

Yleistä

keskiviikko 1. marraskuuta 2017 10.18

Kurssin peda.net sivut:

<https://peda.net/p/pluoma/opetus/fysiikka/ffl228>

Täältä löytyy kaikki tarvittava tieto

Petri Luoma

Tasainen liike

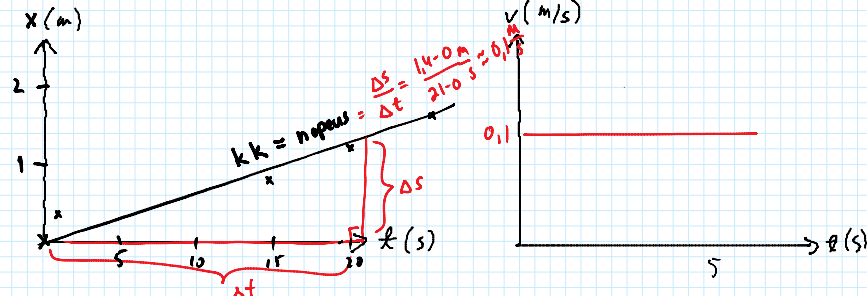
13. marraskuuta 2017 10:16

Avainsanoja:
Tasainen suoraviivainen liike
(t,s)- ja (t,v)-kuvaajat
Peruslaskut ja -kuvaajat

<https://phet.colorado.edu/fi/simulation/legacy/moving-man>

op. työ 5. 8: mittaus tulokset taulukkoon + piirrä sen (t,s)- ja (t,v)-kuvaajat LoggerPro:lla

t (s)	s (m)
0,9	0,40
14,6	0,80
20,0	1,20
25,7	1,60
0	0

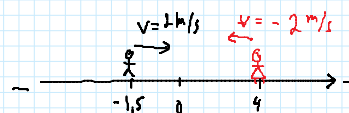
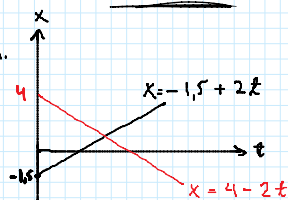


- kappaleen nopeus = (t,x)-kuvaajan kulmakertoimen eli $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, suunta osoitetaan +/- merkillä

- kappaleen kulkema matka = (t,v)-koordinaatistossa kuvaajan ja t-akselin välin pinta-ala

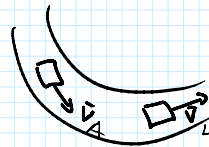
$$-x = x_0 + vt$$

Esim.



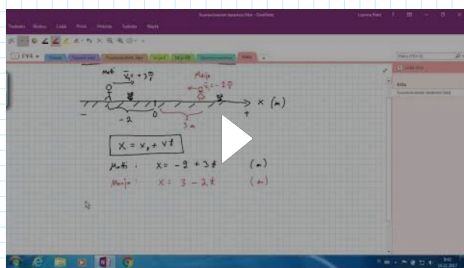
- opetus.tv: <https://opetus.tv/fysiikka/fy1/tasainen-liike/>
- opetus.tv: <https://opetus.tv/fysiikka/fy1/keskinopeus-ja-hetkellinen-nopeus/>
- opetus.tv: <https://opetus.tv/fysiikka/fy1/kihtiiva-liike/>

Kohteesta <<https://peda.net/p/luoma/opetus/fysiikka/fy1228/aihe-17?session-id=d1ba3013-6b27-4615-996f-c557968c9cc3>>

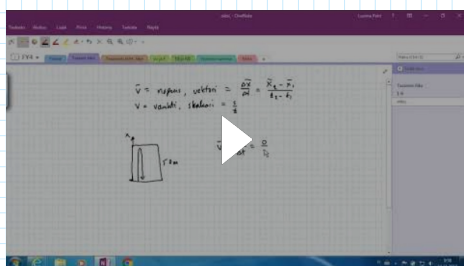


nopeuden muutos =
vauhti ja/tai suunta
muutos

Matti ja Maija video: <https://youtu.be/C-SNuaiOlyw>



Nopeuden ja vauhdin ero: <https://youtu.be/bGsk21jvVtw>



1-6

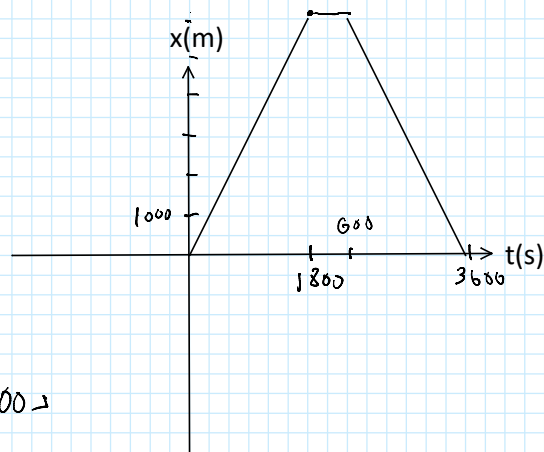
$$t_1 = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}, \quad t_2 = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}, \quad t_3 = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}$$

$$v_1 = 3,5 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = -3,5 \text{ m/s}$$

a)



S. 14-15

1-2

1-3

1-5

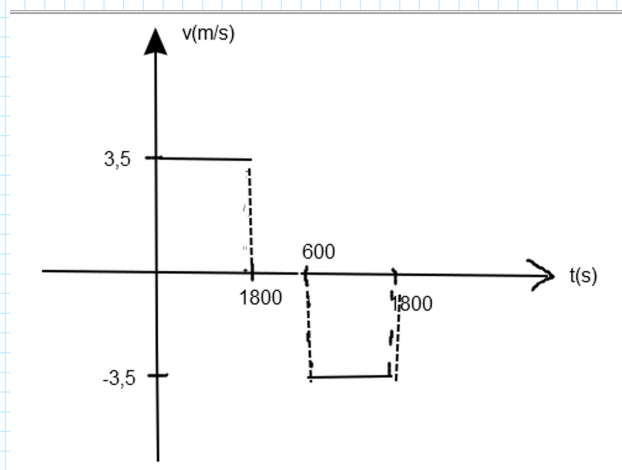
1-7

1-10

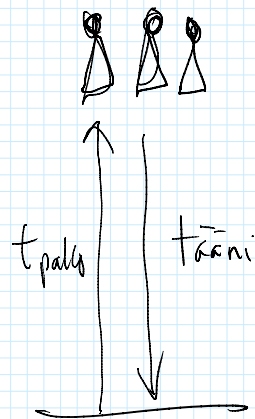
1-13

$$x = x_0 + v_0 \cdot t = 3,5 \text{ m/s} \cdot 1800 \text{ s} = 6300 \text{ m}$$

b) Pinta-sofita



Otettu näyttöleike: 30.11.2018 15.13



$$s = vt \rightarrow t = \frac{s}{v}$$

$$t_{\text{pallo}} + t_{\text{ääni}} = 2,4 \text{ s}$$

$$x = 16,5 \text{ m}$$

$$v_{\text{ääni}} = 340 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{pallo}} = \frac{x}{t_{\text{pallo}}}$$

Tasaisesti kiihtyvä liike

13. marraskuuta 2017 10:18

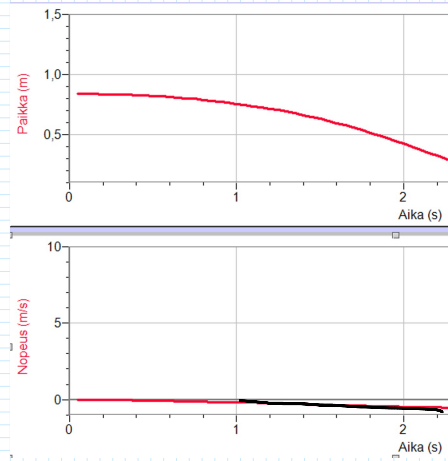
Avainasioita:
tasaisesti kiihtyvä liike, hetkellinen nopeus, hetkellinen kiihtyvyys, keskinopeus.

<https://phet.colorado.edu/fi/simulation/legacy/moving-man>

(t,s)-, (t,v)- ja (t,a)-kuvaajat
Loggerpron käyttö + vaunurata ja paikka-anturit

Opetus.tv: <https://opetus.tv/fysiikka/fy4/yleinen-yksiuotteinen-llike/>

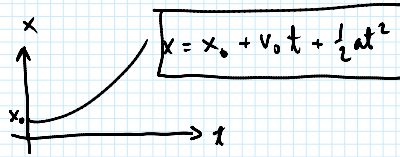
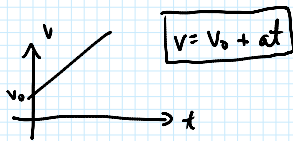
LoggerPro + Vernier peruskäyttö: <https://youtu.be/V3IYtEAZ9fi>



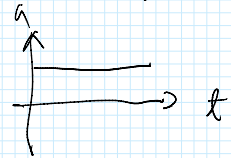
← alaspäin ankeam
parabelin
pitiäkin:
 $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
(s.19)

V muuttuu jokin sekunti
yhtä paljon → tas.kihti.löke

$$(t,v) - \text{suoran kk} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



$$V_k = \frac{v_0 + v}{t}, \quad s = v_k t$$



$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}, \quad \text{yksikkö}$$

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

KAAVOJA			
Mekaniikka			
Suure, laji, määritelmä	Tunnus	Yksikkö	Kaava
Etenemisliike			
matka	s	m	$s = vt$
nopeus	v	m/s	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
kiihtyvyys	a	m/s ²	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
Tasaisesti muuttuva etenemisliike			
loppunopeus	v	m/s	$v = v_0 + at$
paikka	x	m	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

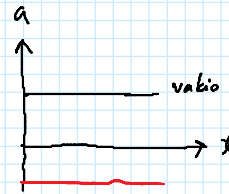
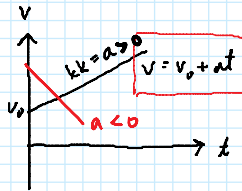
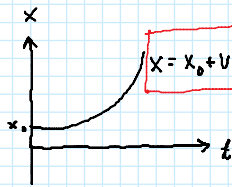
Otettu näyttöleike: 5.1.2018 10:31

1. Kytke LabQuest USB-porttiin
2. Kytke paikka-anturi LabQuestiin (muista irroittaessasi painaa lukitusnasta alas)
3. Käynnistä LoggerPro
4. Kasa vaunuvätkä
5. Vaunun virka
6. Loggeriin sopivat asetukset + mittaus päälle

Summa summarum:

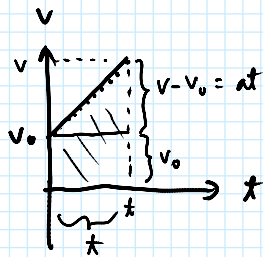
- Eli :
- nopeus muuttuu tasaisesti $\rightarrow$ kiihtyvyys a on vakio
 - $\bar{a}$ on vekt. suure, etumerkki kertoo onko kyse kiihtyvästä (+) vai hidastavasta (-) liikkeestä

- $\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$, $\bar{a}$:n voi vaikuttaa pelkkä $\bar{v}$:n suunnan muutos!



kulmak = $\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{t}$
 $\rightarrow v - v_0 = at$
 $[a] = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$

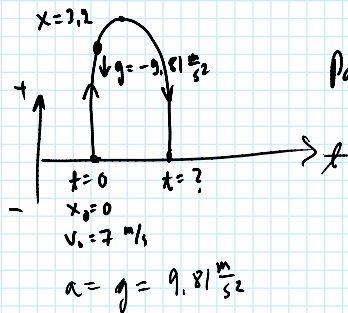
Esim.



pinta-ala (t, v) -koord. = kuljetettu matka

$A = A_{\square} + A_{\triangle} = v_0 t + \frac{t \cdot at}{2} = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
 HUOM! a voi olla negatiivinen

Esim.



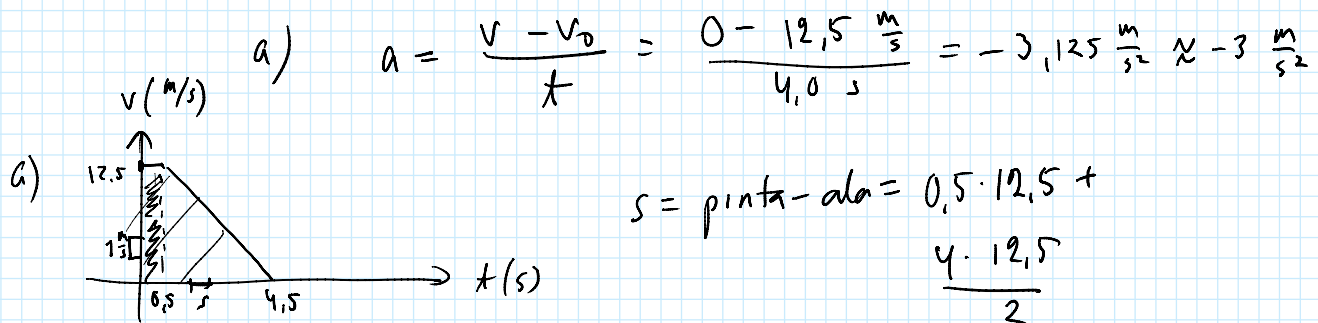
Pallon heitto :

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
 $3,2 = 0 + 7t + 5t^2$
 $\downarrow$
 $t = 0$ tai $t = 0,7$

2-7

$$V_0 = 45 \text{ km/h} = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad : 3,6$$

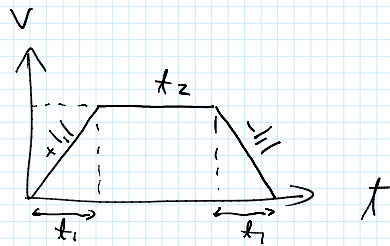
$$t = 4,0 \text{ s} \quad V = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



c) reakcio: $s_1 = v t_1$
 parvo: $s_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$

$$a = 1,1 \text{ m/s}^2 \quad v_0 = 0$$

$$v = 155 \text{ km/h} = 43,0556 \text{ m/s}$$



kiihd. ja jarrutus aika: $v = at_1 \rightarrow t_1 = \frac{v}{a} = 39,1414 \text{ s}$

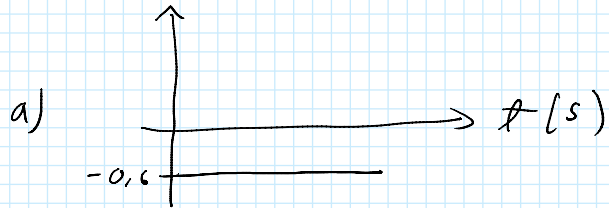
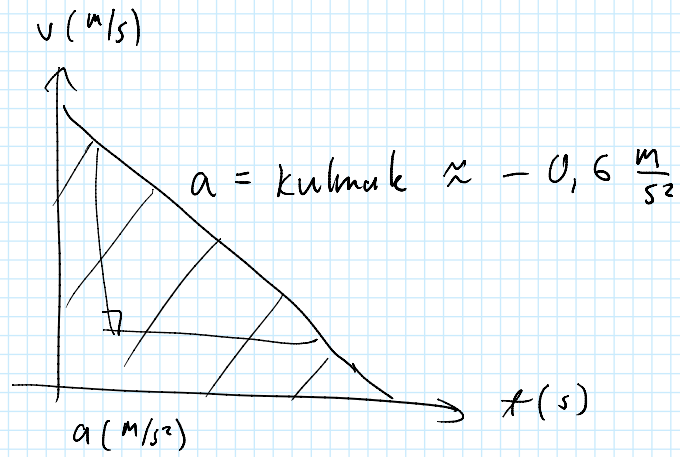
yht. $2t_1 = 78,2828 \text{ s} = 1,3047 \text{ min}$

