Kertausosa

1. $f(x) = x^2 - 1$ ja $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

a) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1} = \frac{x^2}{x^2-2}$$

b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 1 = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} - {}^{(x-1)^2)}1$$

$$= \frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x-1)^2}$$

c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$$

d)

$$(g \circ g)(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + {}^{x-1)}1}{\frac{x+1}{x-1} - {}^{x-1)}1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{2x}{x-1} : \frac{2}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = x$$

Vastaus: a) $\dfrac{x^2}{x^2-2}$ b) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 - 1$ c) $x^4 - 2x^2$ d) x

2. $f(x) = x^3 - x^2$ ja $g(x) = x^7$

$(g \circ f)(x) = (x^3 - x^2)^7$

$(g \circ f)'(x) = 7(x^3 - x^2)^6 \cdot (3x^2 - 2x)$

$(g \circ f)'(x) = 0$, kun

$$
\begin{array}{lll}
x^3 - x^2 = 0 & \text{tai} & 3x^2 - 2x = 0 \\
x^2(x-1) = 0 & & x(3x-2) = 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0 & & x = 0 \text{ tai } 3x - 2 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\; x = 1 & & \qquad\qquad 3x = 2 \\
 & & \qquad\qquad x = \dfrac{2}{3}
\end{array}
$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = \dfrac{2}{3}$

3. $f'(x) > 0$ kaikilla x $\qquad g(x) = f(x^3 - 9x^2 - 21x + 3)$

$$g'(x) = \underbrace{f'(x^3 - 9x^2 - 21x + 3)}_{<0 \text{ kaikilla } x} \cdot (3x^2 - 18x - 21)$$

$g'(x) \geq 0$, kun

$3x^2 - 18x - 21 \geq 0 \quad |:3$

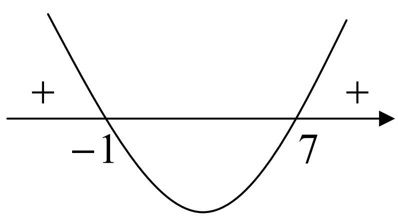
$x^2 - 6x - 7 \geq 0$

Nollakohdat:

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 8}{2}$$

$x = -1$ tai $x = 7$



$g'(x) \geq 0$ ja siten g on kasvava, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 7$

Vastaus: $x \leq -1$ ja $x \geq 7$

4. $f(x)=(x-1)^2$

$g(x)=(f\circ f)(x)=((x-1)^2-1)^2$

$g'(x)=2((x-1)^2-1)\cdot 2(x-1)\cdot 1=4(x-1)((x-1)^2-1)$

$g'(x)=0$, kun

$x-1=0$ tai $(x-1)^2-1=0$

$x=1$ $\quad (x-1)^2=1 \quad |\sqrt{\ }$

$x-1=-1$ tai $x-1=1$

$x=0 \qquad x=2$

$h(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(g(x))=(((x-1)^2-1)^2-1)^2$

$$h'(x)=2(((x-1)^2-1)^2-1)\cdot D\big(((x-1)^2-1)^2-1\big)$$
$$=2(((x-1)^2-1)^2-1)\cdot 2((x-1)^2-1)\cdot D\big((x-1)^2-1\big)$$
$$=4(((x-1)^2-1)^2-1)((x-1)^2-1)\cdot 2(x-1)$$
$$=8(x-1)(((x-1)^2-1)^2-1)((x-1)^2-1)$$

$h'(x)=0$, kun

$x-1=0$ tai $((x-1)^2-1)^2-1=0$ tai $(x-1)^2-1=0$

$x=1$ $\quad ((x-1)^2-1)^2=1 \quad |\sqrt{\ }$ $\quad (x-1)^2=1 \quad |\sqrt{\ }$

$(x-1)^2-1=\pm 1$ $\quad x-1=\pm 1$

$(x-1)^2=0$ tai $(x-1)^2=2$ $\quad x=2$ tai $x=0$

$x-1=0 \qquad x-1=\pm\sqrt{2}$

$x=1 \qquad x=1\pm\sqrt{2}$

Vastaus: $f\circ f:$ $\quad x=0$ tai $x=1$ tai $x=2$

$f\circ f\circ f: x=0$ tai $x=1$ tai $x=2$ tai $x=1\pm\sqrt{2}$

5. a) $f(x) = x^3 + 8$ Määrittely ja arvojoukko **R**

$$x^3 + 8 = y$$
$$x^3 = y - 8$$
$$x = \sqrt[3]{y-8}$$
$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-8}$$

b) $g(x) = x^2 - 6x - 7$, $x > 2$

Käänteisfunktiota ei ole, sillä esimerkiksi

$g(2{,}5) = -15{,}75$

$g(3{,}5) = -15{,}75$

g ei siis saa kaikkia arvojaan vain yhdessä pisteessä, kun $x > 2$.

c) $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$ Määritelty, kun $x \neq 1$

$$\frac{x}{x-1} = y \quad |\cdot (x-1)$$
$$x = yx - y$$
$$yx - x = y$$
$$x(y-1) = y \quad |: (y-1)$$
$$x = \frac{y}{y-1}$$

Määritelty, kun $y \neq 1$

$$h^{-1}(y) = \frac{y}{y-1}$$

Vastaus: a) $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-8}$ b) ei ole c) $h^{-1}(y) = \dfrac{y}{y-1}$

6. a) $f(x) = x^2 - 4$, $x < 0$ $\quad g(x) = \sqrt{x+4}$, $x > -4$

Eivät ole.
$f(g(x))$ ei ole määritelty, sillä $g(x) > 0$ kaikilla $x > -4$ ja f :n määrittelyjoukko on $x < 0$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1-x}{x}$

Kun $x \neq 0$, niin

$$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{1-x}{x} + {}^{x)}1} = \frac{1}{\frac{1-x+x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Kun $x \neq -1$, niin

$$g(f(x)) = \frac{{}^{x+1)}1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x+1-1}{x+1} : \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{1} = x$$

Siis $g = f^{-1}$

Vastaus: a) eivät ole $\qquad$ b) ovat

7. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x}$, $x > 0$

$$\frac{x-1}{2x} = y \quad \Big| \cdot 2x$$
$$x - 1 = 2xy$$
$$x - 2xy = 1$$
$$x(1-2y) = 1 \quad \Big| : (1-2y)$$
$$x = \frac{1}{1-2y}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{1-2y}$$

Määrittelyehto:

$$x > 0$$
$$\frac{1}{1-2y} > 0$$

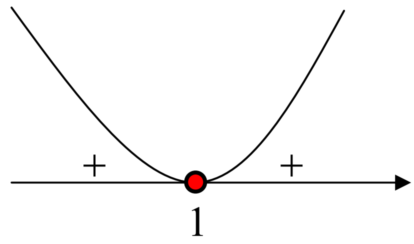
Osoittaja on positiivinen,
joten nimittäjänkin on oltava

$$1 - 2y > 0$$
$$2y < 1$$
$$y < \tfrac{1}{2}$$

Vastaus: $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{1-2y}$, $y < \dfrac{1}{2}$

8. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad |:3$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$



Koska $f'(x) \geq 0$ kaikilla x ja yhtäsuuruus on vain yksittäisessä pisteessä ($x = 1$), f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

a) $f^{-1}(9) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 9$

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 9$$
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0$$
$$x^2(x-3) + 3(x-3) = 0$$
$$(x-3)(\underbrace{x^2+3}_{>0}) = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

Siis $f^{-1}(9) = 3$

b) $f^{-1}(2) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 2$

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 2$$

Kokeilemalla huomataan, että $x = 2$ on ratkaisu:

$2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 8 - 12 + 6 = 2$

Siis $f^{-1}(2) = 2$

Vastaus: a) $f^{-1}(9) = 3$ b) $f^{-1}(2) = 2$

9. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$, $x > -1$ $\qquad f^{-1}$ on olemassa, $M_{f^{-1}} =]0, \tfrac{1}{2}[$

a) Käänteisfunktion määritelmän mukaan:
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

$(f^{-1} \circ f)'(x) = 1$, joten derivaatalla ei ole nollakohtia

b) $(f \circ f^{-1} \circ f)(x) = f(f^{-1}(f(x))) = f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1} \circ f)'(x) &= f'(x) \\ &= \frac{1\cdot(x^2+4x+5)-(x+2)(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2} \\ &= \frac{x^2+4x+5-2x^2-4x-4x-8}{(x^2+4x+5)^2} \\ &= \frac{-x^2-4x-3}{(x^2+4x+5)^2}\end{aligned}$$

Nollakohdat:
$-x^2-4x-3=0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)} = \frac{4\pm 2}{-2}$$

$x=-1$ tai $x=-3$

Eivät toteuta määrittelyehtoa $x > -1$

ei nollakohtia

Vastaus: a) ei ole b) ei ole

10. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

Funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y=x$ suhteen, joten ne leikkaavat (jos leikkaavat) suoralla $y=x$

