

Välitesti 4 Pisteytysohje

MAB4 Matemaattisia malleja

Pisteytä Välitestin 4 vastauksesi tämän ohjeen avulla. Jos sait 8 pistettä tai enemmän, voit jatkaa seuraavaan aiheeseen. Jos sait 7 pistettä tai alle, kertaa vielä tätä aihetta ennen uuteen menoa. Testin maksimipistemäärä on 12.

Huom! Pisteytysohjeessa on tehty paljon välivaiheita ja kaikki yhtälöt on ratkaistu käsin. Yhtälöt voit ratkaista myös laskimella ilman, että se vähentää saamiasi pisteitä. Näin paljon välivaiheita ei ole tarpeellista tehdä.

1. Onko lukujono

a) 1,4,16, ...

b) 1, 8, 15, ...

aritmeettinen vai geometrinen? Määritä vielä a_1 ja d tai q .

a) $\frac{4}{1}=4$ ja $\frac{16}{4}=4$, siis

jono on geometrinen. (1p)

$$q=4 \quad (1p)$$

b) $8-1=7$ ja $15-8=7$, siis

jono on aritmeettinen. (1p)

$$d=7 \quad (1p)$$

2. Geometrisen jonon 3. jäsen on 15 ja jonon suhdeluku $q=\frac{1}{5}$.

a) Muodosta jonon lauseke. (2p)

b) Onko luku $\frac{25}{1000}$ jonon jäsen? (2p)

c) Määritä jonon 25. jäsen. (1p)

$$a_3=15, \quad q=\frac{1}{5}$$

Lasketaan näiden perusteella jonon ensimmäinen jäsen a_1 .

Tapa 1: Yhtälön ja a_n jäsenen kaavan avulla.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

sijoitetaan tieto, että $a_3=15$:

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = 15$$

sijoitetaan tieto, että $q = \frac{1}{5}$

$$a_3 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3-1} = 15$$

a_3 voidaan jättää pois ja ratkaista yhtälö.

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3-1} = 15$$

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 15$$

$$a_1 \cdot \frac{1}{25} = 15$$

$$a_1 = \frac{15}{\frac{1}{25}}$$

$$a_1 = 375 \quad (1p)$$

Tapa 2: Kevyemmällä päättelyllä:

Koska suhdeluku on $q = \frac{1}{5}$ tarkoittaa se, että seuraava jäsen saadaan aina jakamalla viidellä.

Siispä edellinen jäsen saadaan kertomalla viidellä.

Koska $a_3 = 15$, $a_2 = 15 \cdot 5 = 75$ ja $a_1 = 75 \cdot 5 = 375$. (1p)

Nyt kun a_1 on päätelty, voidaan muodostaa jonon lauseke.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 375 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad (1p)$$

b) Luku $\frac{25}{1000}$ on jonon jäsen, jos yhtälöllä

$$375 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{25}{1000}$$

on positiivinen kokonaislukuratkaisu.

$$375 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{25}{1000} \quad (1p)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{\frac{25}{1000}}{375}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{15000}$$

$$\log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \log_{10} \frac{1}{15000}$$

$$(n-1) \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right) = \log_{10} \frac{1}{15000}$$

$$n-1 = \frac{\log_{10} \frac{1}{15000}}{\log_{10} \left(\frac{1}{5} \right)}$$

$$n = \frac{\log_{10} \frac{1}{15000}}{\log_{10} \left(\frac{1}{5} \right)} + 1$$

$$n = 6,97463 \dots$$

Koska yhtälöllä ei ole positiivista kokonaislukuratkaisua,

luku $\frac{25}{1000}$ ei ole jonon jäsen. (1p)

c) Jonon 25. jäsen saadaan sijoittamalla a_n :n kaavaan $n=25$.

$$a_n = 375 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

$$a_{25} = 375 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{25-1} = 375 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{24} =$$

$$375 \cdot \frac{1^{24}}{5^{24}} = 375 \cdot \frac{1}{5^{24}} = \frac{375}{5^{24}} = \frac{3}{476837158203125} \approx 6,3 \cdot 10^{-15} \quad (1p)$$

3. Katsomossa on penkkirivejä 45, niin että ensimmäisessä penkkirivissä on 8 tuolia ja seuraavassa penkkirivissä on aina 3 tuolia enemmän.

a) Montako tuolia on viimeisessä penkkirivissä? (1p)

b) Onko katsomossa penkkiriviä, jolla on 100 tuolia? (2p)

a) Penkkirivit muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1=8$ ja $d=3$.

Viimeisessä penkkirivissä on a_{45} tuolia.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Sijoitetaan $n=45$, $a_1=8$ ja $d=3$.

$$a_{45} = 8 + (45-1) \cdot 3$$

$$a_{45} = 140 \quad (1p)$$

b) Katsomossa on penkkirivi, jolla on 100 tuolia, jos yhtälöllä $a_1 + (n-1) \cdot d = 100$ on positiivinen kokonaislukuratkaisu.

$$a_1 + (n-1) \cdot d = 100$$

sijoitetaan $a_1=8$, $d=3$.

$$8 + (n-1) \cdot 3 = 100 \quad (1p)$$

$$(n-1) \cdot 3 = 92$$

$$n-1 = \frac{92}{3}$$

$$n = \frac{92}{3} + 1 = 31,6666\dots$$

Yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua.

Vastaus: Katsomossa ei ole penkkiriviä, jolla on 100 tuolia. (1p)