Tähtiön $2s = 2 \cdot \frac{1}{2} at^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,1 \cdot 39,1414^2 = 1,68 \text{ km}$

tasaisesta nopeudesta $145 \text{ km} - 1,68 \text{ km} = 143,305 \text{ km}$

aika $t_2 = \frac{s}{v} = \frac{143,305 \text{ km}}{155 \text{ km/h}} = 0,9246 \text{ h} = 55,477 \text{ min}$

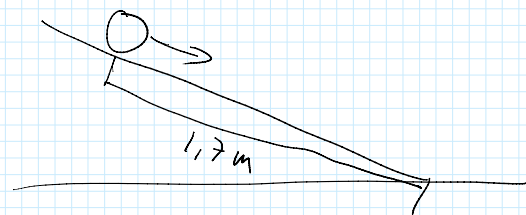
aika yht. $= t_1 + t_2 \approx 57 \text{ min}$



b) matka = (t, v) -koord.
 pinta-ala =
 $\frac{5.5 \cdot 9}{2} \text{ m} \approx 25 \text{ m}$

$$v_k = 1,9 \text{ m/s} \quad v_0 = 0$$

$$x = 1,7 \text{ m}$$



$$a) \quad \boxed{v_k = \frac{v + v_0}{2}}$$

$a = \text{vakio}$

$$v_k = \frac{v}{2} \quad | \cdot 2$$

$$v = 2v_k = 3,8 \text{ m/s}$$

$$b) \quad \boxed{x = v_k \cdot t} \quad || : v_k$$

$$t = \frac{x}{v_k} = \frac{1,7 \text{ m}}{1,9 \text{ m/s}} = 0,89474 \text{ s}$$

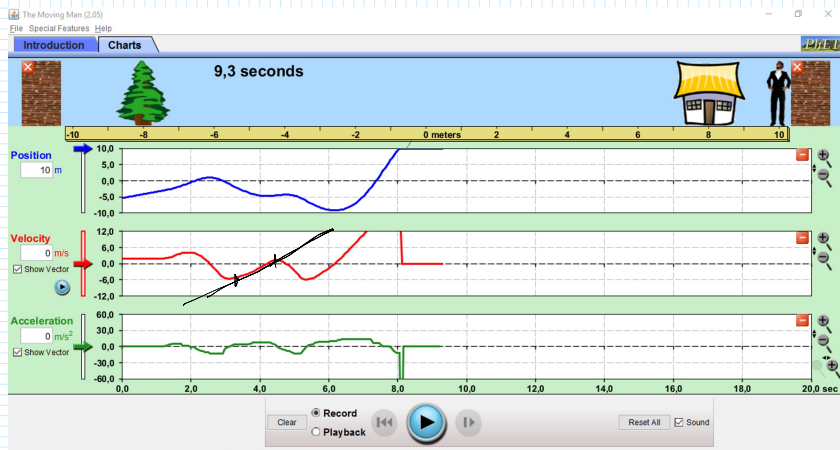
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3,8 \text{ m/s}}{0,89474 \text{ s}} \approx 4,2 \text{ m/s}^2$$

Hetkellinen nopeus ja kiihtyvyys, keskinopeus ja -kiihtyvyys

16. marraskuuta 2017 15:23

Phet Simulations: The Moving Man, voit vaihdella esim. a:ta tyypin lähdettyä liikkeelle --> ei-tasainen kiihtyvä liike

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/moving-man>



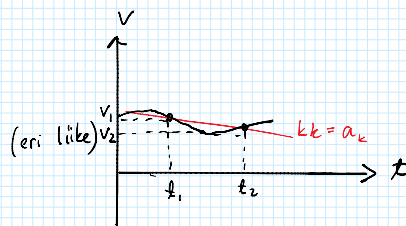
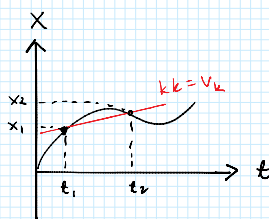
(t, x) - kuvaaja

(t, v) - kuvaaja

(t, a) - kuvaaja

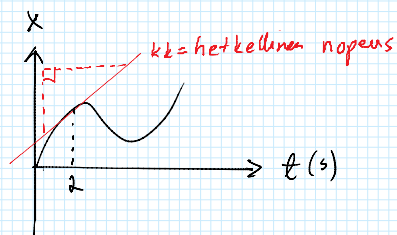
- keskinopeus: $v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ = pisteiden (t_1, x_1) ja (t_2, x_2) kautta kulkevan suoran kulmak. (sekantin)

keskikiihtyvyys: $a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ = pisteiden (t_1, v_1) ja (t_2, v_2) kautta kulkevan suoran kulmak. (sekantin)

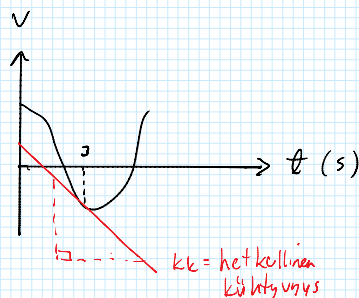


- hetkellinen { nopeus : piirretään haluttuun kohtaan tangentti -> sen kulmakertoin (= derivaatan arvo) kiihtyvyys on kysytty hetkellinen suure

Määritä $v(2s)$:



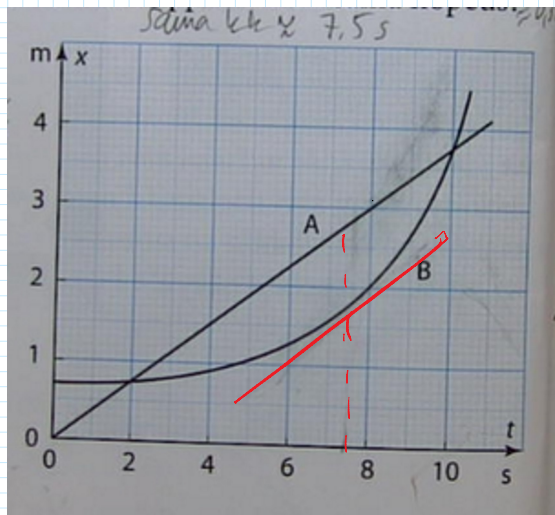
Määritä $a(3s)$:



Vielä tangentin kk:sta

http://mathinsight.org/applet/ordinary_derivative_limit_definition Sekantin kk lähestyy tangentin vastaavaa kun $x_2 - x_1$ lähestyy nollaa

http://mathinsight.org/applet/derivative_function Tangentin kk kertoo minkä tahansa funktion muutosnopeuden



a)

0...8 s

A: 3 m

B: $2 - 0,7 \text{ m} = 1,3 \text{ m}$

b)

keskenopeus 2...10 s

$$v_k = \frac{3,7 - 0,7 \text{ m}}{10 - 2 \text{ s}} = \frac{3 \text{ m}}{8 \text{ s}}$$

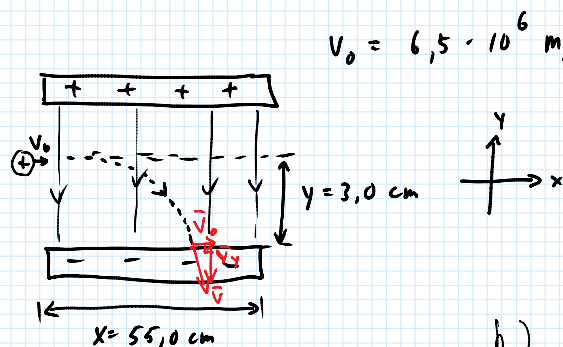
 $\approx 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c)

sama nopeus
kun B:n tangentilla
sama suunta kuin
A:lla

n. 7 s kohdalla


$$c) a = \frac{15 - 10 \frac{m}{s}}{6 - 4 s}$$
$$\approx 2,5 \frac{m}{s^2}$$
$$3 - 9$$



$$v_0 = 6,5 \cdot 10^6 \text{ m/s} , a_y = 1,2 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- b) y -akselin suunnassa
liike tasaisesti kiihtyvää:
 $y = \frac{1}{2} a t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y}{a}}$

c) $x = v_0 t_1$

d) $v_y = a t_1$

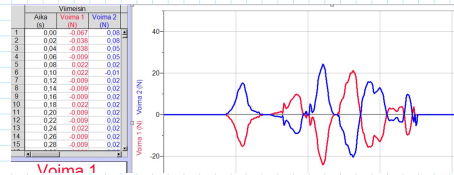
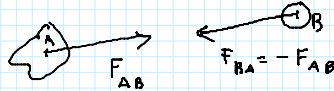
$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{v_0}\right)$$

Vuorovaikutus ja voima

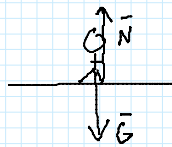
13. marraskuuta 2017 11:15

- kappaleiden välinen vuorovaikutus: kosketus- tai etävuorovaikutus
- luonnossa havaitaan neljä perus-vuorovaikutusta:
 - sähkömagn. } selittää normaalielämän ilmiöt
 - gravitaatio } hiukkas- ja ydin fys.
 - vakua } heikko
- Newtonin III laki: voiman ja vastavoiman laki

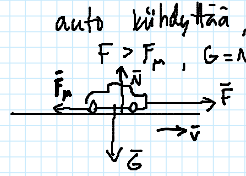


- voimakuvio = vapaa kappalekuva: piirrää "oikean" kehoisilla nuolilla kappaleeseen vaikuttavat voimat (ei N III:n mukaisia vastavoimia jotka vaikuttavat toiseen kappaleeseen)

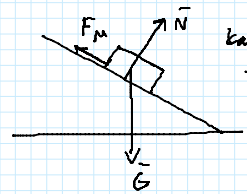
Esim.



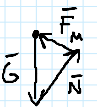
poika paikallaan,
 $G = N$



auto kiihtyy,
 $F > F_M, G = N$

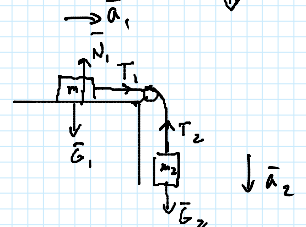


kappale paikallaan
→ voimien summa = 0



G kohtisuoraan alas
 $N \perp$ pintaan vastoin

T = narun tukivoima = jännitys, venymättömälle langalle
 $\begin{cases} T_1 = T_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases}$ langan suuntainen



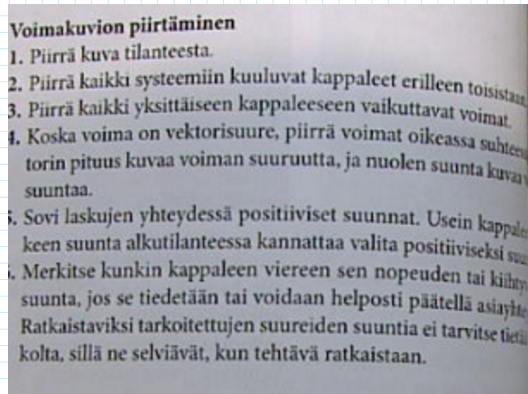
Pöörös Geogebra:n vektori-, suora- ja monikulmio-työkaluilla ??

Massa vs. paino

- massa : kuvaa kappaleen liikuttamisen vaikeutta tai siihen kohdistuvan gravitaation suuruutta
tunnus m , yksikkö kilogramma = 1 kg
- paino = kappaleeseen kohdistuva painovoima,
tunnus G , yksikkö newton = 1 N
Yleensä $G = mg$, missä g = putoamiskiihtyvyys = $9,81 \text{ m/s}^2$ (Maan pinnalla)

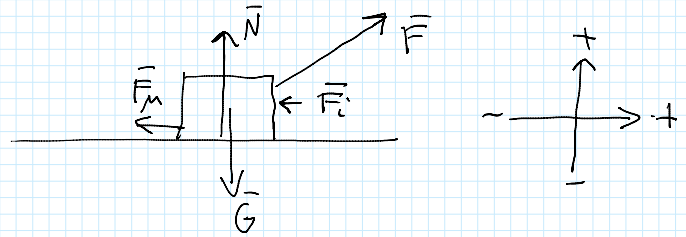
Voimakuvio

maanantai 15. tammikuuta 2018 8.40

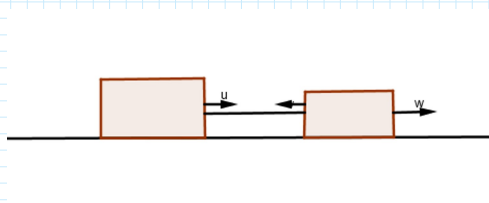


Otettu näyttöleike: 10.1.2018 14:54

Piirrä vain kappaleeseen vaikuttavat voimat, ei vastavoimia.



