

Todennäköisyys

Todennäköisyys sille, että tapahtuma A tapahtuu, merkitään $P(A \text{ tapahtuu})$ tai $P(A)$

Klassinen todennäköisyys

$P(A) = \frac{\text{tapaukset, jotka käyvät}}{\text{kaikkien tapausten määrä}}$ eli astetta matemaattisemmin

$$P(A) = \frac{\text{tapahtumalle suotuisten alkeistapausten määrä}}{\text{perusjoukon alkeistapausten lukumäärä}}.$$

Todennäköisyys on nollan ja ykkösen välissä oleva luku, siis $0 \leq P(A) \leq 1$

Kun $P(A) = 0$, tapahtuma on mahdoton.

Kun $P(A) = 1$, tapahtuma on varma.

A:n **vastatapahtumaa** merkitään $\bar{A}$

Tapahtuman todennäköisyys **vastatapahtuman** avulla ilmaistuna on

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{\text{tapaukset, jotka eivät käy} = \bar{A} : \text{lle suotuisat tapaukset}}{\text{kaikkien tapausten määrä}}$$

Eli A:n vastatapahtuma on

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{\text{tapaukset, jotka käyvät} = A : \text{lle suotuisat tapaukset}}{\text{kaikkien tapausten määrä}}$$

Geometrinen todennäköisyys

$$P(A) = \frac{\text{tapahtumalle suotuisen osajoukon mitta}}{\text{perusjoukon mitta}}$$

Tuloperiaate

Kun kysytään, kuinka monta vaihtoehtoa valinnassa on, mieti valintakertoja erikseen ja käytä seuraavaa periaatetta:

Valintojen määrä = Kuinka monella tavalla voit valita ensimmäisen · Kuinka monella tavalla voit valita toisen · ... · Kuinka monella tavalla voit valita n. jäsenen

Joskus vaihtoehtojen määrä vähenee jokaisella valintakerralla, kuten laitettaessa ihmisiä jonoon.

Joskus vaihtoehtojen määrä pysyy samana, kuten esim. valittaessa numerosarjaa, jossa sama numero voi esiintyä useita kertoja.

Tuloperiaatetta käytetään myös järjestysten lukumäärässä:

Järjestysten lukumäärä

7 opiskelijaa voidaan laittaa jonoon $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ tavalla. Koska matemaatikot ovat laiskoja kirjoittamaan, merkitään tällaista kertolaskua $7!$ (luetaan: luvun seitsemän kertoma)

n alkioinen joukko voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla

Seitsemästä opiskelijasta voidaan muodostaa 3 opiskelijan mittainen jono $7 \cdot 6 \cdot 5$ tavalla. Tämä voidaan järjestää eri lailla: $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{(7-3)!}$, jolloin saadaan kaava:

n alkioisesta joukosta k :n mittainen jono saadaan lausekkeella $\frac{n!}{(n-k)!}$,
(laskimessa nPr tai permutaatiot)

Osajoukkojen lukumäärä

7 oppilaasta voi valita 3 oppilaan joukon (järjestyksellä ei ole väliä eli Minna, Kalle ja Petteri on sama joukko kuin Kalle, Petteri ja Minna) laskemalla 3 oppilaan mittainen jono kuten yllä ja jakamalla se sitten $3!$:lla. Tällä poistetaan osajoukon sisäisen järjestyksen merkitys.

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{7}{3}$$

n alkion joukon k -alkioisten osajoukkojen lukumäärä on $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,
(laskimessa nCr tai kombinaatiot)

Kertolaskusääntö

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

kun A:n tapahtuminen vaikuttaa B:n todennäköisyyteen.

$P(B|A)$ tarkoittaa todennäköisyyttä tapahtumalle B, kun A on jo tapahtunut. Jos esim. ostettavien arpojen määrä vähenee tai nostettavien pallojen määrä vähenee A:n tapahtuessa, tämä tapahtuma vaikuttaa B:n todennäköisyyteen.

Jos B ja A ovat toisistaan riippumattomia, esim. arpojen määrä on suuri, tai nostettu pallo laitetaan takaisin noston jälkeen, on kertolaskusääntö yksinkertaisesti

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

kun A:n tapahtuminen ei vaikuta B:n todennäköisyyteen.

Yhteenlaskusääntö

Lasketaan todennäköisyys sille, että sataa tai tuulee.

Meille kelpaavat vaihtoehdot

-Sataa, mutta ei tuule

-tuulee, muttei sada.

Muita tapauksia ovat vielä:

-Sataa ja tuulee

-ei sada eikä tuule

lauseke $P(\text{sataa}) + P(\text{tuulee})$ sisältää haluttujen vaihtoehtojen lisäksi vaihtoehdon, että sekä sataa että tuulee.

Siis $P(\text{sataa tai tuulee}) = P(\text{sataa}) + P(\text{tuulee}) - P(\text{sataa ja tuulee})$

Yleisesti:

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

Tätä kaavaa käytetään tilanteissa, jossa tapahtumat A ja B voivat tapahtua yhtä aikaa, esim. A = ”kortti on hertta” ja B = ”kortti on seiska”

Jos tapahtumat ovat erilliset, eivätkä siis voi tapahtua yhtä aikaa, on $P(A \text{ ja } B) = 0$, joten yleinen kaava on tällöin:

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$$

Toistokoe

Toistokokeesta on kyse esim. arpajaisissa, joissa arpojen lukumäärä on suuri, siementen itäminen ja monivalintakokeessa arvaaminen.

