimetään yleensä $a_n, b_n, \dots$
missä n = termin indeksi = järjestysluku jonossa = 1, 2, 3, ...
vrt. $f(x), g(x)$ = positiiv. kokon. luku

- Jos a_n lauseke on tiedossa, niin mikä tahansa termi on helppo laskea

Esim. $a_n = \frac{n^2}{n+1} = n:s \text{ termi}$

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4} \quad \text{jne.}$$

$$a_{100} = \frac{100^2}{100+1} = \frac{10000}{101}$$

- Vainkea ongelma on päätellä a_n :n
(näseke annetuilla lukujonon termeillä)

Esim. $n \mid a_n =$ positiiviset parilliset kokonaisluvut

a)

n	a_n
1	2
2	4
3	6

$$a_n = 2n$$

b)

n	a_n
1	0
2	1
3	0
4	1

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ pariton} \\ 1, & n \text{ parillinen} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$$

- $a_n =$ lukujonon yleinen termi

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

- Fibonacci on esimerkki rekursiivisesta lukujonosta jolle ei voi muotoilla a_n :n lauseketta analyyttisessä muodossa vaan

n :s termi lasketaan edellisten termien avulla

$$1, 1, 2, 3, 5, \dots$$

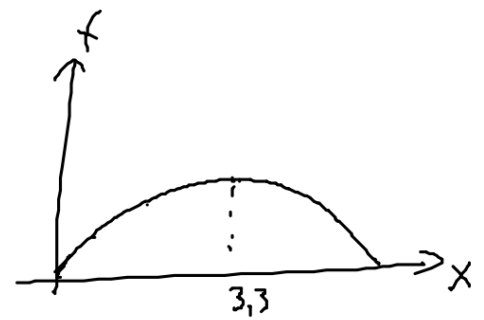
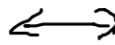
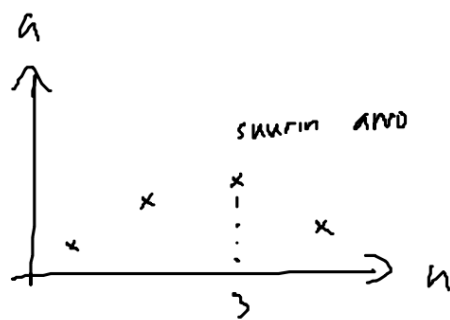
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_{50} = a_{49} + a_{48} = \dots$$

Lukujonon ominaisuuksia

- lukujono voi olla kasv./väh., sillä voi olla suurin/pienin jne.
- yleensä lukujonon ominaisuuksia tutkitaan vastaavan funktion avulla:

$$a_n \longrightarrow f(x) \longrightarrow a_n$$



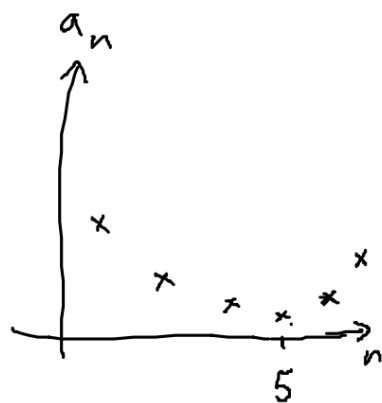
716. $a_n = \frac{n^2 + 24}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Pienin termi?

$$f(x) = \frac{x^2 + 24}{x}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 24) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 24}{x^2} = \frac{x^2 - 24}{x^2} = 0$$

DS. no lake. $x^2 - 24 = 0$
 $x = \pm \sqrt{24} \approx 4,9$



	0	$\sqrt{24}$	
f'			
	-		+
f			

pienin arvo = $f(\sqrt{24})$

$$a_4 = \frac{4^2 + 24}{4} = 10 = \frac{50}{5}$$

$$a_5 = \frac{5^2 + 24}{5} = \frac{49}{5}$$

V: a_5

$$702. \quad a) a_n = n^2 = 289 \quad \parallel \sqrt{\quad}$$

$$n = \sqrt{289} = 17$$

$$V: 0n, \quad a_{17} = 289$$

$$S. 102: \quad 701, 702 b, 704 a \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

$$S. 112: \quad 710 \quad \left(\sum_{i=1}^{10} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \right)$$

$$713, 714, 717$$