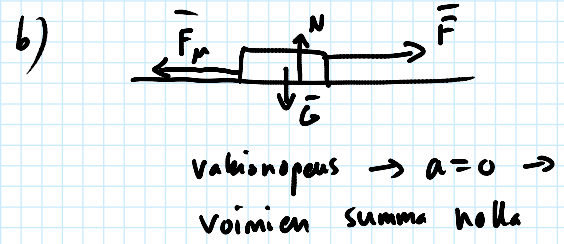
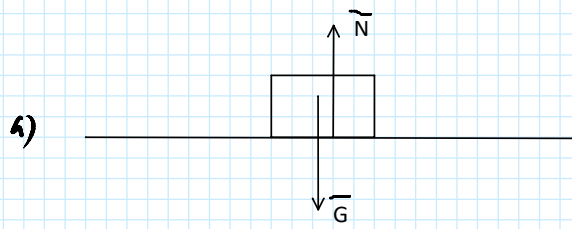
Voimakuvio Geogebra: piirrä normityökalulla ja lopuksi pöytäfilan asetuksista ruudun koko ja akselit pois näkyvistä



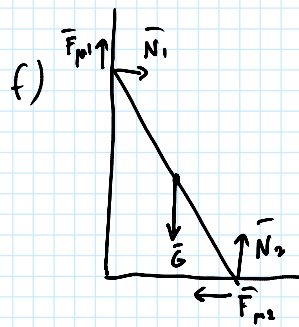
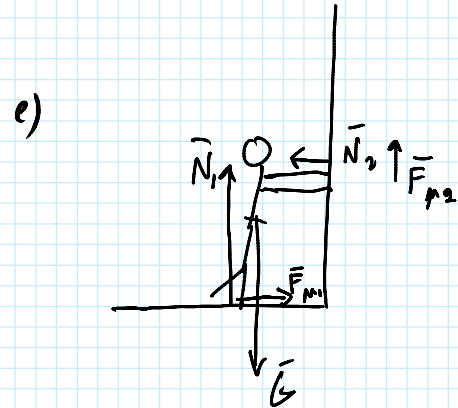
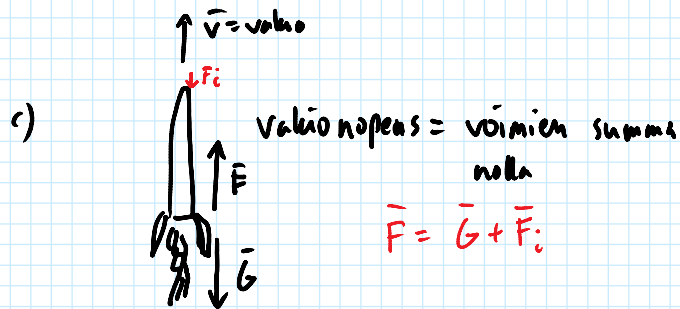
Otettu näyttöleike: 15.1.2018 8.41

$$\text{yhtälöparin} \begin{cases} F - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases}$$

ratk. Geogebra (syötä m_1 , m_2 ja $m-1$)



$$\rightarrow \begin{cases} y\text{-aksi: } N = G \\ x\text{-aksi: } F = F_{\mu} \end{cases}$$



opp. l. 5. 48 $\rightarrow$ NI ja NII

NII: • m vakio, F kasvaa $\rightarrow a$ kasvaa
 F vakio, m kasvaa $\rightarrow a$ pienenee $\rightarrow \Sigma F = ma$

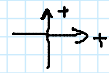
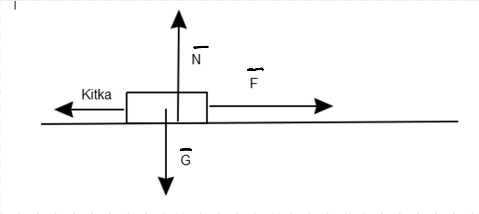
NI Jatkuvuuden laki: Jos kpl ei ole vuorovaikutuksessa muiden kappaleiden kanssa, niin se pysyy paikallaan tai jatkaa suorav. liikettään vakionopeudella

NII Dynamiikan perustaki: • $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \text{kokonaisvoima}$
 • Jos $\Sigma \vec{F} = 0$ niin $\vec{a} = 0$ eli

kappale on levossa tai tasaisessa liikkeessä

$\Rightarrow$ liiketilan muuttaminen vaatii voiman $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

a)



$$F_1 = 755 \text{ N}$$

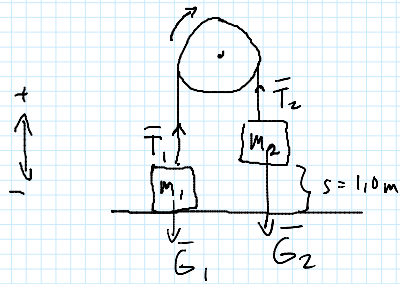
$$F_m = 620 \text{ N}$$

$$m = 35 \text{ kg}$$

Otetty näyttöleike: 14.12.2018 15:17

b) Pystysuunnassa $N - G = 0$ eli $N = G$
 Vaaka suunnassa $755 \text{ N} - 620 \text{ N} = 135 \text{ N} = \Sigma F$

c) $\Sigma F = ma \rightarrow a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{135 \text{ N}}{35 \text{ kg}} \approx 3,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



$$m_1 = 7,0 \text{ kg}$$

$$m_2 = 9,0 \text{ kg}$$

Vergleichsrichtung (Anker):

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$$

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$$

$$\sum F = ma$$

$$v = v_0 + at$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$G = mg$$

S. 56

a) Kuppel 1: $\begin{cases} -G_1 + T = m_1 a \\ \text{Kuppel 2: } -G_2 + T = m_2 a \end{cases}$

$$\begin{cases} -m_1 g + T = m_1 a \\ +m_2 g + T = m_2 a \end{cases} \quad | \cdot (-1) |$$

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a - m_2 a = a(m_1 - m_2) \quad || : (m_1 - m_2)$$

$$a = \frac{-m_1 g + m_2 g}{m_1 - m_2} = \underline{\underline{1,21 \frac{m}{s^2}}}$$

$$T = m_1 a + m_1 g$$

$$T \approx \underline{\underline{77 \text{ N}}}$$

b)

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

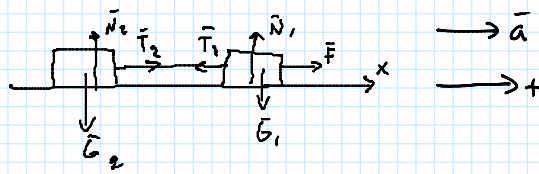
$$s = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{s}{\frac{1}{2} a}} \rightarrow v = at \approx 1,6 \frac{m}{s}$$



$$a = 1,5 \frac{m}{s^2}$$

$$-N + mg = ma$$

$$N = mg - ma$$



$$m_1 = 230 \text{ g} \quad F = 8,5 \text{ N}$$

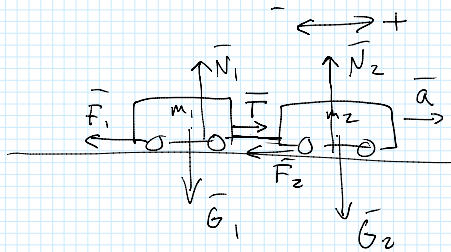
$$m_2 = 330 \text{ g}$$

$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$, langan jännitys väluo
ja $|\vec{a}|$ sama (vektoreiden laake)

Liikkeyhtälöt x- aks. Summassa:

vekt. muoto kpl 1
kpl 2

skalaarimuoto kpl 1
kpl 2



$$a = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$m_1 = 1050 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1450 \text{ kg}$$

$$F_1 = 190 \text{ N}$$

$$F_2 = 35 \text{ N}$$

Perävaunun likeyhtälö:

$$\sum \vec{F} = \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{T} = m_1 \vec{a}$$

Liikkeen suuntainen likeyhtälö (skalaari):

$$-F_1 + T = m_1 a$$

$$T = F_1 + m_1 a = 190 \text{ N} + 1050 \text{ kg} \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 715 \text{ N}$$

Vast: n. 720 N eli C -kohta

Voimien summa

13. marraskuuta 2017 11:16

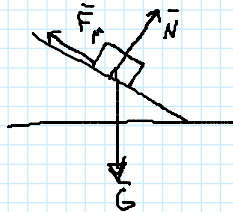
- N II : $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$



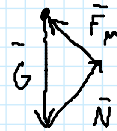
voimien vektorisumma

- Jos $\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow$ kappale tasapainossa liikkumisen suhteen

Esim.



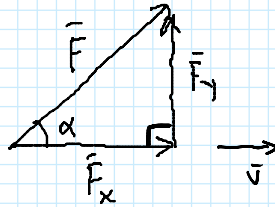
$\Sigma \vec{F} \rightarrow$



$= \vec{0}$

$\rightarrow$ kappale ei liiku (tai v=vakio.)

- kaikki vektorit voidaan jakaa erilaisiin komponentteihin, yleensä kohtisuoriin



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \sin \alpha$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$$

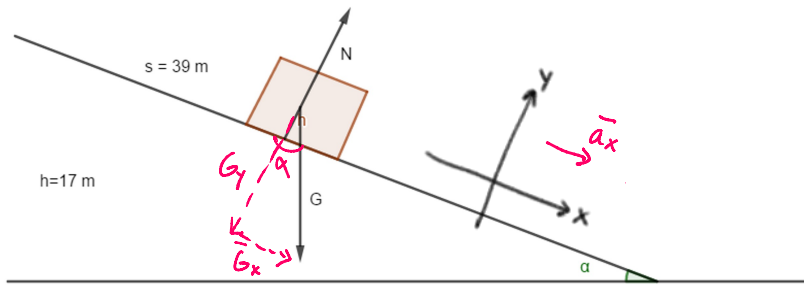
$\rightarrow$ tee tasap. yhtälöt erikseen valituille x- ja y-suunnille ja ratkaise kysytyt suuret

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_x, & \text{yleensä } = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = m \vec{a}_y & \text{---} \end{cases}$$

6-10. Kelkkailussa käytettävän kelkan jalasten luis-to-ominaisuuksia testattiin hyvin sileäksi jäädytetyssä rinteessä. Rinteen korkeusero oli 17 m ja pituus 39 m. Kelkka lähti liikkeelle levosta. Kitkan voi olettaa hyvin pieneksi. Kelkan massa on 42 kg. Laske

- kelkkaan kohdistuvan painon rinteeseen suuntaisen komponentin suuruus
- kelkan nopeus rinteiden alaosassa.

$S = 39 \text{ m}$
 $H = 17 \text{ m}$
 $M = 42 \text{ kg}$
 $G = 9,81 \text{ m/s}^2$
 $V_0 = 0 \text{ m/s}$



$$a) \quad G_x = G \sin \alpha = mg \sin \alpha \approx 180 \text{ N}$$

$$G_y = G \cos \alpha$$

$$b) \quad a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = 4,276 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = at \\ s = \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

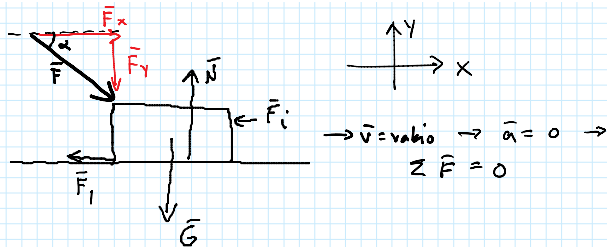
$$v = a \cdot \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as} \approx 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\alpha = 39^\circ$$

$$F = 350 \text{ N}$$

$$F_i = 25 \text{ N}$$

$$m = 47 \text{ kg}$$



$$\alpha = 39^\circ$$

- N II vektorimuodossa:

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_i + \vec{G} + \vec{N} = 0$$

- F jaottuna x - ja y -akselien suuntiin:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot \sin \alpha$$

- Liike-yhtälö skalaarimuodossa mikseen x -akselin ja y -akselin suunnassa

$$\begin{aligned} x: \quad & \begin{cases} -F_i + F_x - F_i = 0 \\ N - G - F_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} F_i &= F_x - F_i = F \cdot \cos \alpha - F_i \\ &= 350 \text{ N} \cdot \cos 39^\circ - 25 \text{ N} \\ &= \underline{\underline{250 \text{ N}}} \end{aligned} \\ y: \quad & \begin{aligned} N &= G + F_y \\ &= mg + F \cdot \sin \alpha \\ &\approx \underline{\underline{680 \text{ N}}} \end{aligned} \end{aligned}$$

6-5

6-8

6-10

5. 67-70

6-14. Sähköjunassa matkustava abiturienti päätti mitata junan kiihtyvyyden langassa riippuvan avainnipun avulla. Junan kiihdyttyä hän arvioi ripustuslangan muodostavan 15 asteen kulman pystysuoraan nähden. Kuinka suuri oli tämän perusteella junan kiihtyvyys? Piirrä selkeä voimakuvio, josta ilmenevät myös nopeuden ja kiihtyvyyden suunnat. [K2010/5]

$$\alpha = 15^\circ$$

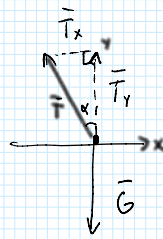
$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$T_y = T \cos \alpha$$

$$T_x = T \sin \alpha$$

Newton II:

$$x: \begin{cases} -T_x = -ma \\ y: \begin{cases} T_y - G = 0 \end{cases} \end{cases}$$



↑
v
↑
a

junan kiihtyvyys

$$\frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{ma}{mg}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{g}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = ma \rightarrow T = \frac{ma}{\sin \alpha} \\ T \cos \alpha = mg \end{cases}$$

$$\frac{ma}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = mg$$

$$a = g \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = g \tan \alpha \approx \dots$$

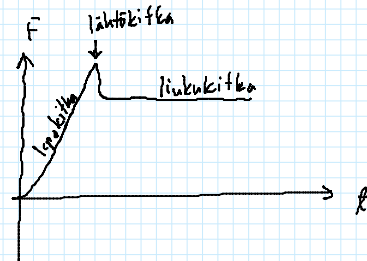
puolittain

$$\frac{g \cos \alpha}{\sin \alpha} \approx 52 \text{ N}$$



- opp. työt 1-2 : 4 ryhmää, jokaiseen voima-anturi + telinekeräin

- kitka = kosketusvoima, vastustaa pintojen liukumista
- tyypillinen kuvaaja:



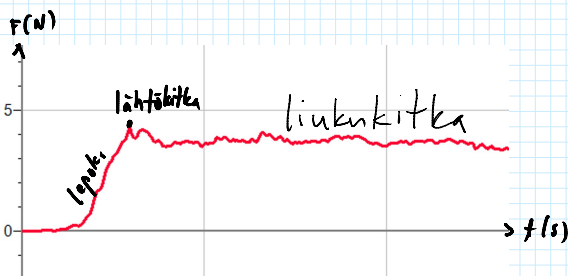
lepokitka = estää liikkeelle lähtöä
 lähtökitka = max. lepokitka
 liukukitka = estää liukumista

voimat olla myös kiihdyttävä voima

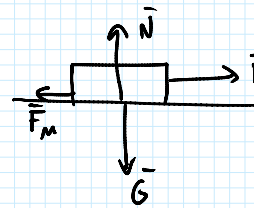


- kitka suoran verrannollinen pinnan tukivoimaan N : $F_f = \mu N$, vaakasuoralla pinnalla $F_f = \mu mg$
- μ = liukukitkakerroin
 μ_s = lähtökitkakerroin

- kappaleen edessä pyörimällä (= vierimällä), vastusvoima ei ole kitka vaan vierimisvastus



Otettu näyttöleike: 19.1.2018 10:17



$\vec{a} = 0$
 y-suunt. $N = G = mg$
 x-suunt. $F_f = F$

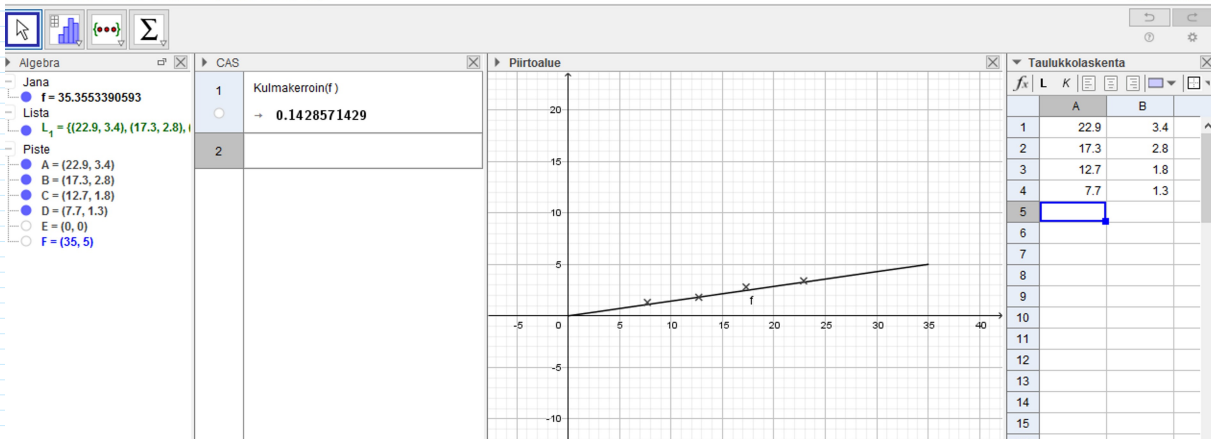
m	mg = N	F _f
2,23	22,3	3,9
1,73	17,3	2,8
1,27	12,7	1,8
0,770	7,7	1,3

$$F_f = \mu N$$

$$y = kx$$

μ = ko. pintojen välinen kitkakerroin

nettoasio muokkaa näytä asetukset työkauti ikkuna unje



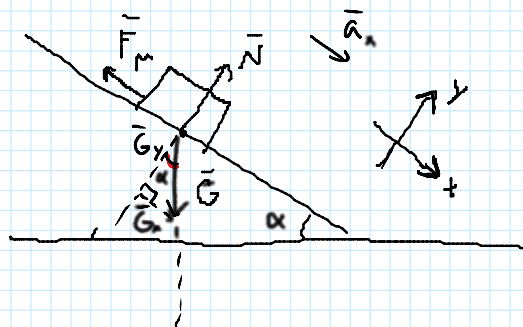
Otettu näyttöleike: 19.1.2018 10:38

Vast: liukukitkakerroin $\mu = 0,14$

MAOL:

Kitkakertoimia (ohjeellisia)

Ainepari	Lepokitkakerroin	Liikeitkakerroin
teräs ja jää	0,027	0,014
teräs ja teräs (voitelu)	0,11	0,05
teräs ja teräs (ei voitelua)	0,15	0,12
kumi ja jää (märkä)	0,1	0,08
kumi ja jää (kuiva)	0,2	0,15
kumi ja asfaltti (märkä)	0,6	0,5
kumi ja asfaltti (kuiva)	0,8	0,7
puu ja kivi	0,7	0,3
puu ja puu	0,5	0,3
teflon ja teflon	0,04	0,04



7-9. Laskettelijan kokonaismassa on 85 kg. Hän laskee rinnettä, jonka kaltevuuskulma on 25° . Lumen ja suksien välinen kitkakerroin on 0,15. Laske laskettelijan kiihtyvyys laskun alussa, jolloin ilmanvastus ei vielä vaikuta merkittävästi hänen kiihtyvyyteensä.