Tapahtuma A, jonka todennäköisyys on p tapahtuu n kappaleessa toistoja tasan k kertaa todennäköisyydellä:

$$P(A \text{ tapahtuu } n \text{ toistossa } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Summamerkintä

Koska matemaatikot ovat laiskoja kirjoittamaan, on pitkille summille (pluslaskuille) haluttu antaa lyhyempi kirjoitusmuoto. Sitä merkitään kreikkalaisella isolla kirjaimella sigma Σ . Suuren sigman alapuolelle kirjoitetaan, mistä luvusta i :n arvot lähtevät ja sigman yläpuolella lukee, mikä on viimeinen luku, johon asti i saa arvoja. Sigman jälkeen on lauseke, johon i :n arvoja sijoitetaan summan eri jäsenissä.

$$\sum_{i=1}^4 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \text{Luetaan: summa } \bar{x}\text{-iistä, } i \text{ käy ykkösestä neloseen.}$$

Tässä summassa lauseke on pitempi, siinä on kaksi i :n arvoa, jotka saavat yhtä aikaa samat arvot:

$$\sum_{i=4}^{10} x_i p_i = x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 + x_7 p_7 + x_8 p_8 + x_9 p_9 + x_{10} p_{10}$$

Lue: Summa $\bar{x}$ -ii-pee-iistä, i käy nelosesta kymmeneen.

Sinun tulee muusta yhteydestä tietää, mitä $x_1, x_2, \dots, x_n$ ja $p_1, p_2, \dots, p_n$ ovat.

Jos summakaavassa ylhäällä on luvun sijasta n , sinun tulee tehtävän yhteydestä päätellä, mitä lukua se tarkoittaa.

Diskreetti tilastollinen jakauma

Moodi= aineistossa yleisimmin esiintyvä arvo.

Mediaani= Suuruusjärjestykseen asetetun aineiston keskimäinen luku tai kahden keskimäisen luvun keskiarvo.

$$\text{Keskiarvo} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Keskiarvo on keskiluku, joka soveltuu parhaiten symmetristen jakaumien kuvaamiseen.

$$\text{Keskihajonta} = s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Käytä aina jakauman kuvailussa keskiarvon kaverina keskihajontaa. Keskihajonta kertoo siitä, miten kauas keskiarvosta aineisto keskimäärin sijoittuu.

Satunnaismuuttujan keskihajonta $D(X) =$

$$D(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2}, \text{ jossa } \mu = E(X) \text{ eli satunnaismuuttujan odotusarvo.}$$

Helpoiten keskiarvo ja keskihajonta lasketaan geogebraalla tilastotoiminnoilla. Jos haluat piirtää diagrammeja, Libre office calc käy siihen parhaiten.

Harjoittele luokittelemaan aineisto Libre officella, jotta saat pirrettyä kaavioita.

Todennäköisyysjakauma

Satunnaismuuttujan jakauma tarkoittaa taulukkoa, josta ilmenee kaikkien vaihtoehtoisten tapausten todennäköisyydet. (Geogebraalla helpoin, jos noudattaa binomijakaumaa, muutoin tehtävä käsin.)

Satunnaismuuttujan odotusarvo

$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$, jossa $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat satunnaismuuttujan mahdollisia arvoja ja $p_1, p_2, \dots, p_n$ niiden todennäköisyydet.

k	P(X = k)
0	0.1073741824
1	0.268435456
2	0.301989888
3	0.201326592
4	0.088080384
5	0.0264241152
6	0.005505024
7	0.000786432
8	0.000073728
9	0.000004096
10	0.0000001024

Sinun pitää siis ensin laskea jokaiselle mahdolliselle satunnaismuuttujan arvolle todennäköisyys ja sitten vasta sijoittaa kaavaan.

Normaali- ja binomijakaumalle on omat odotusarvon kaavansa MAOLissa.

Binomijakauman noudattaminen kuvataan merkinnällä $X \sim \text{Bin}(n, p)$.
 n =toistojen lukumäärä, p =onnistumisen todennäköisyys yhdessä toistossa.
 Normaali-jakauman noudattaminen kuvataan merkinnällä $X \sim N(\mu, \sigma)$
 μ =odotusarvo, σ =keskihajonta.

Kun jakaumasta otetaan tietoja tietokoneen laskurista, pidä merkinnät kunnossa:

Ensin kerro, että satunnaismuuttuja X on voittojen lukumäärä pelatessa, kerro myös, mitä jakaumaa X noudattaa, esim. $X \sim N(16, 4)$. Kun sitten luet laskuria, kerro, minkä todennäköisyyttä lasket, esim. $P(X < 10) = 0,066807 \dots \approx 0,067$ tai $P(14 \leq X \leq 17) = 0,290168 \dots \approx 0,290$.

Tiheysfunktioista lasketaan todennäköisyyksiä kuvaajan ja x-akselin välisinä pinta-aloina eli määrättyinä integraaleina. Koko tiheysfunktion alle jäävä pinta-ala on 1.

Kertymäfunktion arvot (y-koordinaatit) kertovat kertymätodennäköisyyksiä. Kertymäfunktio on tiheysfunktion integraalifunktio.

Normaalijakauman kanssa eniten auttaa todennäköisyyslaskuri, mutta normittamisen on syytä olla tuttua. Viereisen persenttiosuusjakauman avulla voidaan arvioida todennäköisyyksiä myös ilman laskimia, taulukoita tai laskureita.