Leikkauskohdat saadaan yhtälöstä

$$f(x)=x$$

$$\frac{1}{x-1}=x \quad \Big|\cdot(x-1)\neq 0$$

$$1=x^2-x$$

$$x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$y=x$, joten leikkauspisteet ovat siis $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ ja $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2})$

Vastaus: $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ ja $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2})$

11. a) $f(x)=\sqrt{10x-2x^2}-\sqrt{2x^2-9x+7}$

Määritelty, kun

$10x-2x^2\geq 0$ ja $2x^2-9x+7\geq 0$

Nollakohdat:

$10x-2x^2=0$

$2x(5-x)=0$

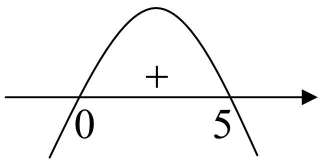
$x=0$ tai $5-x=0$

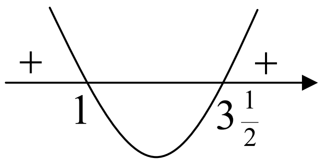
$x=5$

$2x^2-9x+7=0$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 2\cdot 7}}{2\cdot 2}=\frac{9\pm 5}{4}$$

$x=1$ tai $x=3\tfrac{1}{2}$





$0\leq x\leq 5$

$x\leq 1$ tai $x\geq 3\tfrac{1}{2}$

Siis $0\leq x\leq 1$ tai $3\tfrac{1}{2}\leq x\leq 5$

b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 16}}$

Määritelty, kun

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 16} \geq 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$x = -3$ tai $x = 5$

Nimittäjän nollakohdat:

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$x = \pm 4$$

		-4		-3		4		5	
$h(x)$	$+$	¦	$-$	|	$+$	¦	$-$	|	$+$

Testipisteet:

$h(-5) \approx 2{,}2 > 0$

$h(-3{,}5) \approx -1{,}1 < 0$

$h(0) \approx 0{,}94 > 0$

$h(4{,}5) \approx -0{,}88 < 0$

$h(6) = 0{,}45 > 0$

$h(x) \geq 0$, kun

$x < -4$ tai $-3 \leq x < 4$ tai $x \geq 5$

Vastaus: a) $0 \leq x \leq 1$ tai $3\frac{1}{2} \leq x \leq 5$

b) $x < -4$ tai $-3 \leq x < 4$ tai $x \geq 5$

12. a) $2\sqrt{2-x}-1=0$

Määritelty, kun $2-x \geq 0$

$x \leq 2$

$2\sqrt{2-x}=1 \quad |()^2$

Molemmat puolet ovat ei-negatiiviset

$4(2-x)=1$

$8-4x=1$

$-4x=-7$

$x=\frac{7}{4}$

b) $\sqrt{1-x^2}-2x=0$

$\sqrt{1-x^2}=2x \quad |()^2$

$1-x^2=4x^2$

$5x^2=1$

$x^2=\frac{1}{5} \quad |\sqrt{}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Määritelty, kun

$1-x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 1 \quad |\sqrt{}$

$|x| \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

Neliöönkorotus-ehto:

$2x \geq 0$

$x \geq 0$

Vain $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ toteuttaa molemmat ehdot

Vastaus: a) $x=\frac{7}{4}$ b) $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$

13. a) $x-\sqrt{x+7}=-1$

$x+1=\sqrt{x+7} \quad \Big|()^2$

$x^2+2x+1=x+7$

$x^2+x-6=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}$

$x=\dfrac{-1\pm5}{2}$

$x=-3$ tai $x=2$

Vain $x=2$ toteuttaa molemmat ehdot

Määritelty, kun
$x+7\geq0$

$x\geq-7$

Neliöönkorotus-
ehto:
$x+1\geq0$

$x\geq-1$

b) $\sqrt{x^2-2x-26}-\sqrt{3x+10}=0$

$\sqrt{x^2-2x-26}=\sqrt{3x+10} \quad \Big|()^2$

$x^2-2x-26=3x+10$

$x^2-5x-36=0$

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-36)}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm13}{2}$

$x=-4$ tai $x=9$

Tarkistetaan
vastaukset lopuksi

$x=-4$: $\quad \sqrt{(-4)^2-2\cdot(-4)-26}-\sqrt{3\cdot(-4)+10}=0$

$\sqrt{-2}-\sqrt{-2}=0$

Epätosi

$x=9$: $\quad \sqrt{9^2-2\cdot9-26}-\sqrt{3\cdot9+10}=0$

$\sqrt{37}-\sqrt{37}=0$

$0=0$

tosi

Siis vain $x=9$ toteuttaa yhtälön

Vastaus: a) $x=2$ b) $x=9$

14. a)

$$\lim_{x\to -2} {}^{\sqrt{2x^2-4}\,+\,2)}\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2-4}-2} = \lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(\sqrt{2x^2-4}+2)}{2x^2-4-4}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(\sqrt{2x^2-4}+2)}{2(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(\sqrt{2x^2-4}+2)}{2(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2x^2-4}+2}{x-2}$$

$$= \frac{\sqrt{2(-2)^2-4}+2}{-2-2}$$

$$= \frac{4}{-4}$$

$$= -1$$

b)

$$\lim_{x\to 1+} {}^{\sqrt{x-1})}\frac{2x-2}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1+}\frac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1+} 2\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-1} = 2\cdot 0 = 0$$

Vastaus: a) -1 b) 0

15. $f(x) = 2x - 1$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{5x^2 - 4}$

Leikkauspisteessä
$f(x) = g(x)$

$2x - 1 = \sqrt{5x^2 - 4} \quad |()^2$ $\qquad$ Tarkistetaan ratkaisut lopuksi

$4x^2 - 4x + 1 = 5x^2 - 4$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$x = -5$ tai $x = 1$

$x = -5$:
$2 \cdot (-5) - 1 = \sqrt{5 \cdot (-5)^2 - 4}$
$-11 = \sqrt{121}$
$-11 = 11$
epätosi

$x = 1$:
$2 \cdot 1 - 1 = \sqrt{5 \cdot 1^2 - 4}$
$1 = \sqrt{1}$
$1 = 1$
tosi

Siis kuvaajat leikkaavat vain kohdassa $x = 1$
$y = 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Leikkauspiste on $(1,1)$

Vastaus: $(1,1)$

16. a) $D(2\sqrt[4]{x}) = 2 \cdot Dx^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}$

b) $D\frac{2x^2}{\sqrt{x}} = 2 \cdot D\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot Dx^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$

c)

$$D\left(2x^3\sqrt[3]{x}\right) = 2 \cdot D\left(x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}}\right) = 2 \cdot Dx^{\frac{10}{3}} = 2 \cdot \frac{10}{3} x^{\frac{7}{3}} = \frac{20x^2 x^{\frac{1}{3}}}{3} = \frac{20x^2\sqrt[3]{x}}{3}$$

Vastaus: a) $\frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}$ b) $3\sqrt{x}$ c) $\frac{20x^2\sqrt[3]{x}}{3}$

17. a)

$$D\left(x\sqrt{x^2-1}\right)=D\left(x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=1\cdot(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+x\cdot\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$$=\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

b)

$$D\frac{\sqrt{2-2x}}{x^2+1}=D\frac{(2-2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}(2-2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)\cdot(x^2+1)-(2-2x)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-\frac{x^2+1}{\sqrt{2-2x}}-2x\sqrt{2-2x}}{(x^2+1)^2}=-\frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{2-2x}}+2x\sqrt{2-2x}}{(x^2+1)^2}$$

c)

$$D(\sqrt{x-3}+3x)^2=2(\sqrt{x-3}+3x)\cdot D(\sqrt{x-3}+3x)$$

$$=2(\sqrt{x-3}+3x)\cdot D((x-3)^{\frac{1}{2}}+3x)$$

$$=2(\sqrt{x-3}+3x)\cdot(\tfrac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1+3)$$

$$=2(\sqrt{x-3}+3x)\cdot(\frac{1}{2\sqrt{x-3}}+3)$$

Vastaus: a) $\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ b) $-\frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{2-2x}}+2x\sqrt{2-2x}}{(x^2+1)^2}$

c) $2(\sqrt{x-3}+3x)\cdot(\frac{1}{2\sqrt{x-3}}+3)$

18. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{10-2x} = (x-1)^{\frac{1}{2}} + (10-2x)^{\frac{1}{2}}$

Määritelty, kun

$x - 1 \geq 0$ ja $10 - 2x \geq 0$

$x \geq 1$ $\quad -2x \geq -10 \quad |: (-2) < 0$

$x \leq 5$

Siis $1 \leq x \leq 5$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 + \frac{1}{2}(10-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{10-2x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{10-2x}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{10-2x}} \quad | \text{kerrotaan ristiin}$$

$$\sqrt{10-2x} = 2\sqrt{x-1} \quad |()^2$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiiviset

$$10 - 2x = 4(x-1)$$

$$10 - 2x = 4x - 4$$

$$6x = 14$$

$$x = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$$

Vastaus: $x = 2\frac{1}{3}$

19. $g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=(4-x)^{\frac{1}{2}}+(x+5)^{\frac{1}{2}}$