1, 3, 5 vaskeas. pinnalla, $N = mg$

12, 14, 16 kallava pinta, $N = G_y$

$$m = 85 \text{ kg}$$

$$\alpha = 25^\circ$$

$$\mu = 0,15$$

$$F_\mu = \mu N, G = mg$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$G_x = mg \sin \alpha$$

$$G_y = mg \cos \alpha$$

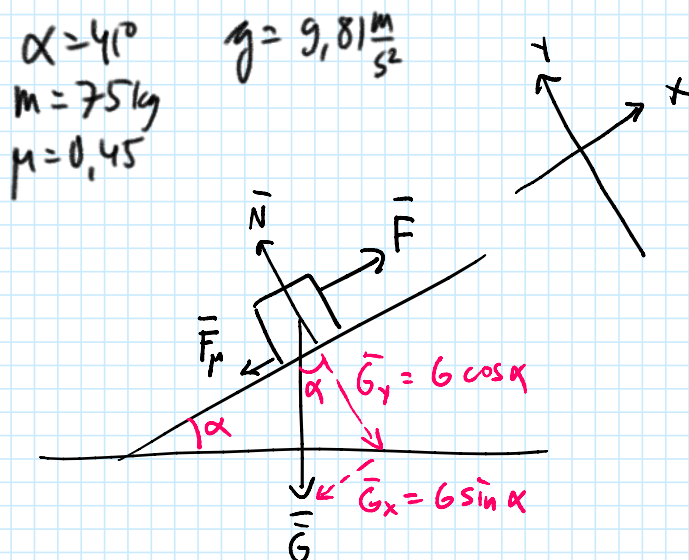
$$N \perp \begin{cases} x: G_x - F_\mu = ma_x \\ y: N - G_y = 0 \rightarrow N = G_y = mg \cos \alpha \end{cases}$$

$F_\mu = \mu N$

$$\mu mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_x$$

$$a_x = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

7-12. Laatikkoa vedetään vakionopeudella ylös lastauslaiturille kaltevaa tasoa käyttäen. Tason kaltevuuskulma vaakatasoon nähden on 41° . Laatikon massa on 75 kg. Liukukitkakerroin tason ja laatikon pohjan välillä on 0,45. Kuinka suuri on tason suuntainen vetävä voima?

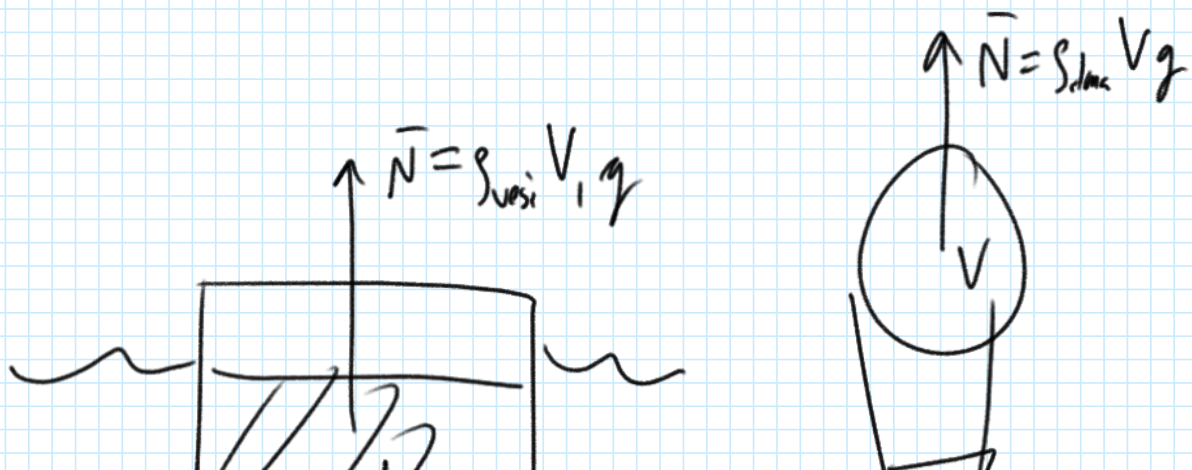


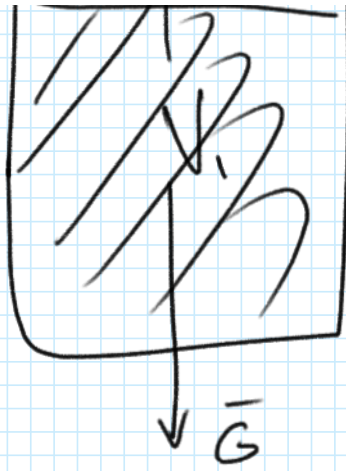
Vakionopeus $\rightarrow a = 0$.

$$N \parallel \begin{cases} x: F - F_\mu - G_x = 0, \\ y: N - G_y = 0 \Rightarrow N = G_y \end{cases} \quad F_\mu = \mu N = \mu G_y = \mu mg \cos \alpha$$

$$F - \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0$$

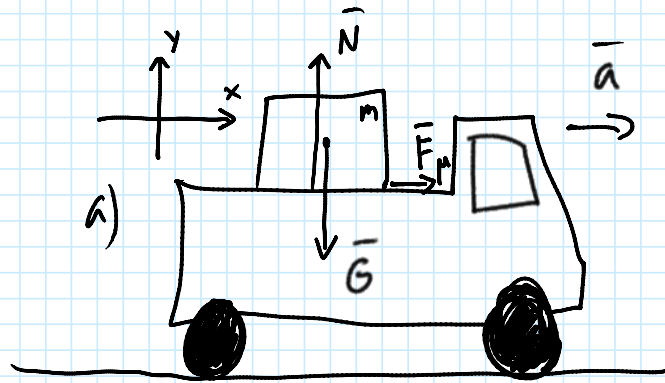
$$F = mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \approx 730 \text{ N}$$





7-14

29. marraskuuta 2017 8:18



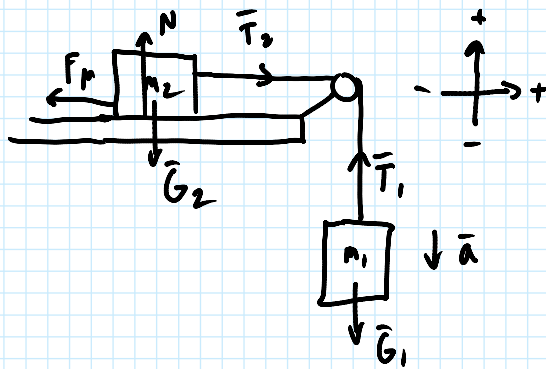
$$m = 165 \text{ kg}$$

$$\mu_0 = 0,37$$

$$a = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Vaakas. pinta $\rightarrow N = G = mg \rightarrow F_\mu = \mu mg = ma$. Lasketaan
annettua liuktyvyyttä vastaava lepokitkakerroin:

$$\mu = \frac{F}{N}$$



$$m_1 = 3.0 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2.0 \text{ kg}$$

$$\mu = 0.20$$

lanka venymätön:

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = T$$

$$|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = a$$

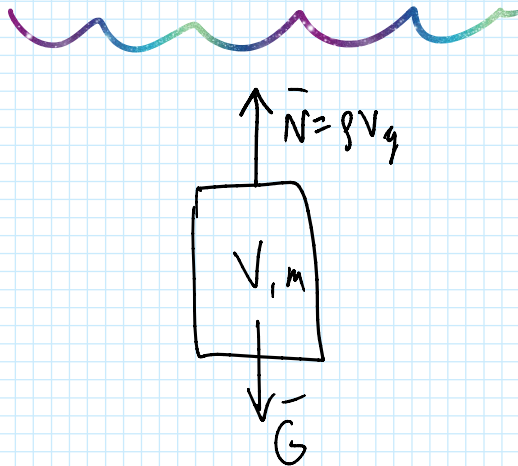
CAS

Ratkaise({T-m1*g=m1*a,T-y*m2*g=m2*a},{T,a})

1

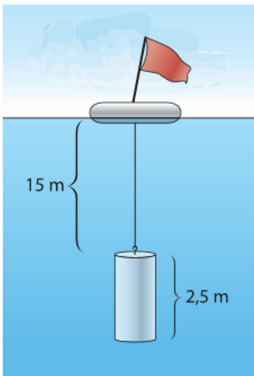
→ $\left\{ \left\{ T = \frac{g m_1 m_2 y - g m_1 m_2}{m_1 - m_2}, a = \frac{-g m_1 + g m_2 y}{m_1 - m_2} \right\} \right\}$

2



$\rho = \text{nesteen tiheys}$

E Esimerkki 1



Tsunamitutkimuksissa käytettävä sylinterin muotoinen mittalaite on upotettu 15 m:n syvyydelle merenpinnasta kuvan mukaisesti. Laitteen kannen ja pohjan pinta-ala on $0,82 \text{ m}^2$. Meriveden tiheys tällä alueella on 1015 kg/m^3 .

- a) Laske hydrostaattisesta paineesta aiheutuvien voimien suuruudet, jotka kohdistuvat mittalaitteen ylä- ja alapintaan.
b) Laske laitteeseen kohdistuvan nosteen suuruus.

Ratkaisu

$$\rho = 1015 \text{ kg/m}^3, g = 9,81 \text{ m/s}^2, A = 0,82 \text{ m}^2$$

- a) Voiman suuruus laatikon yläpinnalla on

$$\begin{aligned} F_1 &= p_1 A = \rho g h_1 A \\ &= 1015 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 15 \text{ m} \cdot 0,82 \text{ m}^2 \\ &= 122,473 \text{ kN} \approx 120 \text{ kN} \end{aligned}$$

ja alapinnalla

$$\begin{aligned} F_2 &= p_2 A = \rho g h_2 A \\ &= 1015 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 17,5 \text{ m} \cdot 0,82 \text{ m}^2 \\ &= 142,885 \text{ kN} \approx 140 \text{ kN}. \end{aligned}$$

- b) Laitteeseen kohdistuvan nosteen suuruus on

$$N = F_2 - F_1 = 142,885 \text{ kN} - 122,473 \text{ kN} \approx 20 \text{ kN}.$$

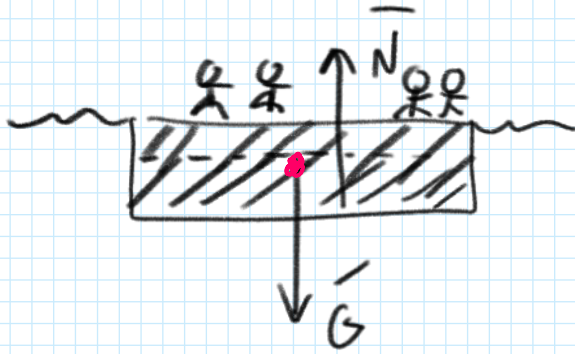
Vastaus

- a) 120 kN ja 140 kN b) Nosteen suuruus on 20 kN.

$$\begin{aligned} b) \quad N &= \rho V g = \\ &= 1015 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,82 \text{ m}^2 \cdot 2,5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1015 \cdot 9,81 \cdot 0,82 \cdot 2,5 \\ &= 20412,1575 \end{aligned}$$

8-17. Kesämökille rakennetaan laiturin styroksikellukkeiden päälle. Laiturin puuosien massa on 95 kg, ja styroksin tiheys on 25 kg/m^3 . Kuinka monta $0,075 \text{ m}^3$:n kelluketta tarvitaan kannattelemaan laituria ja neljää 75 kg painavaa henkilöä?



$$m_l = 95 \text{ kg}$$

$$\rho_{st} = 25 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{vesi} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$m = 75 \text{ kg}$$

$$V_{kelluke} = 0,075 \text{ m}^3$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$m = \rho V$$

$$N \uparrow : N = G$$

$$\rho_{vesi} V g = m_l g + 4 m g + x \cdot \rho_{st} \cdot V_{kelluke} g$$

$x \cdot V_{kelluke}$

$$x (\rho_{vesi} V_{kelluke} g - \rho_{st} \cdot V_{kelluke} g) = m_l g + 4 m g$$

$$x \approx 5,4$$

$$V: 6 \text{ kelluketta}$$

8-9. Meressä kelluu kuution muotoinen jääkappale, jonka tilavuus on 64 m^3 . Kuinka suuri osa jääkappaleesta on vedenpinnan yläpuolella? Meriveden tiheys on 1030 kg/m^3 ja jään tiheys 920 kg/m^3 .

$$V = 64 \text{ m}^3$$

$$\rho_{\text{vesi}} = 1030 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{jää}} = 920 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$A =$ pohjan pinta-ala

$$\text{kpl paikallaan} \rightarrow \Sigma F = N - G = 0$$

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V$$

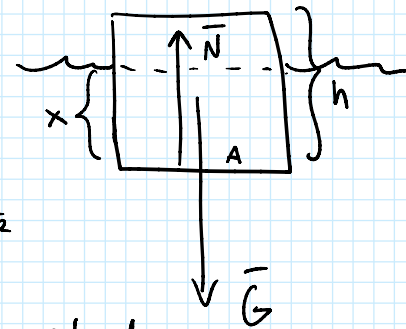
$$N = G$$

$$\rho_{\text{vesi}} V_x g = m g$$

$$\rho_{\text{vesi}} A x = \rho_{\text{jää}} V$$

$$\rho_{\text{vesi}} A x = \rho_{\text{jää}} A h$$

$$\rho_{\text{vesi}} \cdot x = \rho_{\text{jää}} \cdot h \rightarrow x = \left(\frac{\rho_{\text{jää}}}{\rho_{\text{vesi}}} \right) h = 0,89 h$$



$$h^3 = 64 \text{ m}^3$$

$$h = 4 \text{ m}$$

↑
vähimmäisessä demossa osuuden V

8-4

8-8

7-12

7-14

7-16

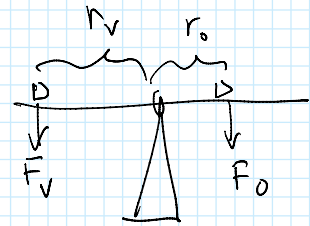
$$N = \rho V g$$

↑
vähimmäisessä

opp. työ 2 yhdessä: särkele punnukseja niin että aisa pysyy tasapainossa

ylei. lätkä = $G = 1 \text{ N}$
pönnäky = 1 tuma

vasen		oikea	
$F_o \text{ (N)}$	$r_o \text{ (cm)}$	$F_v \text{ (N)}$	$r_v \text{ (cm)}$
1	3	1	3
1	18	2	9
1 + 1	18 + 9	3	9



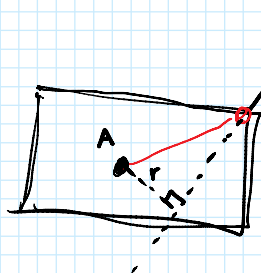
→ tasapaino kun

$$F \cdot r_o = F_v \cdot r_v$$

→ Momentti akselin A suhteen:

$$M_A = F \cdot r$$

$r =$ voiman vaikutussuoran
kohtisuora etäisyys A:sta



$$[M] = [F] \cdot [r] = \text{Nm}$$

M_A pyrkii vääntämään kappaletta A:n ympäri:



S. 90: 9-4

9-7

9-10

9-12

– voimien vaikutus:



$$F_1 = F_2 \rightarrow \text{kpl}$$

levossa tai tas.

liikkeessä

($\vec{v} = \text{vakio}$, suuntaus ja
suureta vakioita)



$$F_1 > F_2 \rightarrow$$

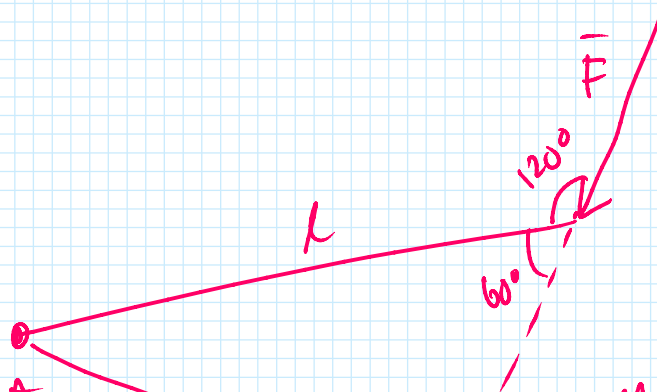
kpl kiiht.

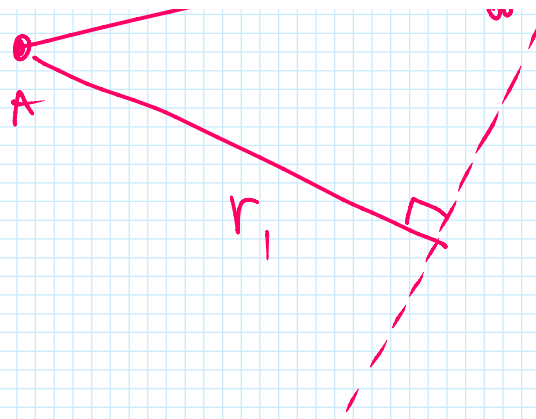
liikkeessä

$$\Sigma F = m \cdot a$$

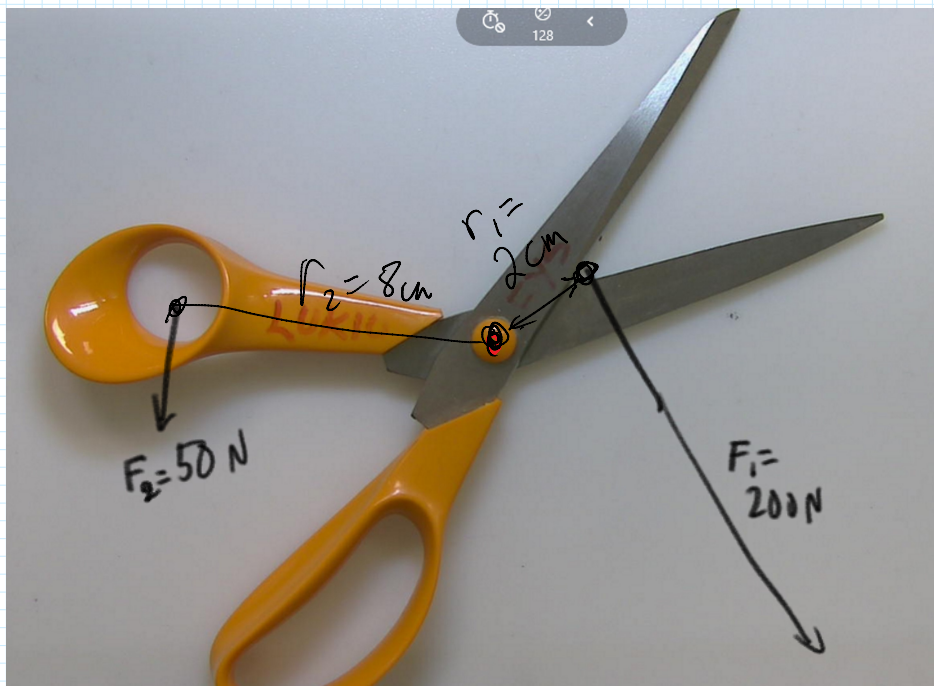


kpl pyörii





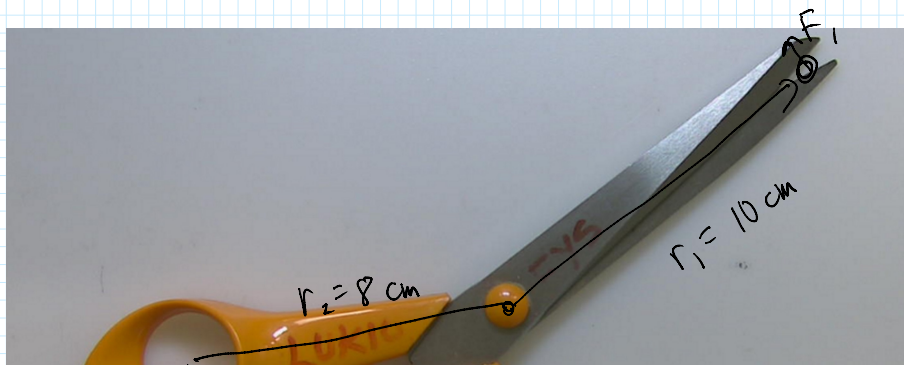
$$M_A = r_{\perp} F$$
$$= l \sin 60^\circ \cdot F$$



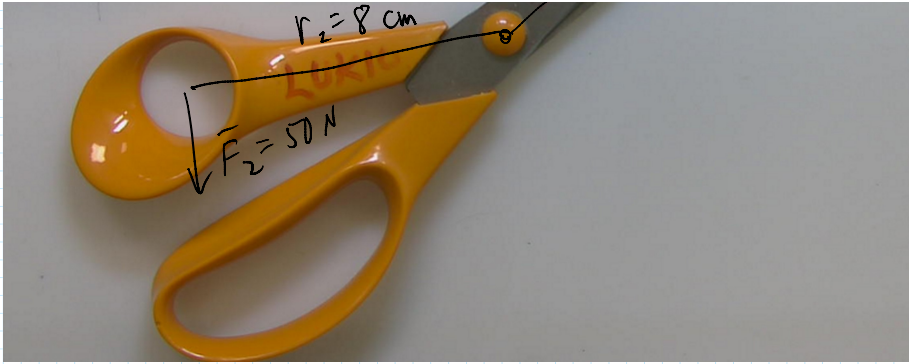
$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$\rightarrow F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1} = 200 \text{ N}$$

Otettu näyttöleike: 10.1.2019 8.37

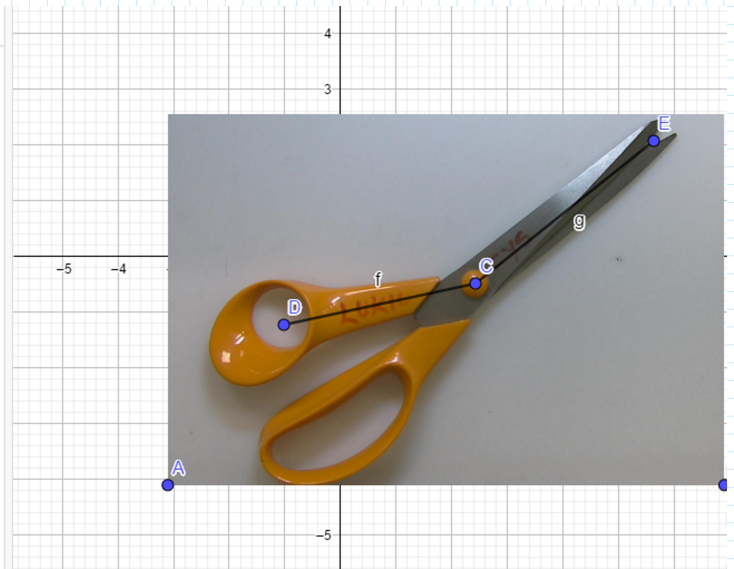


$$F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1} = 40 \text{ N}$$



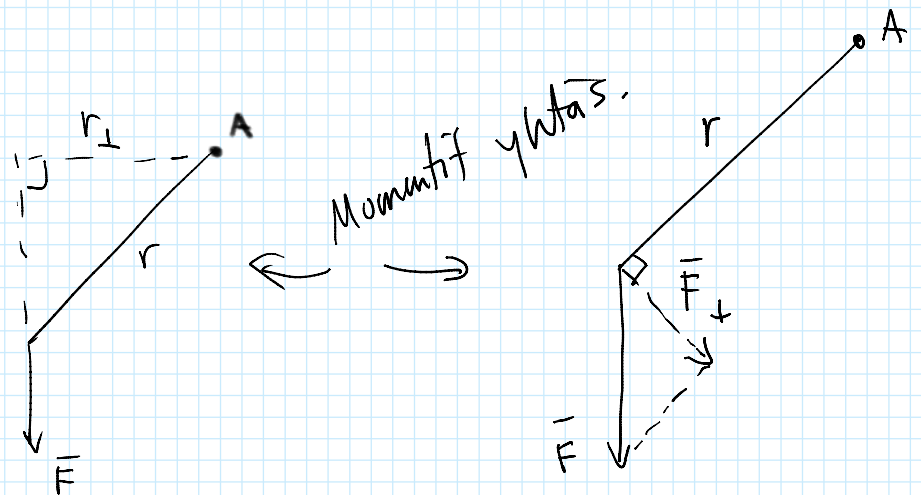
Otettu näyttöleike: 10.1.2019 8.39

☐	A = (-3.104, -4.106)	1
☐	B = (6.8896, -4.106)	
☐	C = (2.42, -0.49)	
☐	D = (-1.02, -1.23)	
☐	f : Jana (C, D) → 3.51869	
☐	E = (5.62, 2.07)	
☐	g : Jana (C, E) → 4.098	



Otettu näyttöleike: 10.1.2019 9.12

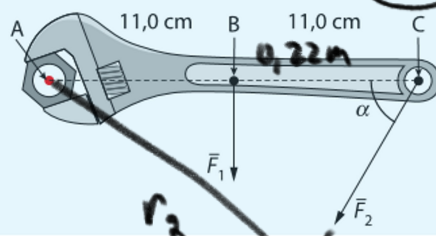
Massakeskipiste			$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$
Voiman momentti	M	Nm	$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, M = F_{\perp} r$
Pyörimisen liikeyhtälö			$\Sigma M_i = J \alpha$
Pyörimismäärä eli liikemäärämomentti	L	kgm^2/s	$L = J \omega$



$$M = F r_{\perp} = F_{\perp} r = F r \sin \alpha = F \sin \alpha r$$

9-7. Jakoavaimeen vaikuttavien voimien suuruudet ovat $F_1 = 4,0 \text{ N}$ ja $F_2 = 6,0 \text{ N}$. Voima F_1 on kohtisuorassa AB:tä vastaan.

- a) Laske voiman $\vec{F}_1$ momentti akselin A suhteen. $M_1 = 4,0 \text{ N} \cdot 0,11 \text{ m} = 0,44 \text{ Nm}$
- b) Kuinka suuri on voimien $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ momenttien summa akselin A suhteen, jos kulma α on 90° ? Entä jos $\alpha = 50^\circ$?

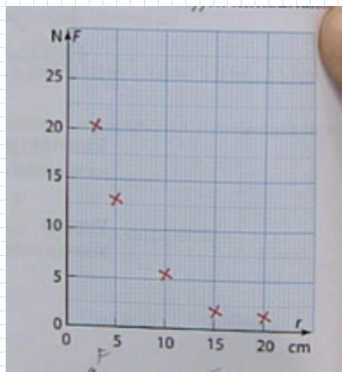


$$r_2 = 0,22 \cdot \sin 50^\circ \text{ m}$$

$$M_2 = 0,22 \cdot \sin 50^\circ \cdot 6,0 \text{ N}$$

$$\Sigma M = M_1 + M_2$$

9-6



$$M = F \cdot r \rightarrow F = \frac{M}{r}$$

$$y = kx$$

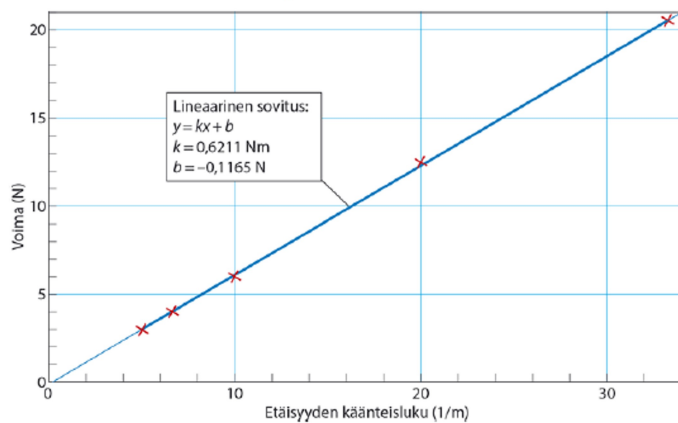
Matem: suureet käänt. verrannollisia
eli $F = k \frac{1}{r}$.

Määritetään vakio k .