Määritelty, kun $\quad 4-x\geq 0$ ja $x+5\geq 0$

$$x\leq 4 \qquad x\geq -5$$

Siis $-5\leq x\leq 4$ (suljettu väli)

$$g'(x)=\frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)+\frac{1}{2}(x+5)^{\frac{1}{2}}\cdot 1=-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$g'(x)=0$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}=0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+5}}=\frac{1}{2\sqrt{4-x}} \quad |\text{kerrotaan ristiin}$$

$$2\sqrt{4-x}=2\sqrt{x+5} \quad |:2$$

$$\sqrt{4-x}=\sqrt{x+5} \quad |()^2$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiiviset

$$4-x=x+5$$

$$2x=-1$$

$$x=-\tfrac{1}{2}$$

$$g(-5)=\sqrt{4-(-5)}+\sqrt{-5+5}=\sqrt{9}+\sqrt{0}=3$$

$$g(4)=\sqrt{4-4}+\sqrt{4+5}=\sqrt{0}+\sqrt{9}=3$$

$$g(-\tfrac{1}{2})=\sqrt{4-(-\tfrac{1}{2})}+\sqrt{-\tfrac{1}{2}+5}=\sqrt{\tfrac{9}{2}}+\sqrt{\tfrac{9}{2}}=2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\overset{\sqrt{2})}{=}\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\approx 4{,}2$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $3\sqrt{2}$ ja pienin arvo on 3.

Vastaus: suurin $3\sqrt{2}$, pienin 3

20. $f(x)=3x^2-4x\sqrt{x}=3x^2-4x\cdot x^{\frac{1}{2}}=3x^2-4x^{\frac{3}{2}}$

Määritelty, kun $x\geq 0$

$$f'(x)=6x-4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=6x-6\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x)&=0\\ 6x-6\sqrt{x}&=0\\ 6x&=6\sqrt{x} \quad &&|:6\\ x&=\sqrt{x} &&|()^2\\ x^2&=x\\ x^2-x&=0\\ x(x-1)&=0\\ x=0 \text{ tai } x&=1 \end{aligned}$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiiviset, kun $x\geq 0$

		0	1
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Testipisteet:
$f'(0{,}5)\approx -1{,}24<0$
$f'(2)\approx 3{,}51>0$

f on vähenevä, kun $0\leq x\leq 1$

Vastaus: $0\leq x\leq 1$

21. Välillä [0, 6]

$$g(x) = 8(x+1)\sqrt{x+1} - 3x^2 - 6x$$
$$= 8(x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}} - 3x^2 - 6x$$
$$= 8(x+1)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 - 6x$$

$$g'(x) = 8 \cdot \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 - 6x - 6 = 12\sqrt{x+1} - 6x - 6 = 6(2\sqrt{x+1} - x - 1)$$

$$g'(x) = 0$$
$$2\sqrt{x+1} - x - 1 = 0$$
$$2\sqrt{x+1} = x+1 \quad \Big|()^2$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiiviset välillä [0, 6]

$$4(x+1) = x^2 + 2x + 1$$
$$4x + 4 = x^2 + 2x + 1$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$x = -1 \text{ tai } x = 3$$

Välillä]0, 6[on vain $x = 3$

$$g(0) = 8(0+1)\sqrt{0+1} - 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 8$$
$$g(6) = 8(6+1)\sqrt{6+1} - 3 \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 = 56\sqrt{7} - 144 \approx 4{,}2$$
$$g(3) = 8(3+1)\sqrt{3+1} - 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 64 - 45 = 19$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on 19 ja pienin $56\sqrt{7} - 144$

Vastaus: suurin 19, pienin $56\sqrt{7} - 144$

22. $f(x)=\sqrt{x^2+8x}=(x^2+8x)^{\frac{1}{2}}$

$x_0=1$: $\quad y_0=f(1)=\sqrt{1^2+8\cdot 1}=\sqrt{9}=3$

Normaali kulkee siis pisteen $(1,\ 3)$ kautta.

Kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k_t=f'(1)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+8x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+8)=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

$$k_t=f'(1)=\frac{1+4}{\sqrt{1^2+8\cdot 1}}=\frac{5}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$$

Normaalin kulmakerroin k_n:

$$k_t\cdot k_n=-1$$

$$\frac{5}{3}k_n=-1 \quad \Big|\cdot\frac{3}{5}$$

$$k_n=-\frac{3}{5}$$

Normaalin yhtälö:

$$y-y_0=k_n(x-x_0)$$

$$y-3=-\frac{3}{5}(x-1)$$

$$y-3=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$$

$$y=-\frac{3}{5}x+3\frac{3}{5}$$

Vastaus: $y=-\frac{3}{5}x+3\frac{3}{5}$

23. $f(x) = \sqrt{16-2x} = (16-2x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(16-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{16-2x}}$$

Tangentti kohtaan $x = a$:

$$k_t = f'(a) = -\frac{1}{\sqrt{16-2a}}$$

Tangentti kulkee pisteen $(a, f(a)) = (a, \sqrt{16-2a})$ kautta:

$\Rightarrow$ tangentin yhtälö $\qquad y - \sqrt{16-2a} = -\frac{1}{\sqrt{16-2a}}(x-a)$

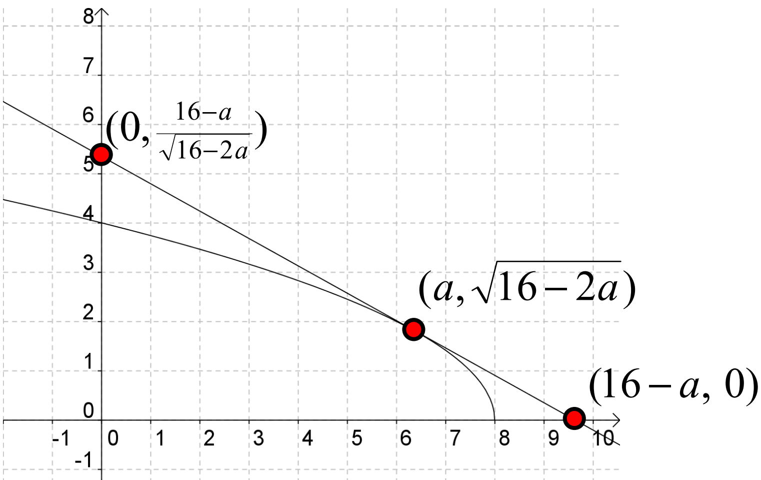
Koordinaattiakselien leikkauskohdat:

y-akselilla $x = 0$: $\qquad y - \sqrt{16-2a} = -\frac{1}{\sqrt{16-2a}}(-a)$

$$y = \frac{a}{\sqrt{16-2a}} + {}^{\sqrt{16-2a})}\sqrt{16-2a}$$

$$y = \frac{a + 16 - 2a}{\sqrt{16-2a}} = \frac{16-a}{\sqrt{16-2a}}$$

x-akselilla $y = 0$: $\qquad -\sqrt{16-2a} = -\frac{1}{\sqrt{16-2a}}(x-a) \quad \Big| \cdot (-\sqrt{16-2a})$



Kolmion ala:

$$A(a) = \frac{1}{2} \cdot (16-a) \cdot \frac{16-a}{\sqrt{16-2a}} = \frac{(16-a)^2}{2\sqrt{16-2a}} = \frac{(16-a)^2}{2(16-2a)^{\frac{1}{2}}}, \quad a < 8$$

$$A'(a)=\frac{2(16-a)\cdot(-1)\cdot 2(16-2a)^{\frac{1}{2}}-(16-a)^2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}(16-2a)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)}{\left(2(16-2a)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{16-2a}\,)\;-4(16-a)\sqrt{16-2a}+\dfrac{2(16-a)^2}{\sqrt{16-2a}}}{4(16-2a)}$$

$$=\frac{-4(16-a)(16-2a)+2(16-a)^2}{4(16-2a)\sqrt{16-2a}}$$

$$=\frac{2(16-a)\big(-2(16-2a)+16-a\big)}{4(16-2a)\sqrt{16-2a}}$$

$$=\frac{(16-a)(-32+4a+16-a)}{2(16-2a)\sqrt{16-2a}}$$

$$=\frac{(16-a)(3a-16)}{2(16-2a)\sqrt{16-2a}}$$

$A'(a)=0$, kun

$16-a=0$ tai $3a-16=0$

$a=16$ $\quad$ $3a=16$

$a=5\frac{1}{3}$

	$5\frac{1}{3}$		8
$A'(a)$	$-$	$+$	
$A(a)$	↘	↗	

Testipisteet:

$A'(0)=-2<0$

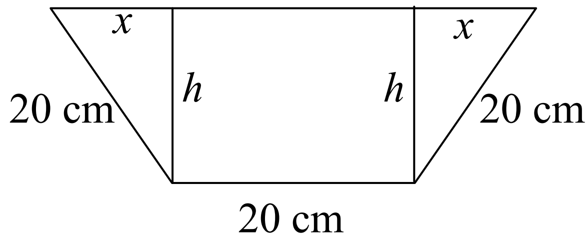
$A'(6)=1{,}25>0$

Ala on pienin, kun $x=5\frac{1}{3}$. Tällöin

$$y=f(5\tfrac{1}{3})=\sqrt{16-2\cdot 5\tfrac{1}{3}}=\sqrt{\tfrac{16}{3}}=\tfrac{4}{\sqrt{3}}$$

Vastaus: Kuvaajan piste on $(5\frac{1}{3},\frac{4}{\sqrt{3}})$

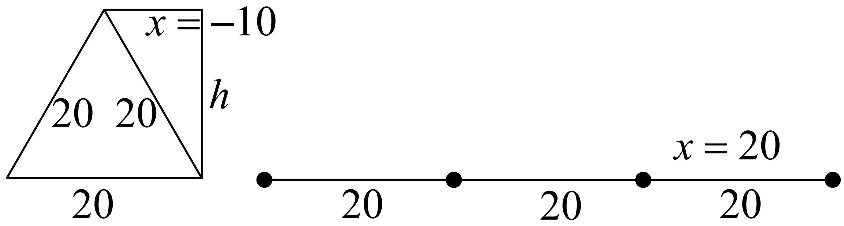
24. Vettä kulkee mahdollisimman paljon, kun poikkileikkauksen pinta-ala on suurimmillaan



$$h^2 + x^2 = 20^2$$

$$h = \sqrt{400 - x^2}$$

Rajatapaukset:



Siis $-10 \le x \le 20$

Pinta-ala:

$$A = \frac{(20+2x)+20}{2} \cdot h$$

$$A(x) = \frac{40+2x}{2} \cdot \sqrt{400-x^2} = (20+x)\sqrt{400-x^2} = (20+x)(400-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$A'(x) = 1 \cdot (400-x^2)^{\frac{1}{2}} + (20+x) \cdot \frac{1}{2}(400-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= {}^{\sqrt{400-x^2})}\sqrt{400-x^2} - \frac{x(20+x)}{\sqrt{400-x^2}}$$

$$= \frac{(400-x^2)-(20x+x^2)}{\sqrt{400-x^2}}$$

$$= \frac{-2x^2 - 20x + 400}{\sqrt{400-x^2}}$$

$$A'(x) = 0$$

$$-2x^2 - 20x + 400 = 0$$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 400}}{2 \cdot (-2)} = \frac{20 \pm 60}{-4}$$

$x = -20$ tai $x = 10$

$A(-10) \approx 173{,}2$

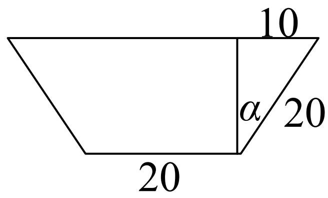
$A(20) = 0$

$A(10) \approx 519{,}6$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $A(10)$

Kun $x = 10$, niin sivuseinän ja pystysuoran välinen kulma on:

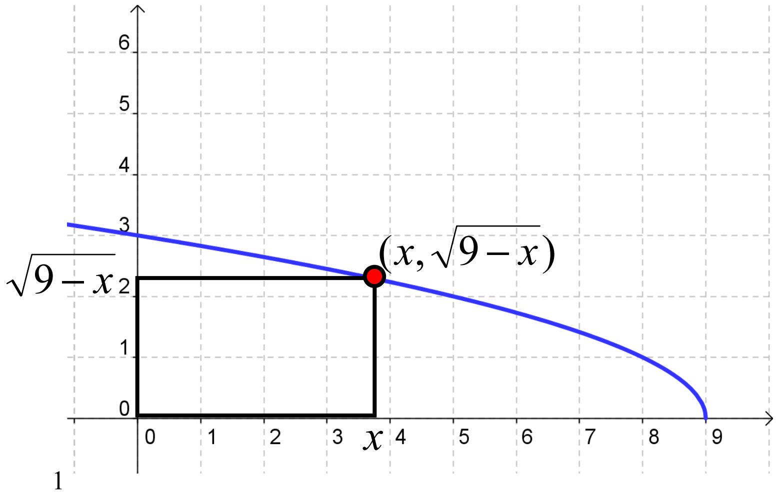
$$\sin\alpha = \frac{10}{20} \quad \Big|\sin^{-1}$$
$$\alpha = 30^\circ$$



Pohjan ja sivuseinän välinen kulma on $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

Vastaus: Pohjan ja sivuseinän välinen kulma 120°

25. Alalle saadaan lauseke



$$A(x) = x\sqrt{9-x} = x(9-x)^{\frac{1}{2}}$$

missä $0 \leq x \leq 9$

$$A'(x) = 1 \cdot (9-x)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(9-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)$$

$$= {}^{2\sqrt{9-x})}\sqrt{9-x} - \frac{x}{2\sqrt{9-x}}$$

$$= \frac{2(9-x)-x}{2\sqrt{9-x}}$$

$$= \frac{18-3x}{2\sqrt{9-x}}$$

$$A'(x) = 0$$

$$18 - 3x = 0$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

$$A(0) = 0$$

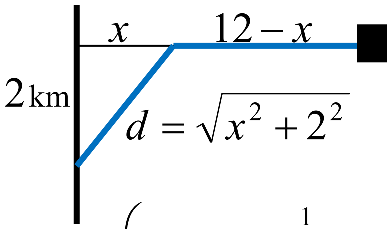
$$A(9) = 0$$

$$A(6) = 6 \cdot \sqrt{9-6} = 6\sqrt{3}$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $6\sqrt{3}$

Vastaus: $6\sqrt{3}$

26. Hinta tien varrella kilometriä kohti = h
Hinta metsässä = $3h$



Sähkölinjan kokonaiskustannukset:

$$H(x)=3h\sqrt{x^2+4}+h(12-x)=h(3\sqrt{x^2+4}+12-x)=h\left(3(x^2+4)^{\frac{1}{2}}+12-x\right)$$

missä $0\le x\le 12$

$$H'(x)=h\left(3\cdot\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x-1\right)=h\left(\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}-1\right)$$

$$H'(x)=0$$

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}-1=0$$

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}=1 \quad \left|\cdot\sqrt{x^2+4}\right.$$

$$3x=\sqrt{x^2+4} \quad \left|()^2\right.$$

Kun $0\le x\le 12$, niin molemmat puolet ovat ei-negatiiviset

$$9x^2=x^2+4$$

$$8x^2=4 \quad |:8$$

$$x^2=\tfrac{1}{2}$$

$$x=\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

Välillä $]0,12[$ on $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7$

$$H(0)=h(3\sqrt{0^2+4}+12-0)=18h$$

$$H(12)=h(3\sqrt{12^2+4}+12-12)\approx 36{,}5h$$

$$H(\tfrac{1}{\sqrt{2}})=h(3\sqrt{(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2+4}+12-\tfrac{1}{\sqrt{2}})\approx 17{,}7h$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $H(\tfrac{1}{\sqrt{2}})$.

Vastaus: Hinta on pienin, kun linja vedetään $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7$ km:n päähän teiden risteyksestä.

27. $A(t)=\left(t-2,\ t^2+t+15\right)$ ja $B(t)=\left(t-4,\ t+1\right),\quad t\geq 0$

Hetkellä t kappaleiden välinen etäisyys:

$$d(t)=\sqrt{\left((t-4)-(t-2)\right)^2+\left((t+1)-(t^2+t+15)\right)^2}$$
$$=\sqrt{\underbrace{(-2)^2+(-t^2-14)^2}_{f(t)}}$$

Juurrettava on ei-negatiivinen kaikilla t, joten funktion d suurin arvo saavutetaan kohdassa, jossa $f(t)=(-2)^2+(-t^2-14)^2$ saa suurimman arvon.

$$f(t)=(-2)^2+(-t^2-14)^2$$
$$f'(t)=2(-t^2-14)\cdot(-2t)=-4t(-t^2-14)$$

$f'(t)=0$, kun

$t=0$ tai $-t^2-14=0$

$t^2=-14$ Ei ratkaisua

Ei derivaatan nollakohtia, kun $t>0$

Koska $f'(1)=-4\cdot 1\cdot(-1^2-14)=60>0$, niin $f'(t)>0$ kaikilla $t\geq 0$.

$\Rightarrow f$ ja siten myös d ovat aidosti kasvavia, kun $t\geq 0$.