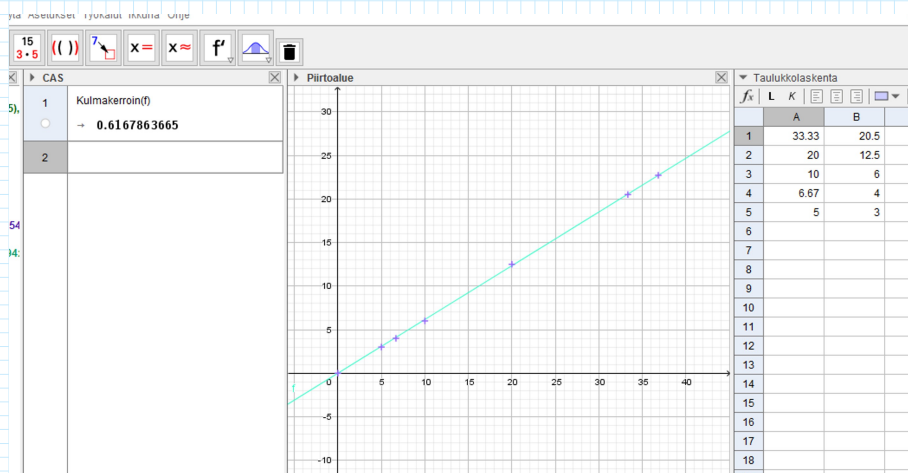
9-6. Merkitään mittaustulokset taulukkoon. Koska voiman momentti on kääntäen verrannollinen voiman suuruuteen, lasketaan taulukkoon $1/r$:n arvot.

r (m)	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20
$1/r$ (1/m)	33,33	20,00	10,00	6,67	5,00
F (N)	20,5	12,5	6,0	4,0	3,0

Viedään arvot $1/r, F$ mittaushjelmaan.



Sama kiertovaiikutus
saadaan siis kaikilla
saman tulon $F \cdot r (=M)$
tuottavilla F, r - yhdistelmillä.



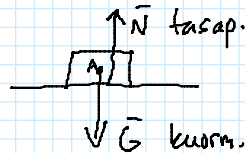
Jäykän kappaleen tasapaino

Opp. työ 1 → painopiste

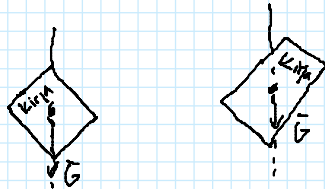
- statikassa tutkitaan kappaleen tasapainoehtoja liikkeen ja pyörimisen suhteen

- kuormittavat ja tasapainoittavat voimat:

$$\begin{aligned} &(\Sigma \vec{F} = 0) \quad (\Sigma M_A = 0) \\ &\quad \swarrow \quad \searrow \\ &\Sigma \vec{F}_x = 0 \quad \Sigma \vec{F}_y = 0 \end{aligned}$$



- painopiste (pp): piste johon kappale painon voidaan ajatella vaikuttavan, usein symm. kappaleen keskipiste kuten yllä. Sen kautta kulkee aina painon vaikutussuora.



→ voit määrittää sen ripustamalla kappaleen kahdesta eri pisteestä ja $pp = \vec{G}$:n vaikutussuorien leikk.piste.

- $\vec{G}$ piirretään alkamaan pp:sta

Kappale tasapainossa

27. marraskuuta 2017 9:20

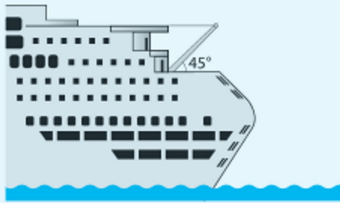
kappale tasapainossa se ei liiku eikä pyöri:

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_x = 0 \\ \sum \bar{F}_y = 0 \\ \sum \bar{M}_A = 0 \end{cases}$$

, pyörimisen suhteen, valitse akseli niin
että sen kautta kulkee mahdollisimman moni
voimista (niiden momentit silloin nolli).

10-9. Laivan lipputanko on kiinnitetty laivan seinään kuvan mukaisesti: yläpäästään se on kiinnitetty vaakasuoralla vaijerilla ja alapäästään saranalla. Lipputangon massa on 78 kg ja pituus 4,5 m. Laske

- a) vaijerin jännitysvoima
b) saranan tukivoima tangon alapäässä.

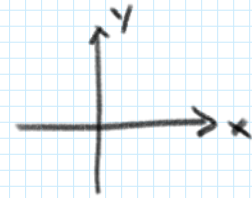
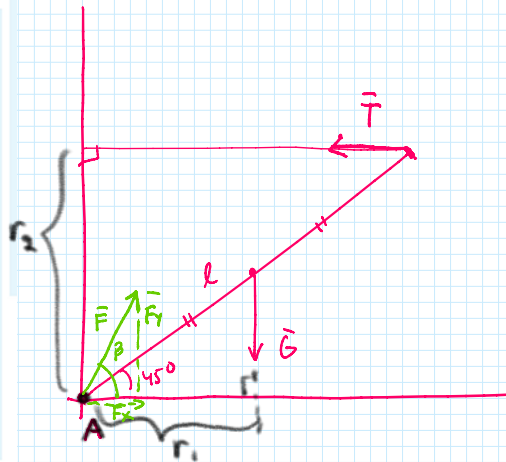


$$m = 78 \text{ kg}$$

$$l = 4,5 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

6,7,8,11



a) F kulkee A:n kautta $\rightarrow$ sen M on nolla.

$$\sum M_A = T r_2 - G r_1 = 0 \rightarrow T = \frac{G r_1}{r_2} = \frac{mg \frac{l}{2} \cos 45^\circ}{l \cos 45^\circ}$$

$$= \frac{mg}{2} = 382,59 \text{ N}$$

$$r_2 = l \cos 45^\circ$$

$$r_1 = \frac{l}{2} \cos 45^\circ$$

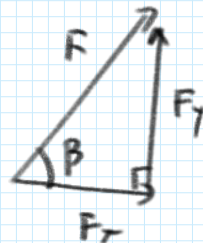
$$G = mg$$

b) N II

$$\begin{cases} x: F_x - T = 0 \rightarrow F_x = 382,59 \text{ N} \\ y: F_y - G = 0 \rightarrow F_y = mg = 765,18 \text{ N} \end{cases}$$

$$78 \cdot 9,81$$

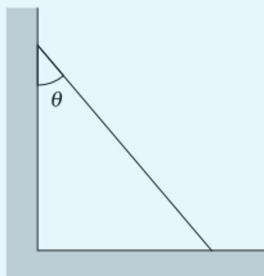
$$= 765,18$$



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx 860 \text{ N}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \approx 63^\circ$$

10-11. Tasapaksu lankku asetetaan nojaamaan liukasta seinää vasten. Lankun ja lattian välisen kitkakerroin on 0,42. Kuinka suureen kulmaan lankku voidaan korkeintaan asettaa seinään nähden, jotta lankku ei lähdä liukumaan? [K2011, 6]



Handwritten solution for the physics problem:

Diagram showing a rod of length l leaning against a vertical wall at an angle α to the horizontal. The wall is on the left, the floor is at the bottom, and the rod connects them. The height of the wall is a and the distance from the wall to the base of the rod is b . The weight G acts downwards from the center of the rod at a distance $\frac{b}{2}$ from the wall. The normal force N acts upwards at the base of the rod. The friction force F_f acts to the left at the base of the rod. The applied force F_i acts to the right at the top of the rod. The coefficient of friction is $\mu = 0,42$. The condition for no slipping is $F_f \leq \mu N$.

Force balance equations:

$$\begin{aligned} \text{N II } x: & F_i - F_f = 0 \rightarrow F_i = F_f = \mu N = \mu mg \\ y: & N - G = 0 \rightarrow N = G = mg \end{aligned}$$

Moment balance equation:

$$-F_i a + G \cdot \frac{b}{2} = 0$$

Substituting $F_i = \mu mg$ and $G = mg$:

$$-\mu mg a + mg \cdot \frac{b}{2} = 0$$

$$-\mu a + \frac{b}{2} = 0$$

$$\mu a = \frac{b}{2}$$

$$\frac{b}{a} = 2\mu = \tan \alpha$$

Final calculation:

$$\alpha = \tan^{-1}(0,14) \approx 40^\circ$$

Työ W ja teho P

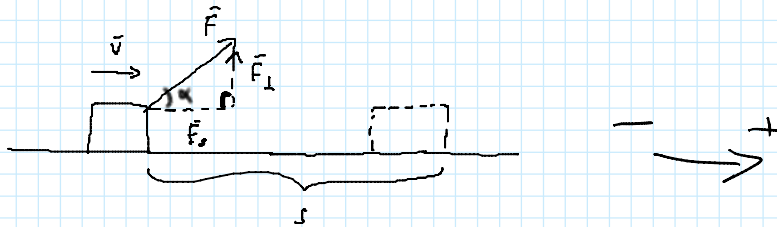
24. marraskuuta 2017 10:07

- fysiikassa työ = voiman vaikutus kappaleeseen

- $W = F s$, $[W] = Nm = J$

F = liikkeen kanssa yhdensuuntainen

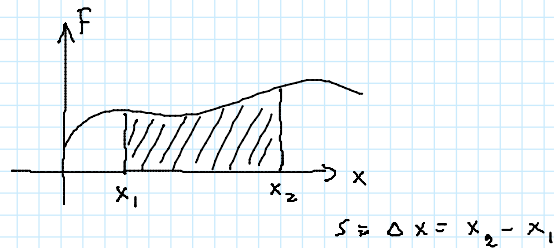
MAOL: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$, $W = F_s s$
↑
siirtymän s
suuntainen
voima



$$W = F_s s = F \cos \alpha \cdot s$$

- $W > 0$ jos $F_s \uparrow s$, $W < 0$ jos $F_s \updownarrow s$

- Graafisesti $W = (x, F)$ -kuvaajan ja x-akselin rajaama ala



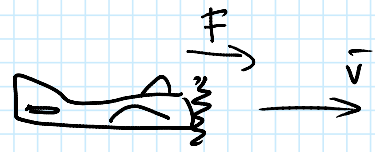
- Siirtoteho $P = Fv$, missä F = vakiovoima (N) ja v = vakionopeus (m/s)

11-11

$$v = 280 \text{ km/h} = 77,778 \text{ m/s}$$

$$P = 180 \text{ kW} = 180 \cdot 10^3 \text{ W}$$

$$s = 150 \text{ km} = 150 \cdot 10^3 \text{ m}$$



$$\begin{cases} W = F s \\ P = F v \rightarrow F = \left(\frac{P}{v} \right) \text{ sijoita ylämpään} \end{cases}$$

$$W = \frac{P}{v} \cdot s \approx 360 \text{ MJ}$$

Numeerinen aineisto löytyy peda.net-sivulta

<https://peda.net/p/pluoma/opetus/fysiikka/ffl228/a3nma13>

Avaa tiedosto esim. LibreOfficen Calciin, ja kopioi aineisto sieltä LoggerPro:n (ctrl-A ja ctrl-c).

Huom! Monta saraketta --> Logger osaa piirtää monta erilaista kuvaajaa.

8-3. Kappaletta vedettiin suoraviivaisesti voimanturin avulla pitkin pöydän pintaa. Siirrä taulukossa olevat mittaustulokset mittaus-tulosten analysointiohjelmaan.



- (t, F) { a) Miksi voiman kuvaajassa on "piikki" *Lahtokitka on kypokitkan suuren arvo > liukukitka*
hetkellä noin 3 s? b) Määritä voiman keskimääräinen suuruus *n. 7,5 N*
- (x, x) { c) Kuinka pitkän matkan kappale liikkui? *c) n. 0,6 m*
d) Kuinka kauan kappale liikkui? *d) n. 7 s*
- laske { e) Kuinka suuri oli voiman tekemä työ?
f) Kuinka suuri oli voiman keskimääräinen teho?

$$e) W = Fs = 7,5 N \cdot 0,6 m$$

$$f) P = \frac{W}{t} = \frac{7,5 N \cdot 0,6 m}{7 s}$$



Liike-energia

24. marraskuuta 2017 10:08

— liike-energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, $[E_k] = \text{J}$, $[m] = \text{kg}$, $[v] = \text{m/s}$

— Työ - energiaperiaate: $W = \Delta E_k$ eli kappaleeseen tehty työ muuttaa sen liike-energian määrää

$$W = \frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

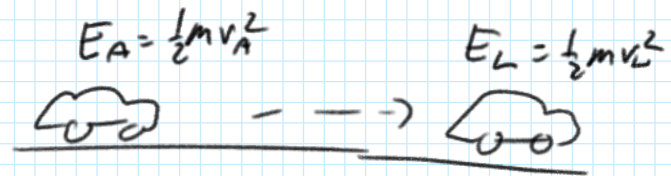
voi olla pos. tai negat.

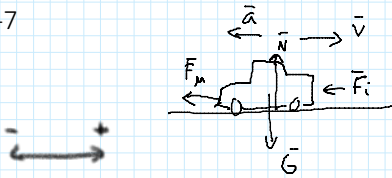
Esim.

$$v_A = 50 \text{ km/h} = \dots$$

$$v_L = 80 \text{ km/h} = \dots$$

$$m = 1800 \text{ kg}$$





Liike-energia: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Kiitteen tekemä työ: $W_f = F_f \cdot s = \mu N s = \mu m g s$

12-7. Tila-auton jarrujen testissä autoa ajettiin tyhjänä ja täyteen lastattuna vaakasuoralla tiellä nopeudella 65 km/h. Auto pysäytettiin lukkojarrutuksella. Renkaiden ja tien välinen kitakerroin oli 0,60. Auton massa oli 1250 kg ja täyteen lastatun auton 1870 kg.