$\Rightarrow$ funktion d pienin arvo on

$$d(0)=\sqrt{(-2)^2+(-0^2-14)^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

Vastaus: pienin etäisyys $10\sqrt{2}$

28. a) $4 \cdot 8^{3x} = 131072 \quad |:4$

$$8^{3x} = 32\,768$$

$$8^{3x} = 8^5$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

b) $2^{2x^2-1} = 16^{x+\frac{5}{4}}$

$$2^{2x^2-1} = (2^4)^{x+\frac{5}{4}}$$

$$2^{2x^2-1} = 2^{4x+5}$$

$$2x^2 - 1 = 4x + 5$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 3$$

Vastaus: a) $x = \frac{5}{3}$ b) $x = -1$ tai $x = 3$

29. Alkuperäinen massa m_0

Kulunut aika (vrk)	Massa
0	m_0
$1\cdot 12$	$\frac{1}{2}m_0$
$2\cdot 12$	$\frac{1}{2^2}m_0$
$3\cdot 12$	$\frac{1}{2^3}m_0$
x	$\frac{1}{2^{\frac{x}{12}}}m_0$

Jäljellä $\frac{1}{64}$ alkuperäisestä massasta:

$$\frac{1}{2^{\frac{x}{12}}}m_0 = \frac{1}{64}m_0 \quad |:m_0$$

$$\frac{1}{2^{\frac{x}{12}}} = \frac{1}{64}$$

$$2^{\frac{x}{12}} = 64$$

$$2^{\frac{x}{12}} = 2^6$$

$$\frac{x}{12} = 6 \quad |\cdot 12$$

$$x = 72$$

Vastaus: 72 vuorokauden kuluttua

30. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2^x = 8^y \end{cases}$

$$2^x = 8^y$$
$$2^x = (2^3)^y$$
$$2^x = 2^{3y}$$
$$x = 3y$$

$$3y + 2y = 4$$
$$5y = 4$$
$$y = \frac{4}{5}$$

$$x = 3y$$
$$x = 3 \cdot \frac{4}{5}$$
$$x = \frac{12}{5}$$

Vastaus: $x = \frac{12}{5}$ ja $y = \frac{4}{5}$

31. a) $(\tfrac{1}{4})^{5-2x} < (\tfrac{1}{2})^{x+2}$

$$((\tfrac{1}{2})^2)^{5-2x} < (\tfrac{1}{2})^{x+2}$$

$$(\tfrac{1}{2})^{10-4x} < (\tfrac{1}{2})^{x+2} \quad \Big| (\tfrac{1}{2})^t \text{ on aidosti vähenevä}$$

$$10-4x > x+2$$

$$-5x > -8 \quad \Big| :(-5) < 0$$

$$x < \frac{8}{5}$$

b) $27^{x^2+1} > 3^{11x-3}$

$$(3^3)^{x^2+1} > 3^{11x-3}$$

$$3^{3x^2+3} > 3^{11x-3} \quad \Big| 3^t \text{ on aidosti kasvava}$$

$$3x^2+3 > 11x-3$$

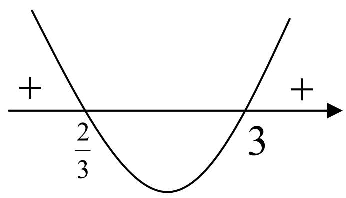
$$3x^2-11x+6 > 0$$

Nollakohdat:

$$3x^2-11x+6 = 0$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4\cdot 3\cdot 6}}{2\cdot 3} = \frac{11\pm 7}{6}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ tai } x = 3$$



Siis $3x^2-11x+6>0$, kun $x < \frac{2}{3}$ tai $x > 3$

Vastaus: a) $x < \frac{8}{5}$ b) $x < \frac{2}{3}$ tai $x > 3$

32. a)

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \quad \Big|()^2 \\ (2^x)^2 &= 9 \\ 2^{2x} &= 9 \\ (2^2)^x &= 9 \\ 4^x &= 9 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3^{400} &= 3^{\frac{1}{3}\cdot 1200} \\ &= \left(3^{1200}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= b^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{b} \end{aligned}$$

Vastaus: a) 9 b) $\sqrt[3]{b}$

33. a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} 3^4 = \log_{\frac{1}{3}} (\tfrac{1}{3})^{-4} = -4$

c) $\log_4 \sqrt[3]{4} = \log_4 4^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$

d)

$$\log_{125} 25 = \log_{125} 5^2 = \log_{125} \sqrt[3]{125}^{\,2} = \log_{125}\left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \log_{125} 125^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

Vastaus: a) 5 b) -4 c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$

34. a) $\log_2(5x-10)$

Määritelty, kun

$$5x-10>0$$
$$5x>10 \quad |:5$$
$$x>2$$

b) $\log_3(x^2-9)$

Määritelty, kun

$$x^2-9>0$$
$$x^2>9 \quad |\sqrt{}$$
$$|x|>3$$
$$x<-3 \text{ tai } x>3$$

c) $\log_3(x-9)^2$

Määritelty, kun

$$(x-9)^2>0$$
$$x-9\neq 0$$
$$x\neq 9$$

Vastaus: a) $x>2$ b) $x<-3$ tai $x>3$ c) $x\neq 9$

35. $11^{222}=(10^{\lg 11})^{222}=10^{222\cdot\lg 11}\approx 10^{231,2}$

$22^{111}=(10^{\lg 22})^{111}=10^{111\cdot\lg 22}\approx 10^{149,0}$

Siis 11^{222} on suurempi

Vastaus: 11^{222}

36. a) $\log_k 125 = 3$

$$k^3 = 125$$

$$k = \sqrt[3]{125} = 5$$

b) $\log_{3k+1} 144 = 2$

$$(3k+1)^2 = 144 \quad \Big|\sqrt{}$$

$$3k+1 = \pm 12$$

Kantaluku $3k+1$ ei voi olla negatiivinen

$$3k+1 = 12$$

$$3k = 11 \quad |:3$$

$$k = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

Vastaus: a) $k = 5$ b) $k = 3\frac{2}{3}$

37. a)

$$5 \cdot 3^x = 20 \quad |:5$$

$$3^x = 4$$

$$\lg 3^x = \lg 4$$

$$x \lg 3 = \lg 4$$

$$x = \frac{\lg 4}{\lg 3} \approx 1{,}3$$

b)

$$2e^{5x} = 12 \quad |:2$$

$$e^{5x} = 6$$

$$5x = \ln 6 \quad |:5$$

$$x = \frac{\ln 6}{5} \approx 0{,}4$$

c)

$$10^x + 4 = 3 \cdot 10^x$$

$$10^x - 3 \cdot 10^x = -4$$

$$-2 \cdot 10^x = -4 \quad |:(-2)$$

$$10^x = 2$$

$$x = \lg 2 \approx 0{,}3$$

Vastaus: a) $x \approx 1{,}3$ b) $x \approx 0{,}4$ c) $x \approx 0{,}3$

38. a)

$$\log_3 15 - \log_3 20 + \log_3 108 = \log_3\left(\frac{15}{20}\cdot 108\right) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

b)

$$3\log_5 10 - 3\log_5 2 = 3(\log_5 10 - \log_5 2) = 3\log_5 \frac{10}{2} = 3\log_5 5 = 3\cdot 1 = 3$$

Vastaus: a) 4 b) 3

39. a) $\ln(x+1) - \ln(x-1)^2 = 0$

Määritelty, kun

$x+1>0$ ja $x-1 \neq 0$

$x>-1$ ja $x \neq 1$

$$\ln(x+1) = \ln(x-1)^2$$
$$x+1 = (x-1)^2$$
$$x+1 = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$

$x = 0$ tai $x = 3$

b) $\lg(1-2x) + \lg(-x) = 1$

Määritelty, kun

$1-2x>0$ ja $-x>0$

$2x<1$ ja $x<0$

$x<\frac{1}{2}$ ja $x<0$ $\Rightarrow x<0$

$$\lg(1-2x) + \lg(-x) = 1$$
$$\lg\big((1-2x)(-x)\big) = 1$$
$$\lg(2x^2 - x) = 1$$
$$2x^2 - x = 10^1$$
$$2x^2 - x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-10)}}{2\cdot 2}$$

$$x = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$x = -2$ tai $x = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$

vain $x = -2$ toteuttaa määrittelyehdon

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x = 3$ b) $x = -2$

40. $\log_6(x-6)+\log_6(x-3)+\log_6(2+x)=2$

Määritelty, kun

$x-6>0$ ja $x-3>0$ ja $2+x>0$

$x>6$ $\quad$ $x>3$ $\quad$ $x>-2$

Siis $x>6$

$$\log_6(x-6)+\log_6(x-3)+\log_6(2+x)=2$$
$$\log_6\big((x-6)(x-3)(2+x)\big)=2$$
$$(x-6)(x-3)(2+x)=6^2$$
$$(x^2-3x-6x+18)(2+x)=36$$
$$(x^2-9x+18)(2+x)-36=0$$
$$2x^2+x^3-18x-9x^2+36+18x-36=0$$
$$x^3-7x^2=0$$
$$x^2(x-7)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=7$$