- Laske auton jarrutusmatkat olettaen, että ilmanvastusta ei ole.
- Kummassa tapauksessa jarrutusmatka oli pitempi, jos ilmanvastus otetaan huomioon? [S2010/5]



$$m_1 = 1250 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1870 \text{ kg}$$

$$v_A = 65 \text{ km/h} = 18,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_i = 0$$

$$\mu = 0,60$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

a) $E_k - W_f = 0$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \mu N s = \frac{1}{2}mv_A^2 - \mu m g s = 0$$

$$-\mu g s = -\frac{1}{2}v_A^2 \quad ||: -\mu g$$

$$s = \frac{\frac{1}{2}v_A^2}{\mu g} \approx 28 \text{ m}$$

Massa ei vaikuta eli matkat sama.

b) $\frac{1}{2}mv_A^2 - W_f - W_i = 0$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \mu m g s - W_i = 0$$

$$-\mu m g s = -\frac{1}{2}mv_A^2 + W_i \quad ||: -\mu m g$$

$$s = \frac{\frac{1}{2}v_A^2}{\mu g} - \frac{W_i}{\mu m g}$$

$W_i =$ sama painamalla ja kevyellä autolla

painava auto $\rightarrow \frac{W_i}{\mu m g}$ pieni $\rightarrow$
erotas = matka suuri

kevyt auto $\rightarrow \frac{W_i}{\mu m g}$ suuri $\rightarrow$
erotas = matka pieni

$$1. \begin{cases} v_{A1} = 60 \text{ km/h} \\ s = 20 \text{ m} \\ v_L = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} v_{A1} = 120 \text{ km/h} \\ v_L = 0 \\ s = ? \end{cases}$$

$$1. \quad \frac{1}{2} m v_{A1}^2 - F_{\mu} s_1 = 0 \rightarrow F_{\mu}$$

$$2. \quad \frac{1}{2} m v_{A2}^2 - F_{\mu} s_2 = 0 \rightarrow s_2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad || : \frac{1}{2} m \quad \sqrt{\quad}$$

$$v = \sqrt{\frac{E_k}{\frac{1}{2} m}}$$

Potentiaalienergia

4. joulukuuta 2017 8:58

$$- E_p = mgh$$

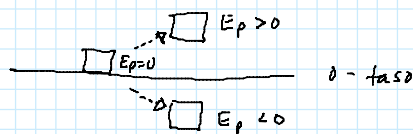
$$[E_p] = \text{J}$$

$$[m] = \text{kg}$$

$$[h] = \text{m}$$

- potentiaalienergia riippuu kappaleen paikasta (tubion fys. tarkastellaan vain gravitaation pot.energiaa)

- nollatasoa voi valita mihin vaan



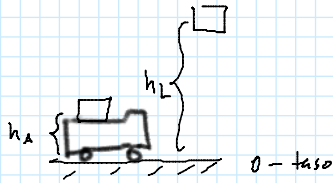
- E_p voi muuttua liike-energiaksi

- tehdyä työtä $W = \Delta E_p$ potentiaalienergian muutos $= mg(h_L - h_A)$

- G on konservatiivinen voima, sen tekemä työ ei riipu kuljetusta reitistä

F_g ei ole riippuvainen reitistä, G riippuu reitistä

-taso



$$h_A = 2,0 \text{ m}$$

$$h_L = 24,0 \text{ m}$$

$$m = 1100 \text{ kg}$$

13-5. Rakennuselementti, jonka massa on 1100 kg, on auton lavalla 2,0 m:n korkeudella maanpinnasta. Se nostetaan kahdeksanteen kerrokseen 24 m:n korkeudelle.

- Määritä elementin potentiaalienergia maanpinnan suhteen kahdeksannessa kerroksessa.
- Kuinka suuren työn nostava voima tekee?

$$a) E_p = mgh_L \approx 260000 \text{ J}$$

$$b) W = mgh_L - mgh_A = \\ 1100 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 22 \text{ m} \\ \approx 240000 \text{ J}$$

$$W = Fs$$

$$P = \frac{W}{t} = Fv$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p = mgh$$

$$W = E_L - E_A$$

$$W: \text{ s. } 110: 11-3, 11-6, 11-7$$

$$E_k: \text{ s. } 118: 12-1, 12-2, 12-4, 12-6$$

$$E_p: \text{ s. } 126: 13-2, 13-4$$

11-6

F13:



$$F = QE$$

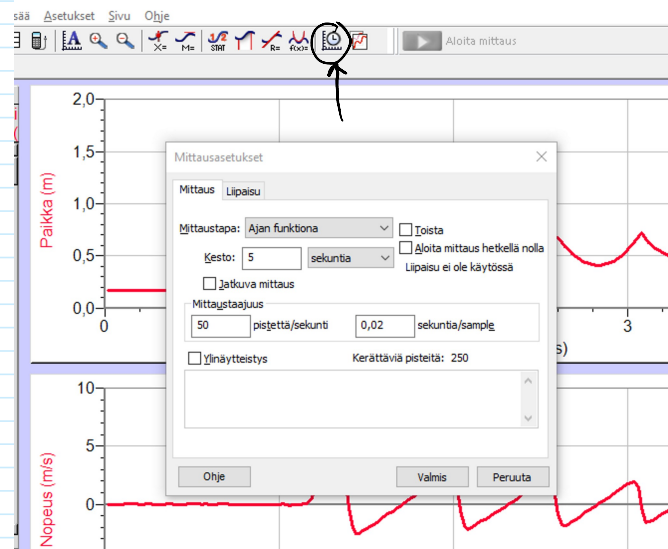
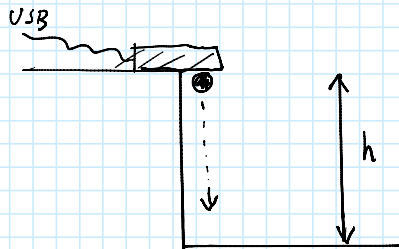
$$E = \frac{V}{d}$$

$$W = Fs = \dots = QV = 1e \cdot 4V = 4eV = 4 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Työ: putoavan pallon E_p ja E_k

torstai 17. tammikuuta 2019 7.56

1. Kytke UÄ-anturi ja käynnistä Loggerpro.
2. Muuta mittausaika esim. 5 s ja - taajuus esim. 50.
3. Mittaa pöydänreunan korkeus.
4. Mittaa pallon loppunopeus.
5. Laske E_p ja E_k . Säilyykö energia?



Oikealle!

Mekaanisen energian säilyminen

- yleinen energian säilymistäki: vuorovaikutuksessa energiaa ei häviä, se vaan muuttuu muotoon

→ mekaniikan energiaperiaate:

$$\sum E_A = \sum E_L$$

$$E_{k,A} + E_{p,A} + W = E_{k,L} + E_{p,L}$$

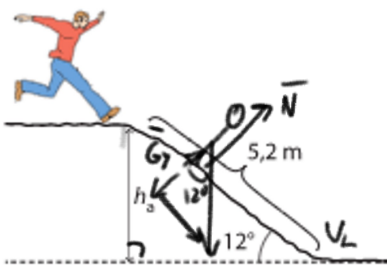
W = ulkoisten voimien tekemä työ (yleensä negatiivinen, kitkan aiheuttama) = Fs

!

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A + W = \frac{1}{2} m v_L^2 + m g h_L$$

▽ ▽ ▽
0 0 0

E Esimerkki 4



Poika juoksee nopeudella 4,5 m/s jäiseen rinteeseen, jossa hän liikkuu 5,2 m ennen pysähtymistään. Rinteen kaltevuuskulma on 12° . Laske pojan kenkien ja jään välinen kitkakerroin. Pojan massa on 57 kg.

Ratkaisu

$v_a = 4,5 \text{ m/s}$, $v_l = 0 \text{ m/s}$, $s = 5,2 \text{ m}$, $\alpha = 12^\circ$, $m = 57 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Valitaan potentiaalienergian nollassoksi se, jossa pojan liukuminen päättyy. Liukuminen alkaa nollassoon verrattuna korkeudelta

$$h_A = 5,2 \text{ m} \cdot \sin 12^\circ \approx 1,081 \text{ m}$$

$$N = G_y = m g \cos \alpha$$

$$h_L = 0 \text{ m}$$

$$G_y = m g \cos \alpha = N$$

$$W = F_\mu \cdot s = \mu N s$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A - \mu m g \cos \alpha \cdot s = 0 \quad || : m$$

$$- \mu g \cos \alpha \cdot s = - \frac{1}{2} v_A^2 - g h_A \quad || : - g \cos \alpha s$$

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} v_A^2 + g h_A}{g \cos \alpha s} \approx 0,47$$

14-6. Kulmin lentomäen lähtöpuomi on asetettu 66 m:n korkeudelle hyppyrin nokasta. Hyppääjä lähtee levosta liukumaan pitkin vauhtimäkeä ja saavuttaa hyppyrin nokalla nopeuden 101 km/h. Kuinka suuren työn liikevastusvoimat tekevät liu'un aikana? Hyppääjän ja varusteiden yhteinen massa on 71 kg. [K2007/2]



$$\begin{aligned} h_A &= 66 \text{ m} \\ h_L &= 0 \text{ m} \\ m &= 71 \text{ kg} \end{aligned}$$

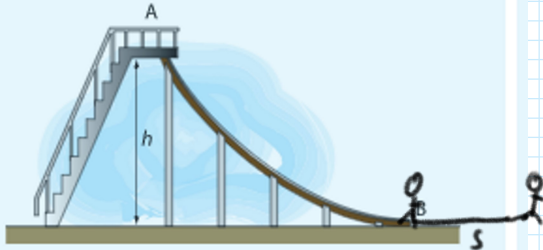
$$V_A = 0$$

$$V_L = 101 \text{ km/h} = 28,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2} m v_A^2} + m g h_A + W = \cancel{\frac{1}{2} m v_L^2} + m g h_L$$

$$W = \frac{1}{2} m v_L^2 - m g h_A \approx -18000 \text{ J}$$

- 14-9.** Kuvassa on leikkikentän liukumäki (korkeus $h = 3,0$ m). Lapsi, jonka massa on 20 kg, lähtee liukuun mäen ylätasanteelta (kohta A). Mäen alla (kohta B) hänen nopeutensa on 5,0 m/s. Lapsi liikuu vielä maata pitkin, jolloin liukukitkakerroin lapsen ja maan välillä on 0,77. Laske
- vastusvoimien tekemä työ liukumäessä eli tytön liukuessa kohdasta A kohtaan B
 - kuinka pitkän matkan lapsi liikuu maata pitkin ennen pysähtymistään.



$$\mu = 0,77$$

$$m = 20 \text{ kg}$$

$$v_A = 0, \quad v_L = 5,0 \text{ m/s}$$

$$h_A = 3,0 \text{ m}$$

$$h_L = 0 \text{ m}$$

$$a) \quad \cancel{\frac{1}{2} m v_A^2} + m g h_A + W = \cancel{m g h_L} + \frac{1}{2} m v_L^2$$

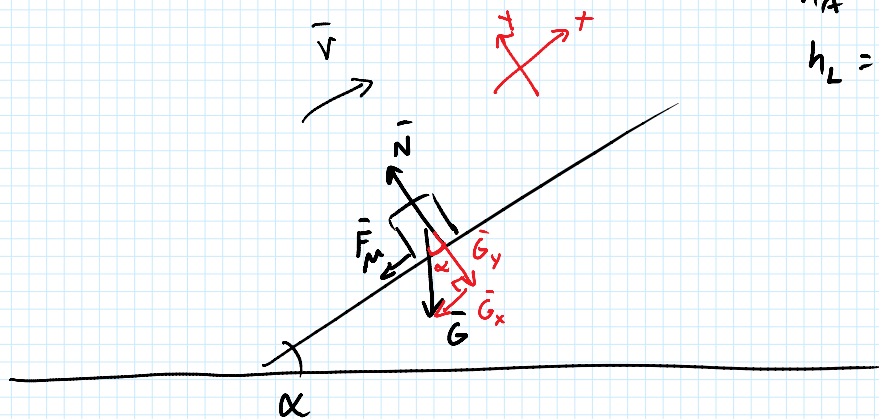
$$W = \frac{1}{2} m v_L^2 - m g h_A \approx -340 \text{ J}$$

$$b) \quad \begin{array}{ll} v_A = 5,0 \text{ m/s} & \mu = 0,77 \\ v_L = 0 \text{ m/s} & m = 20 \text{ kg} \\ h_A = h_L = 0 & g = 9,81 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - W = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \mu m g s = 0$$

$$s = \frac{\frac{1}{2} v_A^2}{\mu g} \approx 1,7 \text{ m}$$



$$h_A = 0$$

$$h_L = ?$$

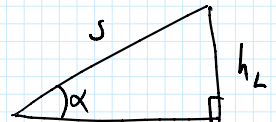
$$\mu = 0,14$$

$$v_A = 4,5 \frac{m}{s}$$

$$\alpha = 19^\circ$$

$$v_L = 0$$

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$



14-12. Kappale sysätään alkunopeudella 4,5 m/s liukumaan ylöspäin pitkin kaltevaa tasoa, jonka kaltevuuskulma on 19° . Tason ja kappaleen välinen kitkakerroin on 0,14.

- Kuinka korkealle kappale nousee lähtöpisteestään ennen pysähtymistään?
- Pysähtyttyään kappale lähtee liukumaan alaspäin. Mikä on kappaleen nopeus sen ohittaessa lähtöpisteensä?
- Mikä lepokitkakertoimen olisi vähintään oltava, jotta kappale ei lähtisi liukumaan alaspäin saavutettuaan liikeratansa korkeimman pisteen?

[Helsingin, Turun, Jyväskylän ja Oulun yliopisto 2003, Fysiikan valintakoe]

$$G_x = mg \sin \alpha$$

$$G_y = mg \cos \alpha$$

$$a) \begin{cases} \frac{1}{2} m v_A^2 - \mu N s = m g h_L \\ N = G_y = m g \cos \alpha \\ h_L = s \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \mu m g \cos \alpha \cdot s = m g s \cdot \sin \alpha$$

$$-\mu m g \cos \alpha \cdot s - m g s \cdot \sin \alpha = -\frac{1}{2} m v_A^2 \quad || : (-m)$$

$$s (\mu g \cos \alpha + g \cdot \sin \alpha) = \frac{1}{2} v_A^2 \quad || : ()$$

$$s = \frac{\frac{1}{2} v_A^2}{\mu g \cos \alpha + g \sin \alpha} = 2,254 \text{ m}$$

$$h_L = 2,254 \text{ m} \cdot \sin 19^\circ = 0,7338 \text{ m} \approx 0,73 \text{ m}$$

$$b) \quad h_A = 0,7338$$

$$h_L = 0$$

$$m g h_A - \mu m g \cos \alpha \cdot s = \frac{1}{2} m v_L^2 \quad || : \frac{1}{2} \sqrt{\quad}$$

$$v_L = \sqrt{\frac{g h_A - \mu g \cos \alpha \cdot s}{\frac{1}{2}}} \approx 2,9 \frac{m}{s}$$

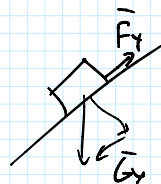
$$c) \quad \text{kpl paikallaan eli } a=0 \rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$$

$$\rightarrow x\text{-aks. suunnassa}$$

$$G_x = F_\mu$$

$$m g \sin \alpha = \mu m g \cos \alpha$$

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \approx 0,34$$

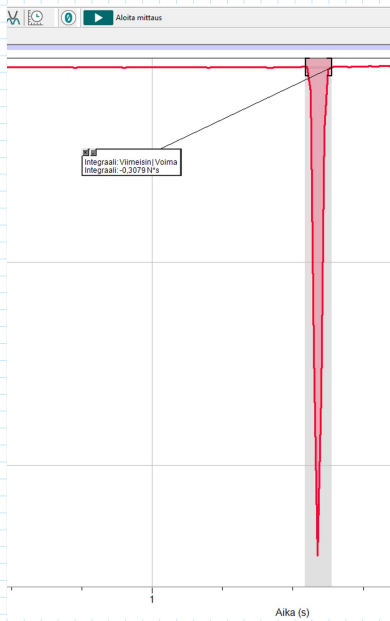


Impulssi I

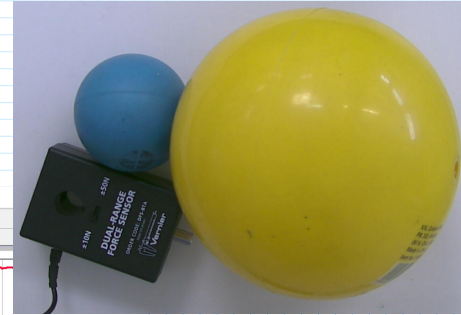
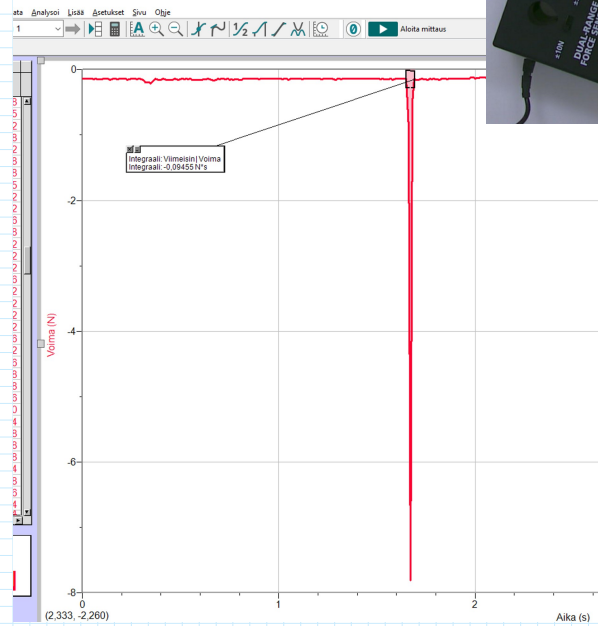
24. marraskuuta 2017 10:09