Vain $x=7$ toteuttaa määrittelyehdon

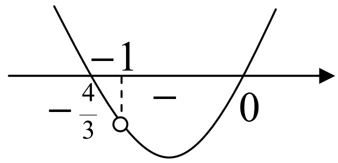
Vastaus: $x=7$

41\. a) $\ln(x+2)^2 > \ln(2x+2)^2$
ln on aidosti kasvava

Määritelty, kun
$x+2 \neq 0$ ja $2x+2 \neq 0$
$x \neq -2$ ja $2x \neq -2$
$x \neq -1$

$$(x+2)^2 > (2x+2)^2$$
$$x^2+4x+4 > 4x^2+8x+4$$
$$3x^2+4x < 0$$

Nollakohdat:
$3x^2+4x=0$
$x(3x+4)=0$
$x=0$ tai $3x+4=0$
$3x=-4$
$x=-\frac{4}{3}$



Siis $3x^2+4x<0$, kun $-\frac{4}{3} < x < 0$ ja $x \neq -1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-9) < 3$

Määritelty, kun
$x^2-9>0$
$x^2>9 \quad |\sqrt{\ }$
$|x|>3$
$x<-3$ tai $x>3$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-9) < \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^3$
$\log_{\frac{1}{2}}$ on aidosti vähenevä
$x^2-9 > \frac{1}{8}$
$x^2 > \frac{73}{8} \quad |\sqrt{\ }$
$|x| > \sqrt{\frac{73}{8}} \approx 3{,}02$
$x < -\sqrt{\frac{73}{8}}$ tai $x > \sqrt{\frac{73}{8}}$

Vastaus: a) $-\frac{4}{3} < x < 0$ ja $x \neq -1$ b) $x < -\sqrt{\frac{73}{8}}$ tai $x > \sqrt{\frac{73}{8}}$

42. a) $De^{-5x} = e^{-5x} \cdot D(-5x) = -5e^{-5x}$

b) $De^{2x^2} = e^{2x^2} \cdot D(2x^2) = 4xe^{2x^2}$

c) $D\dfrac{1}{e^{x^3}} = De^{-x^3} = e^{-x^3} \cdot D(-x^3) = -3x^2e^{-x^3} = -\dfrac{3x^2}{e^{x^3}}$

Vastaus: a) $-5e^{-5x}$ b) $4xe^{2x^2}$ c) $-\dfrac{3x^2}{e^{x^3}}$

43. a) $D(x^3e^x) = 3x^2e^x + x^3e^x$

b)

$$D\frac{e^{2x}}{2-e^{2x}} = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (2-e^{2x}) - e^{2x} \cdot (-e^{2x}) \cdot 2}{(2-e^{2x})^2}$$

$$= \frac{4e^{2x} - 2e^{4x} + 2e^{4x}}{(2-e^{2x})^2}$$

$$= \frac{4e^{2x}}{(2-e^{2x})^2}$$

c) $D(e^{-x}+1)^3 = 3(e^{-x}+1)^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -3e^{-x}(e^{-x}+1)^2$

Vastaus: a) $3x^2e^x + x^3e^x$ b) $\dfrac{4e^{2x}}{(2-e^{2x})^2}$ c) $-3e^{-x}(e^{-x}+1)^2$

44. $f(x)=e^{2x^3}$ $\qquad g(x)=4-x$

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{2(4-x)^3}$$
$$h'(x)=e^{2(4-x)^3}\cdot 2\cdot 3(4-x)^2\cdot(-1)=-6(4-x)^2\underbrace{e^{2(4-x)^3}}_{>0}$$

$$h'(x)=0$$
$$4-x=0$$
$$x=4$$

$$h'(3)=-6(4-3)^2e^{2(4-3)^3}=-6\cdot 1\cdot e^2=-6e^2$$

Vastaus: $(f\circ g)'(3)=-6e^2$, $(f\circ g)'(x)=0$ kun $x=4$

45. $f(x)=(x-1)e^x$

$$f'(x)=1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x=e^x(1+x-1)=xe^x$$

$$f'(x)=0$$
$$x\underbrace{e^x}_{>0}=0$$
$$x=0$$

		0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Testipisteet:
$f'(-1)=-e^{-1}<0$
$f'(1)=e^1>0$

Minimiarvo $f(0)=(0-1)e^0=-1\cdot 1=-1$

Vastaus: Minimiarvo -1, ei maksimiarvoa

46. $g(x) = 2ex - e^{2x}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e - 2e^{2x} \\ g'(x) &= 0 \\ 2e - 2e^{2x} &= 0 \\ 2e^{2x} &= 2e \quad |:2 \\ e^{2x} &= e^{1} \\ 2x &= 1 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	$+$	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Testipisteet:

$g'(0) = 2e - 2e^{0} = 2e - 2 > 0$

$g'(1) = 2e - 2e^{2} < 0$

Suurin arvo $g(\tfrac{1}{2}) = 2e \cdot \tfrac{1}{2} - e^{2 \cdot \frac{1}{2}} = e - e = 0$

Vastaus: 0

47. $y = e^{\frac{3}{2}x} + 1$

$y' = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}$

Tangentin yhtälö kohdassa $x = 0$:

$y = e^{\frac{3}{2}\cdot 0} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ piste $(0, 2)$

$k_t = y'(0) = \frac{3}{2}e^0 = \frac{3}{2}$

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0)$

$y = \frac{3}{2}x + 2$

Auto suistuu tieltä tätä suoraa pitkin.

Kun $x = 1$, niin tangentilla

$y = \frac{3}{2}\cdot 1 + 2 = 3\frac{1}{2} \notin [3, 3\frac{1}{4}]$

Siis auto ei osu seinään

Vastaus: Ei osu

48. a) $$D\left(x^3 \ln x\right) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$$

b) $$D\frac{x}{\ln x} = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

c)
$$D\left(\ln\sqrt{x^2+4}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot D(x^2+4)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+4}}$$
$$= \frac{x}{x^2+4}$$

Vastaus: a) $3x^2 \ln x + x^2$ b) $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ c) $\frac{x}{x^2+4}$

49. $f(x)=\ln(x+1)+\ln(16-x^2)$

Määritelty, kun

$x+1>0$ ja $16-x^2>0$

$x>-1$ $x^2<16 \quad |\sqrt{\ }$

$|x|<4$

$-4<x<4$

Siis $-1<x<4$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{-2x}{16-x^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{16-x^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{16-x^2}=0$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{16-x^2} \quad | \text{ kerrotaan ristiin}$$

$$16-x^2=2x^2+2x$$

$$3x^3+2x-16=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3\cdot(-16)}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm14}{6}$$

$$x=-\frac{16}{6}=-2\frac{2}{3} \text{ tai } x=2$$

Määrittelyehdon toteuttaa vain $x=2$

	-1	2	4
$f'(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	↗	↘	

Testipisteet:

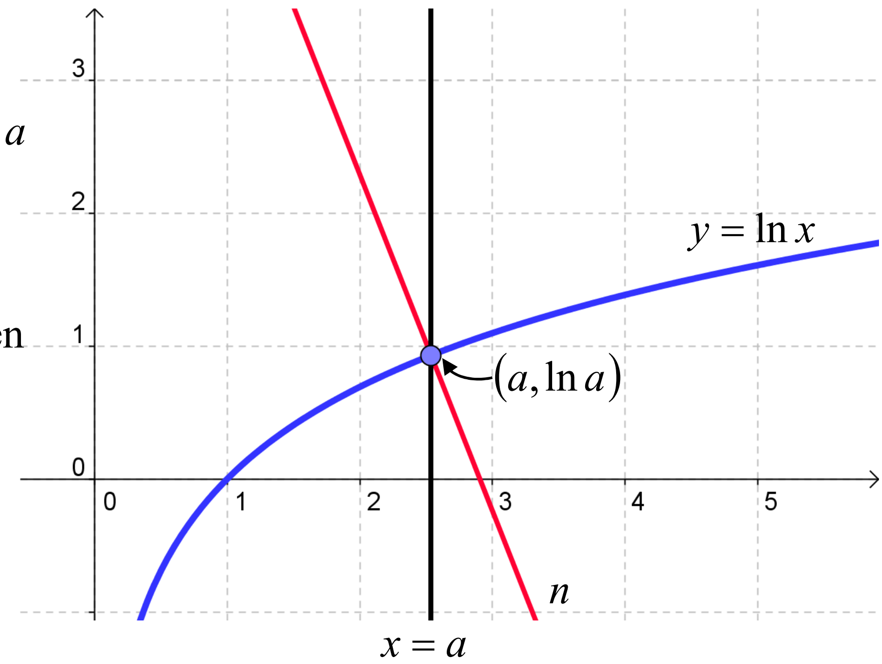
$f'(-1)=-e^{-1}<0$

$f'(1)=e^{1}>0$

Suurin arvo $f(2)=\ln(2+1)+\ln(16-2^2)=\ln 3+\ln 12=\ln 36$

Vastaus: $\ln 36$

50. $y = \ln x$



Normaali kohtaan $x = a$ missä $a \geq 1$:

$x = a$: $y = \ln a$
normaali kulkee pisteen $(a, \ln a)$ kautta

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$k_t = y'(a) = \frac{1}{a}$$

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -a$$

Normaalin yhtälö:

$$y - \ln a = -a(x - a)$$

$$y = -ax + a^2 + \ln a$$

Normaalin ja *x*-akselin leikkauskohta:

$$y = 0$$

$$-ax + a^2 + \ln a = 0$$

$$ax = a^2 + \ln a \quad |: a$$

$$x = a + \frac{\ln a}{a}$$

Kolmion kanta on $a + \frac{\ln a}{a} - a = \frac{\ln a}{a}$

Kolmion korkeus on $\ln a$

Kolmion ala $\quad A(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln a}{a} \cdot \ln a = \frac{(\ln a)^2}{2a}$, $a \geq 1$

$$A'(a)=\frac{2(\ln a)\cdot\frac{1}{a}\cdot 2a-(\ln a)^2\cdot 2}{(2a)^2}=\frac{2\ln a(2-\ln a)}{4a^2}=\frac{\ln a(2-\ln a)}{2a^2}$$

$A'(a)=0$, kun

$\ln a=0$ tai $2-\ln a=0$

$a=e^0$ $\qquad \ln a=2$

$a=1$ $\qquad a=e^2$

		1	e^2
$A'(a)$		$+$	$-$
$A(a)$		$\nearrow$	$\searrow$

Testipisteet:

$$A'(e)=\frac{\ln e(2-\ln e)}{2e^2}=\frac{1}{2e^2}>0$$

$$A'(e^3)=\frac{\ln e^3(2-\ln e^3)}{2e^6}=-\frac{3}{2e^6}<0$$

Suurin ala on

$$A(e^2)=\frac{(\ln e^2)^2}{2e^2}=\frac{2^2}{2e^2}=\frac{2}{e^2}$$

Vastaus: $\frac{2}{e^2}$

Testi 1

1. a) $D\left((5x+1)^{10}\right)=10(5x+1)^9\cdot D(5x+1)=10(5x+1)^9\cdot 5=50(5x+1)^9$

b) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=D\left(x^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

c) $D\left(\frac{1}{\sqrt{2x+2}}\right)=D\left(\frac{1}{(2x+2)^{\frac{1}{2}}}\right)=D\left((2x+2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$=-\frac{1}{2}(2x+2)^{-\frac{3}{2}}\cdot D(2x+2)$$

$$=-\frac{2}{2(2x+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{(2x+2)\sqrt{2x+2}}$$

d) $D\left(\ln(x^4+1)\right)=\frac{D(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{4x^3}{x^4+1}$

e) $D\left(e^{4x}\right)=e^{4x}\cdot D(4x)=4e^{4x}$

f) $D\left(x^2e^{-x}\right)=2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$

2. a) $2\log_3(3\sqrt{2})-\log_3 2=\log_3(3\sqrt{2})^2-\log_3 2=\log_3\frac{9\cdot 2}{2}$

$$=\log_3 9$$
$$=\log_3 3^2$$
$$=2$$

b)

$$\log_2(x+1)=1+\log_2 5 \qquad M: x+1>0$$
$$\log_2(x+1)-\log_2 5=1 \qquad x>-1$$
$$\log_2\frac{x+1}{5}=1$$
$$\frac{x+1}{5}=2^1$$
$$x+1=10$$
$$x=9$$

3. $f(x)=x\ln x \qquad \frac{1}{10}\le x\le 1$

$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

Derivaatan nollakohdat:

$\ln x+1=0$

$\ln x=-1$

$x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$$f\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}\cdot\ln\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}(\ln 1-\ln 10)=-\frac{\ln 10}{10}\approx -0{,}23$$
$$f(1)=1\cdot\ln 1=0$$
$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}(\ln 1-\ln e)=-\frac{1}{e}\approx -0{,}37$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on 0 ja pienin $-\frac{1}{e}$

4. $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x$

a) f on määritelty, kun

$$\begin{aligned} 1-x^2 &\geq 0 \\ x^2 &\leq 1 \quad \left|\sqrt{}\right. \\ |x| &\leq 1 \\ -1 \leq x &\leq 1 \end{aligned}$$

b) Nollakohdat:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x &= 0 \\ \sqrt{1-x^2} &= -\frac{1}{2}x \quad \left|()^2\right. \\ 1-x^2 &= \frac{1}{4}x^2 \quad \left|\cdot 4\right. \\ 4-4x^2 &= x^2 \\ 5x^2 &= 4 \\ x^2 &= \frac{4}{5} \quad \left|\sqrt{}\right. \\ x &= \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \approx \pm 0{,}89 \end{aligned}$$

Neliöönkorotus-ehto:

$$-\frac{1}{2}x \geq 0$$

$$x \leq 0$$

Molemmat arvot toteuttavat määrittelyehdon.

Vain negatiivinen arvo toteuttaa neliöönkorotusehdon, joten $x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

c) $f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{2} = \frac{{}^{2)}-x}{\sqrt{x^2-1}} + {}^{\sqrt{1-x^2})}\frac{1}{2} = \frac{-2x+\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$-2x+\sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\sqrt{1-x^2} = 2x \quad \left|()^2\right.$$

$$1-x^2 = 4x^2$$

$$5x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{5} \quad \left|\sqrt{}\right.$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \approx \pm 0{,}45$$

Neliöönkorotusehto:

$$2x \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Molemmat arvot toteuttavat määrittelyehdon.

Vain positiivinen arvo toteuttaa neliöönkorotusehdon, joten

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

5. Väite: $\dfrac{2}{e^x}+x>\dfrac{27}{16}$ kaikilla x

Todistus:

$$\frac{2}{e^x}+x\geq\frac{27}{16} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{e^x}+x-\frac{27}{16}\geq 0$$

Merkitään $f(x)=\dfrac{2}{e^x}+x-\dfrac{27}{16}=2e^{-x}+x-\dfrac{27}{16}$

$$f'(x)=2e^{-x}\cdot(-1)+1=1-2e^{-x}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$1-2e^{-x}=0$$
$$2e^{-x}=1$$
$$e^{-x}=\frac{1}{2}$$
$$-x=\ln\frac{1}{2}$$
$$-x=\ln 1-\ln 2$$
$$-x=-\ln 2$$
$$x=\ln 2$$

Merkki- ja kulkukaavio:

		$\ln 2$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Testipisteet:

$f'(0)=1-2e^{-0}=-1<0$

$f'(2)=1-2e^{-2}\approx 0{,}73>0$

Funktion *f* pienin arvo on $f(\ln 2)=\dfrac{2}{e^{\ln 2}}+\ln 2-\dfrac{27}{16}\approx 0{,}006>0$

Koska funktion *f* pienin arvo on positiivinen, funktio saa vain positiivisia arvoja. Siten väite pätee.

6. a) $h(x) = e^{\frac{x}{2}} + 1$ Arvojoukko $A_h =]1, \infty[$

$$y = e^{\frac{x}{2}} + 1$$
$$e^{\frac{x}{2}} = y - 1$$
$$\frac{x}{2} = \ln(y-1)$$
$$x = 2\ln(y-1)$$

Siis $f^{-1}(y) = 2\ln(y-1)$, $y > 1$

b) $f(x) = \ln x + x$ ja $g(x) = e^{2x}$

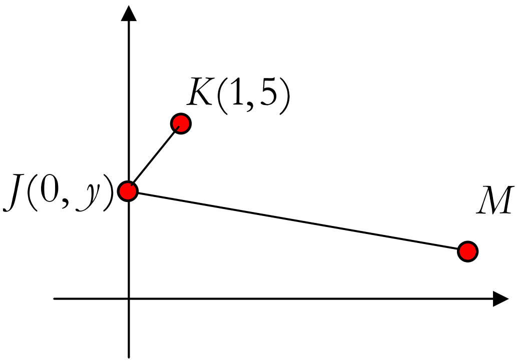
$(f \circ g)(x) = \ln(e^{2x}) + e^{2x} = 2x + e^{2x}$ Määritelty kaikilla x, koska $e^{2x} > 0$

$(f \circ g)(2x^5) = 2 \cdot 2x^5 + e^{2 \cdot 2x^5} = 4x^5 + e^{4x^5}$

$(f \circ g)'(2x^5) = 20x^4 + e^{4x^5} \cdot 20x^4 = 20x^4(1 + e^{4x^5}) \geq 0$

Koska derivaatta on ei-negatiivinen ja 0 vain kohdassa $x = 0$, funktio $(f \circ g)(2x^5)$ on aidosti kasvava. Aidosti kasvavalla funktiolla on käänteisfunktio.

7.



$$|KJ| = \sqrt{(0-1)^2+(y-5)^2}$$
$$= \sqrt{1+y^2-10y+25}$$
$$= \sqrt{y^2-10y+26}$$

$$|JM| = \sqrt{(7-0)^2+(1-y)^2}$$
$$= \sqrt{49+1-2y+y^2}$$
$$= \sqrt{y^2-2y+50}$$

Matka: $1 \le y \le 5$

$$f(y) = \sqrt{y^2-10y+26} + \sqrt{y^2-2y+50}$$
$$= (y^2-10y+26)^{\frac{1}{2}} + (y^2-2y+50)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(y) = \frac{1}{2}(y^2-10y+26)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2y-10) + \frac{1}{2}(y^2-2y+50)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2y-2)$$
$$= \frac{y-5}{\sqrt{y^2-10y+26}} + \frac{y-1}{\sqrt{y^2-2y+50}}$$
$$= \frac{(y-5)\sqrt{y^2-2y+50}+(y-1)\sqrt{y^2-10y+26}}{\sqrt{y^2-10y+26}\sqrt{y^2-2y+50}}$$

Derivaatan nollakohdat

$$(y-5)\sqrt{y^2-2y+50}+(y-1)\sqrt{y^2-10y+26}=0$$
$$(y-1)\sqrt{y^2-10y+26} = -(y-5)\sqrt{y^2-2y+50} \quad \Big| ()^2$$
$$(y^2-2y+1)(y^2-10y+26) = (y^2-10y+25)(y^2-2y+50)$$
$$y^4-12y^3+47y^2-62y+26 = y^4-12y^3+95y^2-550y+1250$$
$$48y^2-488y+1224=0$$
$$x = \frac{-(-488)\pm\sqrt{(-488)^2-4\cdot 48\cdot 1224}}{2\cdot 48} = \frac{488\pm 56}{96}$$
$$x = 5\frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = 4\frac{1}{2}$$

Vain $x = 4\frac{1}{2}$ kelpaa $(1 \le x \le 5)$

$$f(1) = \sqrt{1^2 - 10 \cdot 1 + 26} + \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 50} \approx 11{,}1$$
$$f(5) = \sqrt{5^2 - 10 \cdot 5 + 26} + \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 50} \approx 9{,}06$$
$$f(4{,}5) = \sqrt{4{,}5^2 - 10 \cdot 4{,}5 + 26} + \sqrt{4{,}5^2 - 2 \cdot 4{,}5 + 50} \approx 8{,}94$$

Fermat'n lauseen mukaan lyhyimmän reitin pituus on 8,94 km

Testi 2

1. a) $D(1-2x)^{-3} = -3(1-2x)^{-4}D(1-2x) = 6(1-2x)^{-4} = \dfrac{6}{(1-2x)^4}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$

   b) $D(e^x x) = De^x x + e^x Dx = e^x x + e^x$

   c) $D(\ln x)^2 = 2\ln x D\ln x = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$, $x > 0$

   d) $D\log_2|x^2-1| = \dfrac{1}{(x^2-1)\ln 2} \cdot D(x^2-1) = \dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 2}$, $x \neq 1$, $x \neq -1$

2. $8x + 2\sqrt{1-x} = 5$ $\qquad 1-x \geq 0$

   $\qquad x \leq 1$

   $2\sqrt{1-x} = 5-8x \quad |\,(\;)^2$ Neliöönkorotusehto: $5-8x \geq 0$

   $4(1-x) = 25 - 80x + 64x^2 \qquad 8x \leq 5$

   $4-4x = 25-80x+64x^2 \qquad x \leq \dfrac{5}{8}$

   $64x^2 - 76x + 21 = 0$

   $$x = \frac{76 \pm \sqrt{(-76)^2 - 4\cdot 64\cdot 21}}{2\cdot 64} = \frac{76\pm\sqrt{400}}{128} = \frac{76\pm 20}{128}$$

   $$x = \frac{96}{128} = \frac{3}{4} \quad \textit{tai} \quad x = \frac{56}{128} = \frac{7}{16}$$

   Saaduista ratkaisuista $x = \dfrac{7}{16}$ toteuttaa ehdon $x \leq \dfrac{5}{8}$.

   Vastaus: $x = \dfrac{7}{16}$

3. a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $x > -1$

   Tutkitaan funktion aidosti monotonisuutta.

   $f'(x) = 2x + 2$

   $f'(x) = 0$, kun $2x + 2 = 0$

   $2x = -2$

   $x = -1$

   Funktio f on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippukohta on $x = -1$.
   Ylöspäin aukeava paraabeli on aidosti kasvava, kun $x > -1$, joten funktiolla on tällä välillä käänteisfunktio.

   b) Käänteisfunktion määrittelyjoukko on alkuperäisen funktion f arvojoukko. Ylöspäin aukeavan paraabelin pienin arvo on $f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) + 1 = 0$, joten funktion f arvojoukko, kun $x > -1$, on $]\,0, \infty\,[$. Käänteisfunktion arvojoukko on alkuperäisen funktion f määrittelyjoukko eli $]-1, \infty\,[$.

Merkitään $y = x^2 + 2x + 1$ ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$y = x^2 + 2x + 1$$

$$y = (x+1)^2$$

$$|x+1| = \sqrt{y} \qquad \text{Koska } x > -1 \text{, niin } |x+1| = x+1$$

$$x + 1 = \sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{y} - 1$$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$ eli $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

c) $f^{-1\,\prime}(x) = D\sqrt{x} - D1 = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f^{-1\,\prime}(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Vastaus: b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$, $x > 0$ c) $f^{-1\,\prime}(1) = \frac{1}{2}$

4. $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = \ln x$

$(f \circ g)(x) = e^{3\ln x}$, $x > 0$

$(g \circ f)(x) = \ln e^{3x}$

$$(f \circ g)(x^2) = (g \circ f)(x)$$

$$e^{3\ln x^2} = \ln e^{3x} \qquad x \neq 0$$

$$e^{\ln x^6} = 3x$$

$$x^6 = 3x$$

$$x(x^5 - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \textit{tai} \quad x^5 - 3 = 0$$

$$x^5 = 3$$

$$x = \sqrt[5]{3}$$

$x = \sqrt[5]{3}$ toteuttaa määrittelyehdon

Vastaus: $x = \sqrt[5]{3}$

5. $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x^2 + 1 \geq 0$ kaikilla $x \in R$. Tutkitaan jatkuvaa funktiota välillä [2, 5].

Fermat'n lauseen mukaan suljetulla välillä [2, 5] jatkuvalla funktiolla ja avoimella välillä]2, 5[derivoituvalla funktiolla on suurin ja pienin arvo derivaatan nollakohdissa tai suljetun välin päätepisteissä.

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \quad \Big|\,(\ )^2 \quad \text{neliöönkorotusehto}: x < 0$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 \,\Big|\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$x^2 = x^2 + 1$$

epätosi, ei ratkaisua

Derivaatalla ei ole nollakohtia. Lasketaan funktion arvot suljetun välin [2, 5] päätepisteissä.

$g(2) = 2 + \sqrt{2^2+1} = 2 + \sqrt{5}$ pienin arvo
$g(5) = 5 + \sqrt{5^2+1} = 5 + \sqrt{26}$ suurin arvo

Vastaus: Pienin arvo on $2 + \sqrt{5}$ ja suurin arvo $5 + \sqrt{26}$

6. Merkitään $y_1 = x(1 + \ln x)$, $x > 0$ ja $y_2 = x - e^{-1}$. Käyrä y_1 ei ole missään kohdassa suoran alapuolella, jos kaikilla $x > 0$ on voimassa $y_1 \geq y_2$ eli $x(1 + \ln x) \geq x - e^{-1}$.
Merkitään $f(x) = x(1 + \ln x) - x + e^{-1} = x \ln x + e^{-1}$. Riittää osoittaa, että $f \geq 0$.

Funktio f on jatkuva ja derivoituva

$$f'(x) = 1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0, \text{ kun } \ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1} \quad (\approx 0{,}37)$$

Tutkitaan funktion f kulkua kulkukaavion avulla.

0 e^{-1}

f'	-	+
f	↘	↗

testipisteet:
$f'(0{,}1) = -1{,}3... < 0$
$f'(1) = 1 > 0$

Kulkukaavion perusteella funktio f saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = e^{-1}$.
Pienin arvo on $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} + e^{-1} = 0$. Koska funktion pienin arvo on 0, niin $f \geq 0$ kaikilla $x > 0$.

7. a) $\log_2 x = -\frac{1}{3}$, $x > 0$ $\qquad \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

$$x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

b) $e^x - e^{2x} + 2 = 0$ $\qquad$ merkitään $e^x = u$

$$u - u^2 + 2 = 0$$

$$-u^2 + u + 2 = 0$$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$u = -1 \quad \text{tai} \quad u = 2$$

Kun $u = -1$, niin $e^x = -1$. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska $e^x > 0$ aina.

Kun $u = 2$, niin $e^x = 2 \quad |\ln$

$$x \ln e = \ln 2$$

$$x = \ln 2$$

c) $\lg(6x - 1) = 2\lg(3x)$

$\lg(6x - 1) = \lg(3x)^2$ $\qquad$ $\lg x$ aid. kasvava

$6x - 1 = 9x^2$

Määrittelyehdot:

$6x - 1 > 0$ ja $3x > 0$

$6x > 1 \qquad x > 0$

$x > \frac{1}{6}$

Molemmat logaritmilausekkeet ovat määriteltyjä, kun $x > \frac{1}{6}$

$$-9x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-18} = \frac{1}{3}$$

Saatu ratkaisu $x = \frac{1}{3}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus: a) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad$ b) $x = \ln 2$ $\qquad$ c) $x = \frac{1}{3}$