- op. työ 2: kaksi erilaista palloa $\rightarrow$ oml. (t, F) -kuviot

Jumpball



Bounce Ball



- Impulssi = (t, F) -kuvion ala

$$\bar{I} = \bar{F} \cdot \Delta t, \quad [\bar{I}] = [\bar{F}] \cdot [\Delta t] = \text{Ns} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

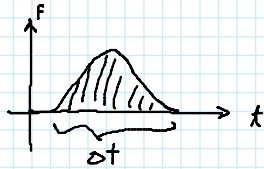
- Liikemäärä $\bar{p} = m\bar{v}$, $[\bar{p}] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{kg} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

- Impulssiperiaate $\bar{I} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = m \Delta \bar{v} = \Delta \bar{p}$

$$\bar{I} = m \cdot \Delta \bar{v}$$

- Impulssi $\bar{I}$ kuvaa yleensä lyhytkestoisen, ei-vakio voiman vaikutusta

- graafisesti $I = (F, t)$ -kuvaajan ja t -akselin rajaama :

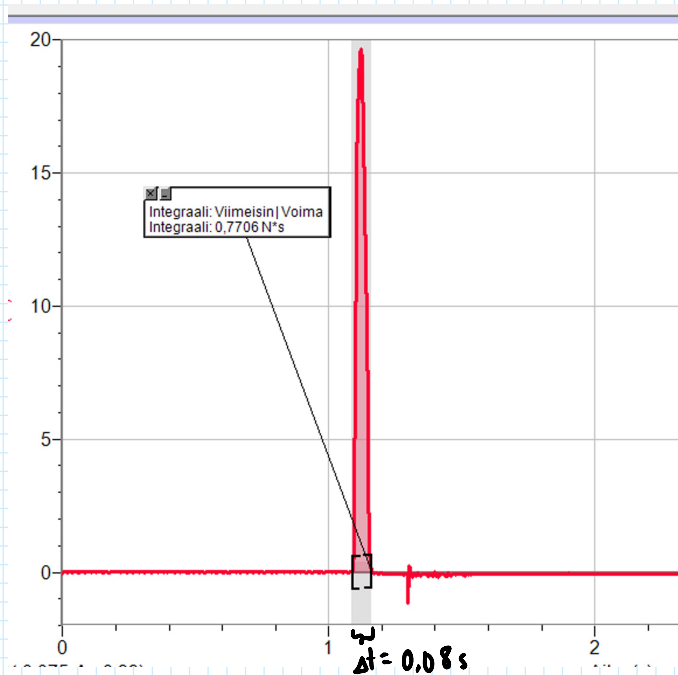


1. Määritä I pinta-alan avulla :

Pinta-alan määrittely (= graaf. integraali) runkujen avulla tai Loggerpro:lla.

2. Keskim. kappaleeseen vaikuttava voima = $F = \frac{I}{\Delta t}$
tai Nopeuden muutos = $\Delta v = \frac{I}{m}$

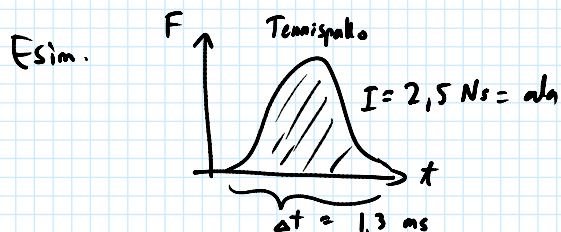
Esim. Jumbopallon törmäys voima-anturiin



$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{0.7706 \text{ N*s}}{0.08 \text{ s}} \approx 10 \text{ N}$$

Törmäyksessä auton turvarakenteet mm. pidentävät Δt :tä.

$$\rightarrow F = \frac{I}{\Delta t} \text{ pienenee}$$



$$m = 57 \text{ g}$$

$$a) F_{\text{kesk}} = \frac{I}{\Delta t} \approx 1900 \text{ N}$$

$$b) \bar{I} = m \Delta \bar{v} \Rightarrow \Delta \bar{v} = \frac{I}{m} = \frac{2.5 \text{ N*s}}{0.057 \text{ kg}} \approx 44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$b) \quad \bar{I} = m \Delta \bar{v} \Rightarrow \Delta \bar{v} = \frac{I}{m} = \frac{2,3 \text{ Ns}}{0,057 \text{ kg}} \approx 41 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\uparrow$
 Keskijästa

Liikemäärä p

11. joulukuuta 2017 9:11

- määritelmä: $\vec{p} = m\vec{v}$, $[p] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ ($= \text{Ns}$)

- I ja p:n yhteys:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F} = m \left(\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \right) \rightarrow \vec{F} \cdot \Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Esim.



1. Kuviosta I.

2. Loppunopeus v_2 kaavasta $I = mv_2 - mv_1$.

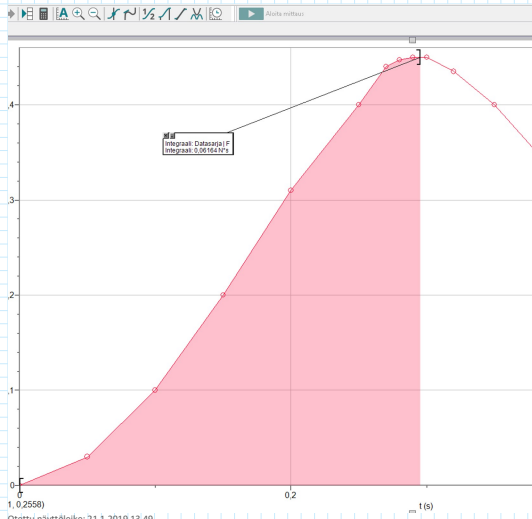
$$\boxed{\vec{F} \Delta t = \vec{I} = \Delta \vec{p}} = m(v_2 - v_1) = m \Delta v$$

$$\vec{F} \Delta t = m \Delta v$$

$$F > 0 \rightarrow \Delta v > 0$$

$$F < 0 \rightarrow \Delta v < 0$$

$$m = 0,215 \text{ kg}$$



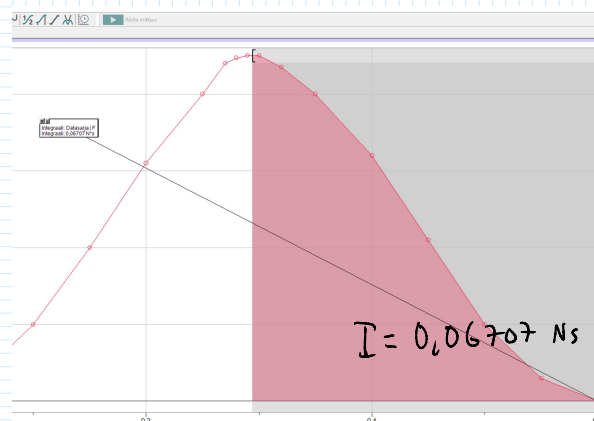
$$a) \text{ Pinta-ala} = I = 0,06164 \text{ Ns} \approx 0,06 \text{ Ns}$$

$$b) \text{ Ennen törmäystä: } \bar{I} = m \Delta \bar{v}$$

$$\rightarrow I = m (0 - v_A)$$

$$\rightarrow v_A = \frac{I}{m} = 0,29 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ oikealle}$$

- 15-6.** Vaakasuuralla vaunuradalla olevaan vaunuun kiinnitettiin kimmoisa jousi. Vaunun annettiin törmätä tukevasti radan päähän kiinnitettyyn voima-anturiin. Kopioi mittausohjelmat palvelimelta ja avaa ne mittausohjelmassa.
- Määritä vaunun pysäyttävän voiman impulssi graafisesti integroimalla.
 - Määritä vaunun nopeus ennen ja jälkeen törmäyksen, kun vaunun massa on $0,215 \text{ kg}$.
 - Määritä vaunun liikemäärän muutos vuorovaikutuksessa.

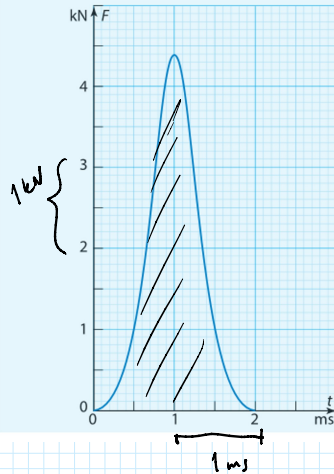


$$I = m (v_L - 0) \quad \leftarrow \rightarrow +$$

$$\rightarrow v_L = \frac{I}{m} = 0,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ vasemmalle}$$

$$c) \Delta \bar{p} = m \bar{v}_L - m \bar{v}_A = 0,215 \text{ kg} (-0,323 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,286 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = -0,13 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

15-12. Pystysuoraan putoavaa pesäpalloa lyödään mailalla siten, että maila kohdistaa palloon vaakasuoran voiman, jonka suuruus riippuu ajasta oheisen kuvan mukaisesti. Kuinka suurella nopeudella ja mihin suuntaan pallo lähtee lyönnin jälkeen, kun pallon massa on 150 g ja putoamisnopeus lyöntihetkellä 11,2 m/s?



$$A_{\text{ka}} = I = 3,3 \text{ Ns}$$

$$I = F \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} = \Delta p$$

↑
yleensä (t, F) -kuvaajasta

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\boxed{\uparrow} 0,1 \text{ kN} = 100 \text{ N}$$

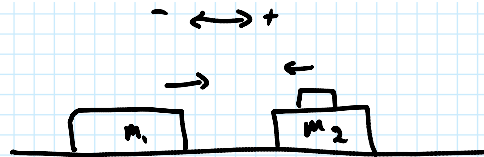
0,1 ms

$$A_{\text{ka}} = 100 \text{ N} \cdot 0,00033 \text{ s} = \underline{\underline{0,01 \text{ Ns}}}$$

Liikemäärän säilyminen

11. joulukuuta 2017 9:03

Opp. työ s. 148



$$m_1 = 350 \text{ g}$$

$$m_2 = 350 \text{ g} / 650 \text{ g}$$

v = nopeus alussa

u = nopeus lopussa

→ kimmoisa törmäys : $\bar{p}$ ja E_k säilyy (?)

kimmoton törmäys : $\bar{p}$ säilyy , E_k ei säily

Kimmoton törmäys								
v1 (m/s)	v2 (m/s)	u (m/s)	p1_a (Ns)	p2_A (Ns)	p_L (Ns)	E_1A (J)	E_2A (J)	E_L (J)
0,277	-0,466	-0,2	0,09695	-0,3029	-0,2	0,01342758	0,0705757	0,02
	p_a	-0,20595	säilyy			E_a	0,08400328	ei säily

Otettu näyttöleike: 13.12.2017 8:44

- $\bar{p}$ säilyy kummassakin , kun kyseessä eristetty systeemi

$$\bar{p}_{1,A} + \bar{p}_{2,A} = \bar{p}_{1,L} + \bar{p}_{2,L}$$

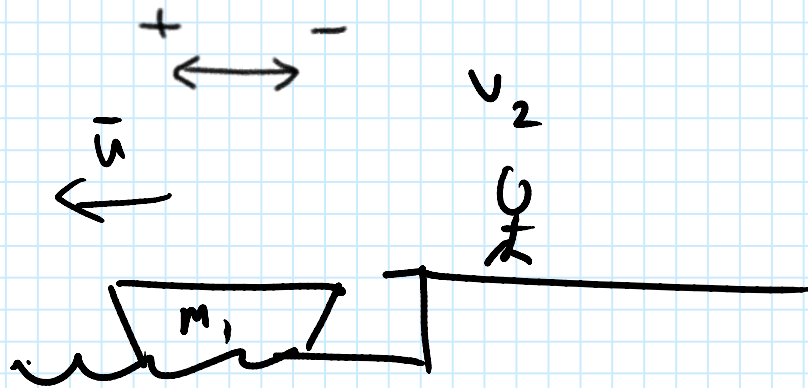
$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2$$

- törmäykset :
 kimmoisa $\bar{p}$ ja E_k säilyy
 kimmoton vain $\bar{p}$ säilyy

16-5

13. joulukuuta 2017

8:51



$$m_1 = 34 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$v_2 = +2,5 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 0$$

$$u = +1,5 \text{ m/s}$$

$\vec{p}$ säilyy:

Geogebra:

The screenshot shows a software interface with a grid background. At the top, there is a toolbar with various icons. Below the toolbar, there are two main panels. The left panel is titled 'CAS' and contains a table with two rows. The first row is highlighted in light blue and contains the number '1' and a radio button. The second row is highlighted in grey and contains the number '2'. The right panel is titled 'Piirtoalue' and contains a grid.

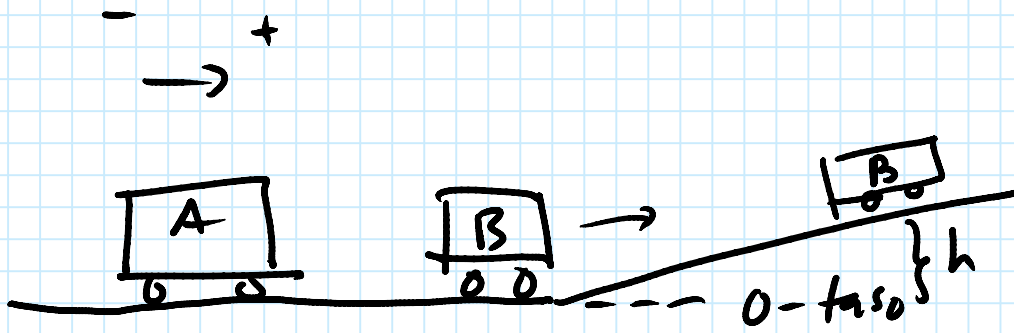
CAS	
1	$\text{Ratkaise}(m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u, m_2)$ $\rightarrow \left\{ m_2 = -m_1 \cdot \frac{u}{u - v_2} \right\}$
2	

Otettu näyttöleike: 2.2.2018 10.47

16-10

13. joulukuuta 2017

8:57



$$V_A = 5,0 \text{ m/s}$$

$$m_A = 80 \text{ kg}$$

$$m_B = 320 \text{ kg}$$

$$V_B = 0$$

$$u_A = -1,45 \text{ m/s}$$

$\bar{p}$ säilyy:

E säilyy: