

Kertausosa

1. a) $\frac{2x-1}{3x+12}$

Määritelty, kun

$$3x+12 \neq 0$$

$$3x \neq -12 \quad |:3$$

$$x \neq -4$$

b) $\frac{x^2-9}{x^2+4x-5}$

Määritelty, kun

$$x^2+4x-5 \neq 0$$

$$x \neq \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x \neq \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x \neq -5 \text{ ja } x \neq 1$$

c) $\frac{-3x^2+6}{x^3+5x^2+4x}$

Määritelty, kun

$$x^3+5x^2+4x \neq 0$$

$$x(x^2+5x+4) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ ja } x^2+5x+4 \neq 0$$

$$x \neq \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x \neq \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x \neq -4 \text{ ja } x \neq -1$$

Vastaus: a) $x \neq -4$ b) $x \neq -5$ ja $x \neq 1$ c) $x \neq -4$ ja $x \neq -1$ ja $x \neq 0$

$$2. \text{ a) } \frac{-9x^2 + 3}{3} = \frac{3(-3x^2 + 1)}{3} = -3x^2 + 1$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = x - 2$$

$$\text{c) } \frac{2x + 2}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2(x + 1)}{1 \cdot (x - x_1)(x - x_2)}$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -1$$

$$\frac{2x + 2}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2(x + 1)}{(x - (-4))(x - (-1))} = \frac{2(x + 1)}{(x + 4)(x + 1)} = \frac{2}{x + 4}$$

Vastaus: a) $-3x^2 + 1$ b) $x - 2$ c) $\frac{2}{x + 4}$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ a)} \quad & \frac{2x-1}{x+3} - \frac{3x^2+6}{2x-1} + \frac{x+3}{2x-1} \cdot \frac{2}{2x-1} \\
 &= \frac{(-3x^2+6)(2x-1) + 2(x+3)}{(x+3)(2x-1)} \\
 &= \frac{-6x^3 + 3x^2 + 12x - 6 + 2x + 6}{2x^2 - x + 6x - 3} \\
 &= \frac{-6x^3 + 3x^2 + 14x}{2x^2 + 5x - 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \frac{3x+1}{x+1} \cdot \frac{5-x}{3x+1} - \frac{x+1}{3x+1} \cdot \frac{x^2+2}{3x+1} \\
 &= \frac{(5-x)(3x+1) - (x^2+2)(x+1)}{(x+1)(3x+1)} \\
 &= \frac{15x+5-3x^2-x-x^3-x^2-2x-2}{3x^2+x+3x+1} \\
 &= \frac{-x^3-4x^2+12x+3}{3x^2+4x+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \frac{x+2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} \\
 &= \frac{x+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x}{x+1} \\
 &= \frac{x+2-x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x+2-x^2+x}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x^2+2x+2}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $\frac{-6x^3+3x^2+14x}{2x^2+5x-3}$ b) $\frac{-x^3-4x^2+12x+3}{3x^2+4x+1}$ c) $\frac{-x^2+2x+2}{x^2-1}$

$$4. \text{ a) } \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3x-5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+2}{x-3} &= \frac{3x-5}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x-3}{x^2+2} = \frac{3x-5}{(x+3)(x^2+2)} \\ &= \frac{3x-5}{x^3+3x^2+2x+6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x} \right) \cdot \frac{x+2}{x-2} &= \frac{x+2-x(x^2-1)}{x^2-1} \cdot \frac{x-2}{x+2} \\ &= \frac{(-x^3+2x+2)(x-2)}{(x^2-1)(x+2)} \\ &= \frac{-x^4+2x^3+2x^2-4x+2x-4}{x^3+2x^2-x-2} \\ &= \frac{-x^4+2x^3+2x^2-2x-4}{x^3+2x^2-x-2} \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: a) } \frac{x^2+2x}{x^2-1} \quad \text{b) } \frac{3x-5}{x^3+3x^2+2x+6} \quad \text{c) } \frac{-x^4+2x^3+2x^2-2x-4}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ a) } \frac{x+2}{x^2-1} &= 0 \\ x+2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Määritelty, kun} \\ x^2 - 1 &\neq 0 \\ x^2 &\neq 1 \quad | \sqrt{} \\ x &\neq \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} &= 0 \\ x^2+3x+2 &= 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \\ x &= -2 \text{ tai } x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Määritelty, kun} \\ x &\neq \pm 1 \end{aligned}$$

Määrittelyehdon toteuttaa vain $x = -2$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x+3}{x^2+2x-3} &= 0 \\ x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Nimittäjän tarkistus:

$$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

Siis $x = -3$ ei kelpaa ratkaisuksi $\Rightarrow$ Ei ratkaisua

Vastaus: a) $x = -2$ b) $x = -2$ c) ei ratkaisua

$$6. a) \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3x+2}{3x^2-6}$$

Kerrotaan ristiin

$$(x+2)(3x^2-6) = (x^2-1)(3x+2)$$

$$3x^3 - 6x + 6x^2 - 12 = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$$

$$4x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{3 \pm 13}{8}$$

$$x = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{16}{8} = 2$$

Määritelty, kun

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \text{ja} \quad 3x^2 - 6 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1 \quad \text{ja} \quad x^2 \neq 2 \quad \left| \sqrt{}$$

$$x \neq \pm 1 \quad \text{ja} \quad x \neq \pm \sqrt{2}$$

$$b) \frac{2x^2+8}{x+4} = x^2 - x + 2 \quad | \cdot (x+4)$$

$$2x^2 + 8 = (x+4)(x^2 - x + 2)$$

$$2x^2 + 8 = x^3 - x^2 + 2x + 4x^2 - 4x + 8$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Määritelty, kun

$$x + 4 \neq 0$$

$$x \neq -4$$

Vastaus: a) $x = -\frac{5}{4}$ tai $x = 2$

b) $x = -2$ tai $x = 0$ tai $x = 1$

$$7. \quad f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x + 2} - 2$$

Määritelty, kun
 $x + 2 \neq 0$

$$x \neq -2$$

$$f(x) = 9$$

$$\frac{2x^2 - 18}{x + 2} - 2 = 9$$

$$\frac{2x^2 - 18}{x + 2} = 11 \quad | \cdot (x + 2)$$

$$2x^2 - 18 = 11(x + 2)$$

$$2x^2 - 18 = 11x + 22$$

$$2x^2 - 11x - 40 = 0$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-40)}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 21}{4}$$

$$x = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{32}{4} = 8$$

$$\text{Vastaus: } x = -\frac{5}{2} \quad \text{tai} \quad x = 8$$

$$8. \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} - \frac{4x}{(x-3)(x+1)}$$

Määritelty, kun
 $x+1 \neq 0$ ja $x-3 \neq 0$

$x \neq -1$ ja $x \neq 3$

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = 0$$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} \quad | \cdot (x+1)(x-3)$$

$$x^2(x-3) = 4x$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 3x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Määrittelyehdon toteuttavat $x = 0$ ja $x = 4$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 4$

9. a) $\frac{2}{x-1} > 0$

Osoittaja on positiivinen, joten osamäärä on positiivinen, kun $x-1 > 0$

$$x > 1$$

b) $\frac{2x^2 - 8}{x+1} \leq 0$

Osoittajan nollakohdat:

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 8$$

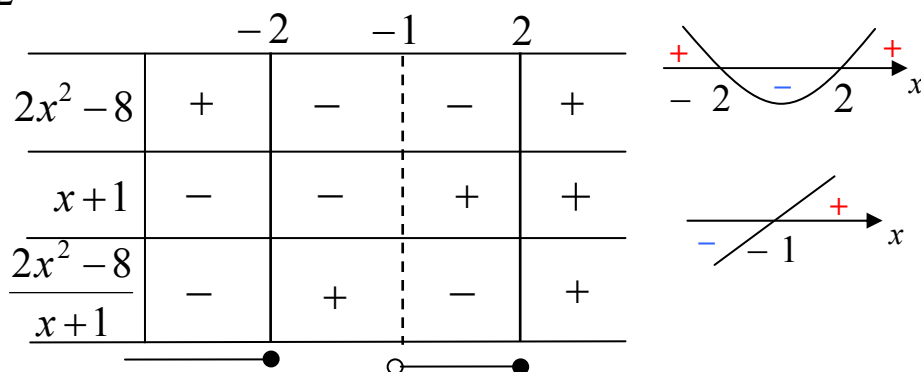
$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Nimittäjän nollakohdat:

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$



$$\frac{2x^2 - 8}{x+1} \leq 0, \text{ kun } x \leq -2 \text{ tai } -1 < x \leq 2$$

c) $\frac{4x-6}{2x-3} \geq 0$

$$\frac{2(2x-3)}{2x-3} \geq 0$$

$$2 \geq 0$$

Identtisesti tosi, kun $x \neq \frac{3}{2}$

Määritelty, kun

$$2x-3 \neq 0$$

$$2x \neq 3$$

$$x \neq \frac{3}{2}$$

Vastaus: a) $x > 1$ b) $x \leq -2$ tai $-1 < x \leq 2$ c) $x \neq \frac{3}{2}$

$$10. a) \frac{x+2}{x^2-1} < \frac{3x+2}{3x^2-6}$$

$$\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{3x+2}{3x^2-6} < 0 \quad | \text{lavennus}$$

$$\frac{(x+2)(3x^2-6) - (3x+2)(x^2-1)}{(x^2-1)(3x^2-6)} < 0$$

$$\frac{3x^3 - 6x + 6x^2 - 12 - 3x^3 + 3x - 2x^2 + 2}{(x^2-1)(3x^2-6)} < 0$$

$$\frac{4x^2 - 3x - 10}{(x^2-1)(3x^2-6)} < 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$4x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{3 \pm 13}{8}$$

$$x = -\frac{10}{84} = -\frac{5}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{16}{8} = 2$$

Nimittäjän nollakohdat:

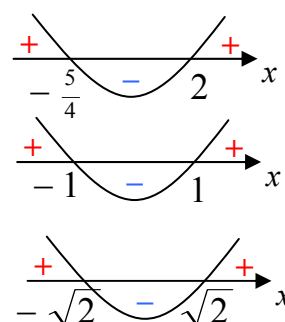
$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad 3x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 1 \quad \text{tai} \quad x^2 = 2 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 1 \quad \text{tai} \quad x = \pm \sqrt{2}$$

	$-\sqrt{2}$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	$\sqrt{2}$	2	
$4x^2 - 3x - 10$	+	+	-	-	-	-	+
$x^2 - 1$	+	+	+	-	+	+	+
$3x^2 - 6$	+	-	-	-	-	+	+
$\frac{4x^2 - 3x - 10}{(x^2 - 1)(3x^2 - 6)}$	+	-	+	-	+	-	+

$$-\sqrt{2} < x < -\frac{5}{4} \quad \text{tai} \quad -1 < x < 1 \quad \text{tai} \quad \sqrt{2} < x < 2$$



$$b) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} \geq 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

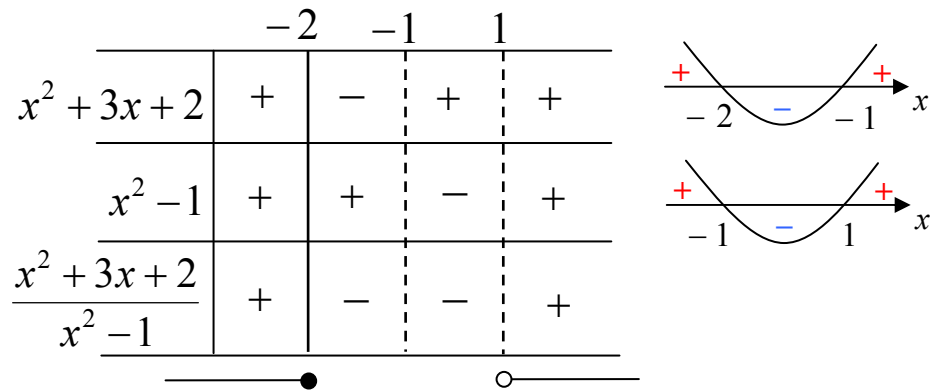
$$x = -2 \text{ tai } x = -1$$

Nimittäjän nollakohdat:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 1$$



$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} \geq 0 \text{ kun } x \leq -2 \text{ tai } x > 1$$

Vastaus: a) $-\sqrt{2} < x < -\frac{5}{4}$ tai $-1 < x < 1$ tai $\sqrt{2} < x < 2$
 b) $x \leq -2$ tai $x > 1$

11. a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ $g(x) = -x + 12$

$$f(x) = g(x)$$

Määritelty, kun

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$\frac{x^2}{x-2} = -x + 12 \quad | \cdot (x-2)$$

$$x^2 = (-x + 12)(x - 2)$$

$$x^2 = -x^2 + 2x + 12x - 24$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x = 3 \text{ tai } x = 4$$

b) $f(x) < g(x)$

$$\frac{x^2}{x-2} < -x + 12$$

$$\frac{x^2}{x-2} + (x-2) < 12$$

$$\frac{x^2 + (x-2)(x-12)}{x-2} < 0$$

$$\frac{x^2 + x^2 - 12x - 2x + 24}{x-2} < 0$$

$$\frac{2(x^2 - 7x + 12)}{x-2} < 0$$

Osoittajan nollakohdat:

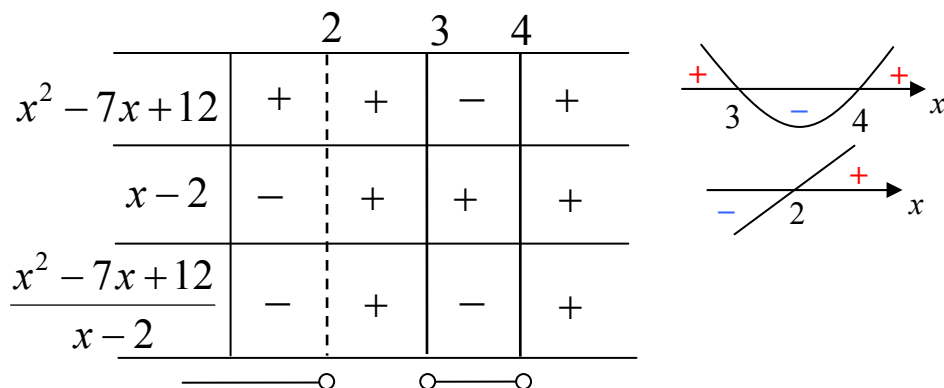
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = 3 \text{ tai } x = 4$$

Nimittäjän nollakohdat:

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$



$$\frac{2(x^2 - 7x + 12)}{x - 2} < 0, \text{ kun } x < 2 \text{ tai } 3 < x < 4$$

Vastaus: a) $x = 3$ tai $x = 4$ b) $x < 2$ tai $3 < x < 4$

12. $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ paraabeli $y = x^2 - 3x$

Funktion f kuvaaja kulkee paraabelin yläpuolella, kun $f(x) > y$

$$\frac{2x}{x-4} > x^2 - 3x$$

$$\frac{2x}{x-4} - (x^2 - 3x) > 0$$

$$\frac{2x + (x-4)(-x^2 + 3x)}{x-4} > 0$$

$$\frac{2x - x^3 + 3x^2 + 4x^2 - 12x}{x-4} > 0$$

$$\frac{-x^3 + 7x^2 - 10x}{x-4} > 0$$

$$\frac{x(-x^2 + 7x - 10)}{x-4} > 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$x(-x^2 + 7x - 10) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{-2}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = 5$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

		0	2	4	5	
$f(x) = \frac{x(-x^2 + 7x - 10)}{x - 4}$	-	+	-	+	-	
		○	○	○	○	

Testipisteet:

$$f(-1) = -3,6 < 0$$

$$f(1) \approx 1,3 > 0$$

$$f(3) = -6 < 0$$

$$f(4,5) = 11,25 > 0$$

$$f(6) = -12 < 0$$

$$\text{Siis } \frac{x(-x^2 + 7x - 10)}{x - 4} > 0, \text{ kun } 0 < x < 2 \text{ tai } 4 < x < 5$$

Vastaus: $0 < x < 2$ tai $4 < x < 5$

13. Kysytty kokonaisluku = n , neliö = n^2

$$\text{Keskiarvon käänteisluku} = \left(\frac{n + n^2}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{n + n^2}$$

$$\frac{2}{n + n^2} > n$$

$$\frac{2}{n + n^2} - n > 0$$

$$\frac{2 - n^2 - n^3}{n + n^2} > 0$$

$$\frac{(n-1)(-n^2 - 2n - 2)}{n(1+n)} > 0$$

Kokeilemalla huomataan, että $n = 1$ on osoittajan nollakohta:

$$2 - 1^2 - 1^3 = 2 - 1 - 1 = 0$$

Siis $n - 1$ on osoittajan tekijä.

Päättelemällä saadaan toinen tekijä $-n^2 - 2n - 2$.

Tarkistus:

$$(n-1)(-n^2 - 2n - 2)$$

$$= -n^3 - 2n^2 - 2n + n^2 + 2n + 2$$

$$= -n^3 - n^2 + 2$$

Osoittajan nollakohdat:

$$(n-1)(-n^2 - 2n - 2) = 0$$

$$n-1=0 \text{ tai } -n^2 - 2n - 2 = 0$$

$$n=1 \text{ tai}$$

$$n = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$n = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{-2} \text{ ei ratkaisua}$$

Nimittäjän nollakohdat:

$$n(n+1) = 0$$

$$n = 0 \text{ tai } n+1 = 0$$

$$n = -1$$

$$f(n) = \frac{(n-1)(-n^2-2n-2)}{n(1+n)}$$

	-1	0	1
+	-	+	-
	—○	○—	

Testipisteet:

$$f(-2) = 3 > 0$$

$$f(-0,5) = -7,5 < 0$$

$$f(0,5) \approx 2,2 > 0$$

$$f(2) \approx -1,7 < 0$$

$$\frac{(n-1)(-n^2-2n-2)}{n(1+n)} > 0, \text{ kun } n < -1$$

Kokonaisluvut, jotka toteuttavat ehdon, ovat $n \leq -2$, $n \in \mathbf{Z}$

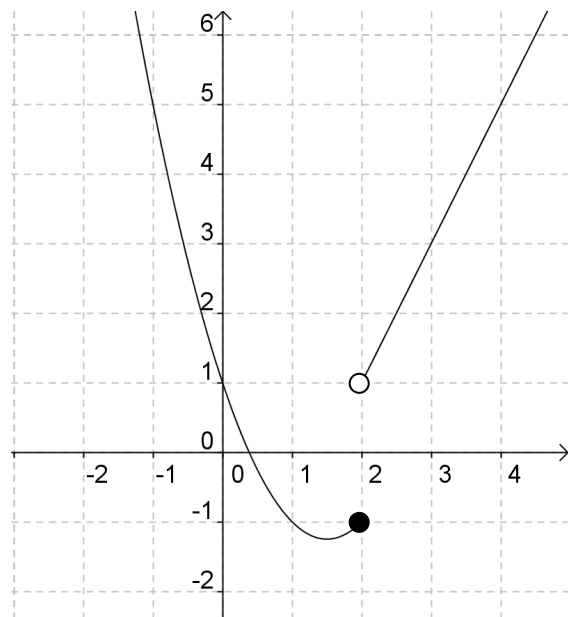
Vastaus: $n \leq -2$, $n \in \mathbf{Z}$

$$14. f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1, & x \leq 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$$

Kohdan $x = 2$ vasemmalla puolella kuvaaja on osa ylöspäin aukeavaa paraabelia.

Kohdan $x = 2$ oikealla puolella kuvaaja on osa nousevaa suoraa.

x	$y = x^2 - 3x + 1$
-1	$(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 5$
0	$0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$
2	$2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$
x	$y = 2x - 3$
3	$2 \cdot 3 - 3 = 3$
4	$2 \cdot 4 - 3 = 5$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \text{ ja } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$15. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x+1} & , x < -1 \\ \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} & , x \geq -1 \end{cases}$$

x	$f(x) = \frac{x^4-1}{x+1}$
$-1,1$	$\frac{(-1,1)^4-1}{-1,1+1} = -4,641$
$-1,01$	$-4,060401$
$-1,001$	$-4,006004...$
$-1,0001$	$-4,00060004...$
$-0,9999$	$2,00005...$
$-0,999$	$2,00050...$
$-0,99$	$2,00502...$
$-0,9$	$2,0526...$



$x \rightarrow -1$ vasemmalta puolelta

$x \rightarrow -1$ oikealta puolelta

Näyttäisi siltä, että $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -4$ ja $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$

Näyttää siltä, että $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \approx -2,8$

Siis $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \approx -2,8$

17. a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x + 2) = 2^3 - 4 \cdot 2 + 2 = 2$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x+1}{5} = \frac{2 \cdot 7 + 1}{5} = 3$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3 - x^3}{2x + 12} = \frac{3 - (-3)^3}{2(-3) + 12} = \frac{30}{6} = 5$$

Vastaus: a) 2 b) 3 c) 5

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 1) = 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

Vastaus: a) -1 b) 4 c) 0

19. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 6x - 9}{x^2 - 4x + 3}$

Jaetaan osoittaja ja nimittäjä tekijöihin
nollakohtien avulla.

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = -3 \text{ tai } x = 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = 1 \text{ tai } x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 6x - 9}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+3)}{x-3} = \frac{3(1+3)}{1-3} = -6$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 - 48}{2x + 8} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3(x^2 - 16)}{2(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3(x+4)(x-4)}{2(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3(x-4)}{2} \\ &= \frac{3(-4-4)}{2} \\ &= -12 \end{aligned}$$

Vastaus: a) -6 b) -12

$$20. \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax + 3a, & x < -5 \\ 14 + a - 2x, & x > -5 \end{cases}$$

Funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = -5$, jos $\lim_{x \rightarrow -5-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -5-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5-} (-x^2 - ax + 3a) = -(-5)^2 - a(-5) + 3a = 8a - 25$$

$$\lim_{x \rightarrow -5+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5+} (14 + a - 2x) = 14 + a - 2(-5) = a + 24$$

$$\lim_{x \rightarrow -5-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5+} f(x)$$

$$8a - 25 = a + 24$$

$$7a = 49 \quad |:7$$

$$a = 7$$

Vastaus: $a = 7$

$$21. \quad f(x) = \frac{2x^2 - ax + 25}{3x - 15} = \frac{2x^2 - ax + 25}{3(x - 5)}$$

Jotta funktiolla f olisi raja-arvo kohdassa $x = 5$, pitää tekijä $(x - 5)$ supistua pois, eli $(x - 5)$ pitää olla soittajan tekijänä eli $x = 5$ pitää olla osoittajan nollakohta.

$$2 \cdot 5^2 - a \cdot 5 + 25 = 0$$

$$75 - 5a = 0$$

$$5a = 75 \quad |:5$$

$$a = 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 15x + 25}{3(x - 5)}$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtien avulla:

$$2x^2 - 15x + 25 = 0$$

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{20}{4} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 15x + 25}{3(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x - \frac{5}{2})(x - 5)}{3(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 5}{3} = \frac{2 \cdot 5 - 5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vastaus: } a = 15, \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{5}{3}$$

$$22. \quad f(x) = \begin{cases} 5x^3 - 2x + 1, & x \leq 1 \\ 3x + 1 & , 1 < x < 3 \\ 2x^2 - 8 & , x \geq 3 \end{cases}$$

f on polynomifunktiona jatkuva, kun $x \neq 1$ ja $x \neq 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x^3 - 2x + 1) = 5 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 4 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

Koska $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, f on jatkuva kohdassa $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x + 1) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x^2 - 8) = 2 \cdot 3^2 - 8 = 10 = f(3)$$

Koska $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$, f on jatkuva kohdassa $x = 3$

Vastaus: f on kaikkialla jatkuva

$$23. \quad g(x) = \begin{cases} bx^2 - 2b & , x \leq 2 \\ x^3 + 2x - b & , x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (bx^2 - 2b) = b \cdot 2^2 - 2b = 4b - 2b = 2b = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + 2x - b) = 2^3 + 2 \cdot 2 - b = 12 - b$$

g on jatkuva, kun

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2)$$

$$2b = 12 - b$$

$$3b = 12 \quad |:3$$

$$b = 4$$

Vastaus: $b = 4$

$$24. \quad f(x) = 80x^3 + 4x^2 - 388x + 255$$

Väite: funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa

Todistus:

$$\begin{cases} f(0) = 255 > 0 \\ f(1) = -49 < 0 \\ f \text{ on jatkuva polynomifunktiona välillä } [0,1] \end{cases}$$

Siis ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 1[$

$$\begin{cases} f(1,5) = -48 < 0 \\ f(2) = 135 > 0 \\ f \text{ on jatkuva polynomifunktiona välillä } [1,5;2] \end{cases}$$

Siis ainakin yksi nollakohta välillä $]1,5; 2[$

Siis ainakin kaksi nollakohtaa □

25. Väite: yhtälöllä $3^x = 2x + 2$ on ainakin yksi ratkaisu

Todistus:

$$3^x = 2x + 2$$

$$3^x - 2x - 2 = 0$$

$$\text{Merkitään } f(x) = 3^x - 2x - 2$$

f on jatkuva välillä $[0, 2]$ eksponenttifunktion ja polynomifunktion summana

$$f(0) = 3^0 - 2 \cdot 0 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = 3^2 - 2 \cdot 2 - 2 = 3 > 0$$

Siis ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 2[$

Siis yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu □

26. $f(x) = x^3 - 4x + 2$

Väite: funktiolla on nollakohdat väleillä $[-5, -1]$ ja $[0, 2]$

Todistus:

f on kaikkialla jatkuva polynomifunktiona

$$f(-5) = (-5)^3 - 4(-5) + 2 = -103 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1) + 2 = 5 > 0$$

Siis ainakin yksi nollakohta välillä $[-5, -1]$

$$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$$

$$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 2 = -1 < 0$$

Siis ainakin yksi nollakohta välillä $[0, 1]$ ja siten myös välillä $[0, 2]$ □

27. $f(x) = x^2 - 3$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3 - (2^2 - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - 3 - (2^2 - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) \\ &= 4 + 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus: $f'(2) = 4$

28. a) $f(x) = 4x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^2 - 2(x+h) - (4x^2 - 2x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h - 4x^2 + 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 2h - 4x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8x + 4h - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (8x + 4h - 2) = 8x - 2 \end{aligned}$$

b) $g(x) = \frac{1}{x^2} + x$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} + (x+h) - (\frac{1}{x^2} + x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} + \frac{x^2(x+h)^2}{x^2(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + x^2(x+h)^2 h - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + hx^2(x+h)^2 - x^2 - 2xh + h^2}{hx^2(x+h)^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x^2(x+h)^2 - 2x)}{hx^2(x+h)^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2(x+h)^2 - 2x}{x^2(x+h)^2} = \frac{x^2 x^2 - 2x}{x^2 x^2} = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $f'(x) = 8x - 2$ b) $g'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

29. $f(x) = x^2 - 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 3) = 2x - 3 \end{aligned}$$

a) $f'(-4) = 2(-4) - 3 = -11$

b) $f'(11) = 2 \cdot 11 - 3 = 19$

Vastaus: $f'(x) = 2x - 3$ a) -11 b) 19

30. $f(x) = \sqrt{x}$ muutosnopeus = derivaatta

$$\begin{aligned} f'(2,5) &= \lim_{x \rightarrow 2,5} \frac{f(x) - f(2,5)}{x - 2,5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2,5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2,5}}{x - 2,5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2,5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2,5}}{(\sqrt{x} + \sqrt{2,5})(\sqrt{x} - \sqrt{2,5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2,5} \frac{1}{\sqrt{x} + 2,5} = \frac{1}{\sqrt{2,5} + \sqrt{2,5}} = \frac{1}{2\sqrt{2,5}} \approx 0,32 \end{aligned}$$

31. a) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 5$
 $f'(x) = 4 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 0 = 16x^3 - 6x^2$

b) $g(t) = -t^4 - 7t^3$
 $g'(t) = -4t^3 - 7 \cdot 3t^2 = -4t^3 - 21t^2$

c) $h(y) = -y^5 + 2y^3 - 13y + 1$
 $h'(y) = -5y^4 + 2 \cdot 3y^2 - 13 + 0 = -5y^4 + 6y^2 - 13$

Vastaus: a) $f'(x) = 16x^3 - 6x^2$
b) $g'(t) = -4t^3 - 21t^2$
c) $h'(y) = -5y^4 + 6y^2 - 13$

32. $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + x - 2$

$$f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + 1$$

$$f'(-5) = 12 \cdot (-5)^3 - 21 \cdot (-5)^2 + 1 = -2024$$

$$f'(3) = 12 \cdot 3^3 - 21 \cdot 3^2 + 1 = 136$$

Vastaus: a) -2024 b) 136

33. a)

$$\begin{aligned} D(3(x+2)(2x-1)) &= 3D(2x^2 - x + 4x - 2) \\ &= 3D(2x^2 + 3x - 2) = 3(4x + 3) = 12x + 9 \end{aligned}$$

b) $D(x+1)^2 = D(x^2 + 2x + 1) = 2x + 2$

c)

$$D((x-1)^2 + (x+1)^2) = D(x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1) = D(2x^2 + 2) = 4x$$

Vastaus: a) $12x + 9$

b) $2x + 2$

c) $4x$

34. $f(x) = x^3 - 11x^2 + 5x + 9$

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(-1)$

$$f'(x) = 3x^2 - 22x + 5$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 22(-1) + 5 = 30$$

Vastaus: 30

35. a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 3$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3)$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 3$$

b)

$$f(x) = 2(x-1)(x+1)^2 = 2(x-1)(x^2 + 2x + 1)$$

$$= 2(x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1)$$

$$= 2(x^3 + x^2 - x - 1)$$

$$f'(x) = 2(3x^2 + 2x - 1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Vastaus: a) $x = -1$ tai $x = 3$

b) $x = -1$ tai $x = \frac{1}{3}$

36. $g(x) = ax^3 - 2bx + 1$

$$g'(x) = 3ax^2 - 2b$$

$$\begin{cases} g(1) = 23 \\ g'(2) = 66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 1^3 - 2b \cdot 1 + 1 = 23 \\ 3a \cdot 2^2 - 2b = 66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2b = 22 \\ 12a - 2b = 66 \end{cases}$$

$$-11a = -44 \quad |: (-11)$$

$$a = 4$$

$$a - 2b = 22$$

$$4 - 2b = 22$$

$$2b = -18 \quad |: 2$$

$$b = -9$$

Vastaus: $a = 4$ ja $b = -9$

37. $f(x) = -2x^4 + 3x - 1$

$$f'(x) = -8x^3 + 3$$

$$f''(x) = -24x^2$$

$$f'''(x) = -48x$$

$$f'''(-1) = -48 \cdot (-1) = 48$$

Vastaus: 48

38. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 105x - 11$

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 105$$

$$f'(x) < 0$$

$$-3x^2 - 6x + 105 < 0$$

Nollakohdat:

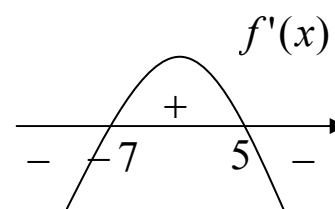
$$-3x^2 - 6x + 105 = 0 \quad | :(-3)$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 12}{2}$$

$$x = -7 \text{ tai } x = 5$$

$$-3x^2 - 6x + 105 < 0, \text{ kun } x < -7 \text{ tai } x > 5$$



Vastaus: $x < -7$ tai $x > 5$

39. a)

$$\begin{aligned} D((2x+3)(x^2-1)) &= 2 \cdot (x^2-1) + (2x+3) \cdot 2x \\ &= 2x^2 - 2 + 4x^2 + 6x \\ &= 6x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D(3(x^3+2)(1-2x^2)) &= 3(3x^2 \cdot (1-2x^2) + (x^3+2) \cdot (-4x)) \\ &= 3(3x^2 - 6x^4 - 4x^4 - 8x) \\ &= -30x^4 + 9x^2 - 24x \end{aligned}$$

Vastaus: a) $6x^2 + 6x - 2$ b) $-30x^4 + 9x^2 - 24x$

40. a) $D(2x+1)^2 = 2(2x+1)^1 \cdot D(2x+1) = 2(2x+1) \cdot 2 = 4(2x+1)$

b) $D(x-4x^3)^8 = 8(x-4x^3)^7 \cdot D(x-4x^3) = 8(1-12x^2)(x-4x^3)^7$

c)

$$D(7(2x^3+x-5)^{11}) = 7 \cdot 11(2x^3+x-5)^{10} \cdot D(2x^3+x-5)$$

$$= 77(6x^2+1)(2x^3+x-5)^{10}$$

Vastaus: a) $4(2x-1)$

b) $8(1-12x^2)(x-4x^3)^7$

c) $77(6x^2+1)(2x^3+x-5)^{10}$

41. a)

$$D((3x^2+2x)(x^4+1)^6) = (6x+2) \cdot (x^4+1)^6 + (3x^2+2x) \cdot 6(x^4+1)^5 \cdot 4x^3$$

$$= (6x+2) \cdot (x^4+1)^6 + 24x^3(3x^2+2x)(x^4+1)^5$$

$x=1$:

$$(6 \cdot 1 + 2)(1^4 + 1)^6 + 24 \cdot 1^3(3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1)(1^4 + 1)^5$$

$$= 8 \cdot 2^6 + 24 \cdot 5 \cdot 2^5$$

$$= 4352$$

b)

$$D((x+2)^5(3x^5-2x^2)^4)$$

$$= 5 \cdot (x+2)^4 \cdot 1 \cdot (3x^5-2x^2)^4 + (x+2)^5 \cdot 4 \cdot (3x^5-2x^2)^3 \cdot (15x^4-4x)$$

$$= 5(x+2)^4(3x^5-2x^2)^4 + 4(15x^4-4x)(x+2)^5(3x^5-2x^2)^3$$

$x=1$:

$$5(1+2)^4(3 \cdot 1^5 - 2 \cdot 1^2)^4 + 4(15 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1)(1+2)^5(3 \cdot 1^5 - 2 \cdot 1^2)^3$$

$$= 5 \cdot 3^4 \cdot 1^4 + 4 \cdot 11 \cdot 3^5 \cdot 1^3$$

$$= 11\,097$$

Vastaus: a) 4352 b) 11 097

42. $f(x) = (2x^3 - 5x)^6$

$$f'(x) = 6(2x^3 - 5x)^5 \cdot (6x^2 - 5) = 6(6x^2 - 5)(2x^3 - 5x)^5$$

$$f'(2) = 6(6 \cdot 2^2 - 5)(2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2)^5 = 6 \cdot 19 \cdot 6^5 = 886\,464$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6\left((12x \cdot (2x^3 - 5x)^5 + (6x^2 - 5) \cdot 5(2x^3 - 5x)^4 \cdot (6x^2 - 5))\right) \\ &= 6\left(12x(2x^3 - 5x)^5 + 5(6x^2 - 5)^2(2x^3 - 5x)^4\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1) &= 6 \cdot (12 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1)^5 + 5 \cdot (6 \cdot 1^2 - 5)^2 (2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1)^4) \\ &= 6 \cdot (12 \cdot (-3)^5 + 5 \cdot 1^2 \cdot (-3)^4) \\ &= -15\,066 \end{aligned}$$

Vastaus: $f'(2) = 886\,464$ ja $f''(1) = -15\,066$

43. $g(x) = 3(x^3 - 12x)^4$

$$g'(x) = 3 \cdot 4(x^3 - 12x)^3 \cdot (3x^2 - 12) = 12(3x^2 - 12)(x^3 - 12x)^3$$

$$g'(x) = 0, \text{ kun}$$

$$3x^2 - 12 = 0 \quad \text{tai} \quad x^3 - 12x = 0$$

$$3x^2 = 12 \quad x(x^2 - 12) = 0$$

$$x^2 = 4 \quad \left| \sqrt{} \right. \quad x = 0 \text{ tai } x^2 - 12 = 0$$

$$x = \pm 2 \quad x^2 = 12 \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$x = \pm \sqrt{12}$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

Vastaus: $x = \pm 2$ tai $x = 0$ tai $x = \pm 2\sqrt{3}$

44. $g(x) = (x^4 - 16x^2)^3$

$$g'(x) = 3(x^4 - 16x^2)^2 \cdot (4x^3 - 32x)$$

$g'(x) = 0$, kun

$$x^4 - 16x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 16) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 4$$

tai

$$4x^3 - 32x = 0$$

$$4x(x^2 - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

	-4	$-2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	4	
$g'(x)$	-	-	+	-	+	+
	•	•	•	•		

Testipisteet:

$$g'(-5) \approx -5,2 \cdot 10^7 < 0$$

$$g'(1) = 11,25 > 0$$

$$g'(-3) \approx -1,4 \cdot 10^5 < 0$$

$$g'(3) = 1,4 \cdot 10^5 > 0$$

$$g'(-1) = 18900 > 0$$

$$g'(5) = 5,2 \cdot 10^7 > 0$$

$$g'(x) \geq 0, \text{ kun } x = -4 \text{ tai } -2\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ tai } x \geq 2\sqrt{2}$$

Vastaus: $x = -4 \text{ tai } -2\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ tai } x \geq 2\sqrt{2}$

45. $y = (x^2 + 12x)^4$

Tangentti on laskeva suora, kun $k_t = y' < 0$

$$y' = 4(x^2 + 12x)^3 \cdot (2x + 12)$$

Nollakohdat:

$y' = 0$, kun

$$x^2 + 12x = 0$$

tai

$$2x + 12 = 0$$

$$x(x + 12) = 0$$

$$2x = -12 \quad |:2$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 12 = 0$$

$$x = -6$$

$$x = -12$$

	-12	-6	0	
$y'(x)$	-	+	-	+
	○	○	○	

Testipisteet:

$$y'(-13) \approx -1,2 \cdot 10^5 < 0 \quad y'(-1) = -53240 < 0$$

$$y'(-7) = 343000 > 0 \quad y'(1) = 123032 > 0$$

$y' < 0$, kun $x < -12$ tai $-6 < x < 0$

Vastaus: $x < -12$ tai $-6 < x < 0$

46. a)

$$\begin{aligned} D \frac{2x+1}{x^{11}} &= \frac{2 \cdot x^{11} - (2x+1) \cdot 11x^{10}}{(x^{11})^2} \\ &= \frac{2x^{11} - 11(2x+1)x^{10}}{x^{22}} \quad (x^{10}) \\ &= \frac{2x - 11(2x+1)}{x^{12}} \\ &= \frac{2x - 22x - 11}{x^{12}} \\ &= \frac{-20x - 11}{x^{12}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D \frac{3-x^2}{2x^2+1} &= \frac{-2x \cdot (2x^2+1) - (3-x^2) \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^3 - 2x - 12x + 4x^3}{(2x^2+1)^2} \\ &= -\frac{14x}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $\frac{-20x-11}{x^{12}}$ b) $-\frac{14x}{(2x^2+1)^2}$

$$47. \quad f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x + 3}$$

Määritelty, kun
 $x + 3 \neq 0$

$$x \neq -3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 1) \cdot (x + 3) - (x^2 - x + 4) \cdot 1}{(x + 3)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x - x - 3 - x^2 + x - 4}{(x + 3)^3} \\ &= \frac{x^2 + 6x - 7}{(x + 3)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0, \text{ kun}$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

$$x = -7 \text{ tai } x = 1$$

Vastaus: $x = -7$ tai $x = 1$

48. a)

$$\begin{aligned}
 D\left(\frac{x^2+4}{3-4x}-\frac{2}{x^2+1}\right) &= \frac{2x \cdot (3-4x) - (x^2+4) \cdot (-4)}{(3-4x)^2} - \frac{0 \cdot (x^2+1) - 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{6x - 8x^2 + 4x^2 + 16}{(3-4x)^2} - \frac{-4x}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{-4x^2 + 6x + 16}{(3-4x)^2} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 D\left(\frac{3x}{x^3-3}-\frac{x^3-3}{3x}\right) &= \frac{3 \cdot (x^3-3) - 3x \cdot 3x^2}{(x^3-3)^2} - \frac{3x^2 \cdot 3x - (x^3-3) \cdot 3}{(3x)^2} \\
 &= \frac{3x^3 - 9 - 9x^3}{(x^3-3)^2} - \frac{9x^3 - 3x^3 + 9}{9x^2} \\
 &= \frac{-6x^3 - 9}{(x^3-3)^2} - \frac{6x^3 + 9}{9x^2}
 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $\frac{-4x^2 + 6x + 16}{(3-4x)^2} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ b) $\frac{-6x^3 - 9}{(x^3-3)^2} - \frac{6x^3 + 9}{9x^2}$

$$49. \quad f(x) = 2ax^2 + \frac{b}{x}$$

$$f'(x) = 4ax + \frac{0 \cdot x - b \cdot 1}{x^2} = 4ax - \frac{b}{x^2}$$

$$\begin{cases} f(-1) = 38 \\ f'(2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a \cdot (-1)^2 + \frac{b}{-1} = 38 \\ 4a \cdot 2 - \frac{b}{2^2} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - b = 38 \\ 8a - \frac{1}{4}b = 2 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2a - b = 38 \\ -32a + b = -8 \end{cases} \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$-30a = 30 \quad | : (-30)$$

$$a = -1$$

$$2a - b = 38$$

$$2 \cdot (-1) - b = 38$$

$$-2 - b = 38$$

$$b = -40$$

Vastaus: $a = -1$ ja $b = -40$

$$50. f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^5}$$

Määritelty, kun
 $x+1 \neq 0$
 $x \neq -1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2) \cdot (x+1)^5 - (x^2-2x) \cdot 5(x+1)^4 \cdot 1}{((x+1)^5)^2} \\ &= \frac{(x+1)^4((2x-2)(x+1) - 5(x^2-2x))}{(x+1)^{10}} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 2x - 2 - 5x^2 + 10x}{(x+1)^6} \\ &= \frac{-3x^2 + 10x - 2}{(x+1)^6} \end{aligned}$$

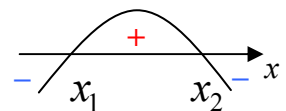
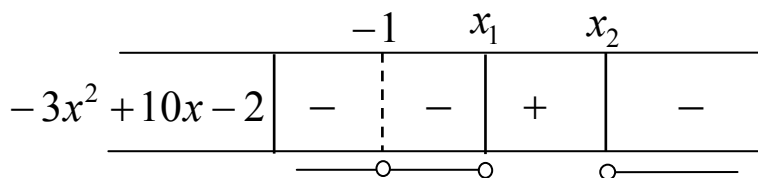
Nimittäjä on positiivinen, kun $x \neq -1$, joten osoittaja määrää derivaatan merkit

$$f'(x) = 0, \text{ kun}$$

$$-3x^2 + 10x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-10 \pm \sqrt{76}}{-6} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{19}}{-6} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{3}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{19}}{3} \approx 0,21 \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{19}}{3} \approx 3,1$$



$$f'(x) < 0, \text{ kun } x < x_1 \text{ ja } x \neq -1 \text{ tai } x > x_2$$

Vastaus: $x < \frac{5 - \sqrt{19}}{3}$ ja $x \neq -1$ tai $x > \frac{5 + \sqrt{19}}{3}$

$$51. \quad y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$k_t = y' = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$x = 3: \quad k_t = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{(3-1)^2} = \frac{3}{4}$$

$$k_t = -3$$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = -3 \quad | \cdot (x-1)^2$$

Määritelty, kun
 $x - 1 \neq 0$

$$x^2 - 2x = -3(x-1)^2$$

$$x \neq 1$$

$$x^2 - 2x = -3(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x = -3x^2 + 6x - 3$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 4}{8}$$

$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Vastaus: Kohdassa $x = 3$ $k_t = \frac{3}{4}$, $k_t = -3$, kun $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{3}{2}$

52. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 11x + 1$

a) $f'(x) = -6x^2 + 8x - 11$

$$x_0 = -1: \quad k_t = f'(-1) = -6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 11 = -25$$

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) + 1 = 18$$

Tangentin yhtälö:

$$y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

$$y - 18 = -25(x - (-1))$$

$$y - 18 = -25x - 25$$

$$y = -25x - 7$$

b) Normaalin kulmakerroin k_n

$$k_n \cdot k_t = -1$$

$$k_n \cdot (-25) = -1$$

$$k_n = \frac{1}{25}$$

Normaalin yhtälö:

$$y - 18 = \frac{1}{25}(x - (-1))$$

$$y - 18 = \frac{1}{25}x + \frac{1}{25}$$

$$y = \frac{1}{25}x + 18\frac{1}{25}$$

Vastaus: a) $y = -25x - 7$ b) $y = \frac{1}{25}x + 18\frac{1}{25}$

$$53. \quad g(x) = \frac{3x^3 - 6x}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(9x^2 - 6) \cdot (x-1)^2 - (3x^3 - 6x) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{((x-1)^2)^2} \\ &= \frac{(9x^2 - 6)(x-1)^2 - 2(3x^3 - 6x)(x-1)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$x_0 = 3: \quad y_0 = g(x_0) = g(3) = \frac{3 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3}{(3-1)^2} = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}$$

$$k_t = g'(3) = \frac{(9 \cdot 3^2 - 6)(3-1)^2 - 2(3 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3)(3-1)}{(3-1)^4} = \frac{48}{16} = 3$$

Normaalin kulmakerroin k_n :

$$k_n \cdot k_t = -1$$

$$k_n \cdot 3 = -1$$

$$k_n = -\frac{1}{3}$$

Normaalin yhtälö:

$$y - y_0 = k_n(x - x_0)$$

$$y - 15\frac{3}{4} = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

$$y - 15\frac{3}{4} = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 16\frac{3}{4}$$

$$\text{Vastaus: } y = -\frac{1}{3}x + 16\frac{3}{4}$$

$$54. \quad y = \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$$

$$y' = \frac{0 \cdot ((x-1)^2 + 1) - 1 \cdot 2(x-1) \cdot 1}{((x-1)^2 + 1)^2} = \frac{-2(x-1)}{((x-1)^2 + 1)^2}$$

$$x = 0: \quad k_{t_1} = y'(0) = \frac{-2(0-1)}{((0-1)^2 + 1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{(0-1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Tangentin yhtälö:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x = 3: \quad k_{t_2} = y'(3) = \frac{-2(3-1)}{((3-1)^2 + 1)^2} = -\frac{4}{25}$$

$$y = \frac{1}{(3-1)^2 + 1} = \frac{1}{5}$$

Tangentin yhtälö:

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{4}{25}(x - 3)$$

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{4}{25}x + \frac{12}{25}$$

$$y = -\frac{4}{25}x + \frac{17}{25}$$

Leikkauspiste:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{4}{25}x + \frac{17}{25}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{4}{25}x = \frac{17}{25} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{33}{50}x = \frac{9}{50}$$

$$x = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{2} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

Vastaus: $(\frac{3}{11}, \frac{7}{11})$

55. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

$$k_t = f'(x) = -2x + 4$$

Tangentti kulkee pisteiden $(x, f(x))$ ja $(-1, 12)$

$$k_t = \frac{f(x) - 12}{x - (-1)} = \frac{-x^2 + 4x + 1 - 12}{x + 1} = \frac{-x^2 + 4x - 11}{x + 1}$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 11}{x + 1} = -2x + 4 \quad | \cdot (x + 1)$$

$$-x^2 + 4x - 11 = (-2x + 4)(x + 1)$$

$$-x^2 + 4x - 11 = -2x^2 - 2x + 4x + 4$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x = -5 \text{ tai } x = 3$$

$$\begin{aligned} x = -5: \quad y &= f(-5) = -(-5)^2 + 4(-5) + 1 = -44 \\ k_t &= -2 \cdot (-5) + 4 = 14 \end{aligned}$$

Tangentin yhtälö:

$$y - (-44) = 14(x - (-5))$$

$$y + 44 = 14x + 70$$

$$y = 14x + 26$$

$$\begin{aligned} x = 3: \quad y &= f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = 4 \\ k_t &= -2 \cdot 3 + 4 = -2 \end{aligned}$$

Tangentin yhtälö:

$$y - 4 = -2(x - 3)$$

$$y - 4 = -2x + 6$$

$$y = -2x + 10$$

Vastaus: $y = 14x + 26$ ja $y = -2x + 10$

56. $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ Suora $6x - 2y + 3 = 0$

$$6x - 2y + 3 = 0$$

$$2y = 6x + 3$$

$$y = 3x + \frac{3}{2}$$

Eli kulmakerroin $k = 3$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y' = \frac{3}{4}x^2$

$$\frac{3}{4}x^2 = 3 \quad \Big| \cdot \frac{4}{3}$$

$$x^2 = 4 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

$$x = -2: \quad y = \frac{1}{4}(-2)^3 - 1 = -3$$

Tangentin yhtälö:

$$y - (-3) = 3(x - (-2))$$

$$y + 3 = 3x + 6$$

$$3x - y + 3 = 0$$

$$x = 2: \quad y = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 1 = 1$$

Tangentin yhtälö:

$$y - 1 = 3(x - 2)$$

$$y - 1 = 3x - 6$$

$$3x - y - 5 = 0$$

Vastaus: $3x - y + 3 = 0$ ja $3x - y - 5 = 0$

57. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

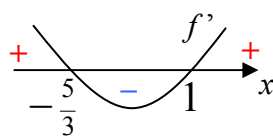
$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 8}{6}$$

$$x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \text{ tai } x = \frac{6}{6} = 1$$

	$-\frac{5}{3}$	1	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			



Kasvava, kun $x \leq -\frac{5}{3}$ tai $x \geq 1$

Vähenevä, kun $-\frac{5}{3} \leq x \leq 1$

Koska funktio f on kasvava, kun $x \leq -\frac{5}{3}$, niin

$$f(-1,666\ 667) > f(-1,666\ 668)$$

Vastaus: Kasvava, kun $x \leq -\frac{5}{3}$ tai $x \geq 1$, vähenevä, kun $-\frac{5}{3} \leq x \leq 1$

$f(-1,666\ 667)$ on suurempi

58. $f(x) = 2x^3 + 24x^2 - 198x + 2$

$$f'(x) = 6x^2 + 48x - 198 = 6(x^2 + 8x - 33)$$

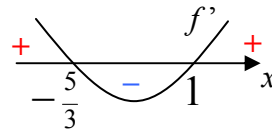
$$f'(x) = 0$$

$$x^2 + 8x - 33 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-33)}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 14}{2}$$

$$x = -11 \text{ tai } x = 3$$

	-11	3	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			



Kasvava, kun $x \leq -11$ tai $x \geq 3$

Vastaus: $x \leq -11$ tai $x \geq 3$

59. $g(x) = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 4$

$$g'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 96x = 12x(x^2 - 2x - 8)$$

$g'(x) = 0$, kun

$x = 0$

tai

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 4$$

	-2	0	4	
$g'(x)$	-	+	-	+
$g(x)$				

Testipisteet:

$$g'(-3) = -252 < 0$$

$$g'(-1) = 60 > 0$$

$$g'(1) = -108 < 0$$

$$g'(5) = 420 > 0$$

a) g on vähenevä, kun $x \leq -2$ tai $0 \leq x \leq 4$

b) minimiarvot $g(-2) = -76$ ja $g(4) = -508$
maksimiarvo $g(0) = 4$

Vastaus: a) $x \leq -2$ tai $0 \leq x \leq 4$

b) minimiarvot -76 ja -508 , maksimiarvo 4

$$60. \quad f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 5}$$

Määritelty, kun

$$x^2 - 4x + 5 \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 4x + 5) - 2 \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$x \neq \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4x + 8}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$x \neq \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Eli määritelty kaikilla x .

$$f'(x) = 0, \text{ kun}$$

$$-4x + 8 = 0$$

$$-4x = -8 \quad | :(-4)$$

$$x = 2$$

	2	
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

Testipisteet:

$$f'(0) = \frac{8}{5} > 0$$

$$f'(3) = \frac{-4}{81} < 0$$

$$\text{Suurin arvo } f(2) = \frac{2}{2^2 - 4 \cdot 2 + 5} = \frac{2}{1} = 2$$

Vastaus: Suurin arvo 2, ei pienintä arvoa

$$61. \quad f(x) = \frac{x^3 + ax^2}{(x-1)^2}$$

Minimikohta $x = 6$

Määritelty, kun
 $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2ax) \cdot (x-1)^2 - (x^3 + ax^2) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{((x-1)^2)^2} \\ &= \frac{(x-1)((3x^2 + 2ax)(x-1) - 2(x^3 + ax^2))}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 + 2ax)(x-1) - 2(x^3 + ax^2)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Minimikohta $x = 6$, joten $x = 6$ on derivaatan nollakohta:

$$f'(6) = 0$$

$$\frac{(3 \cdot 6^2 + 2a \cdot 6)(6-1) - 2(6^3 + a \cdot 6^2)}{(6-1)^3} = 0$$

$$(108 + 12a) \cdot 5 - 2(216 + 36a) = 0$$

$$540 + 60a - 432 - 72a = 0$$

$$-12a = -108 \quad | :(-12)$$

$$a = 9$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 18x)(x-1) - 2(x^3 + 9x^2)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0, \text{ kun}$$

$$(3x^2 + 18x)(x-1) - 2(x^3 + 9x^2) = 0$$

$$3x^3 - 3x^2 + 18x^2 - 18x - 2x^3 - 18x^2 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 18x = 0$$

$$x(x^2 - 3x - 18) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 6$$

	-3	0	1	6	
$f'(x)$	+	-	+	-	+
$f(x)$					

Testipisteet:

$$f'(-4) = 0,32 > 0$$

$$f'(-1) = -1,75 < 0$$

$$f'(0,5) = 77 > 0$$

$$f'(2) = -40 < 0$$

$$f'(7) \approx 0,32 > 0$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{(x-1)^2}$$

Maksimiarvo $f(-3) = \frac{(-3)^3 + 9(-3)^2}{(-3-1)^2} = \frac{54}{16} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

Minimiarvot $f(0) = 0$

$$f(6) = \frac{6^3 + 9 \cdot 6^2}{(6-1)^2} = \frac{540}{25} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}$$

Vastaus: $a = 9$ maksimiarvo $3\frac{3}{8}$, minimiarvot 0 ja $21\frac{3}{5}$

62. $h(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^3$

$$h'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 2)^2 \cdot 2x = 3x(x^2 - 2)^2$$

$$h'(x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	
$h'(x)$	-	-	+	+
$h(x)$				

Testipisteet:

$$h'(-2) = -24 < 0$$

$$h'(-1) = -3 < 0$$

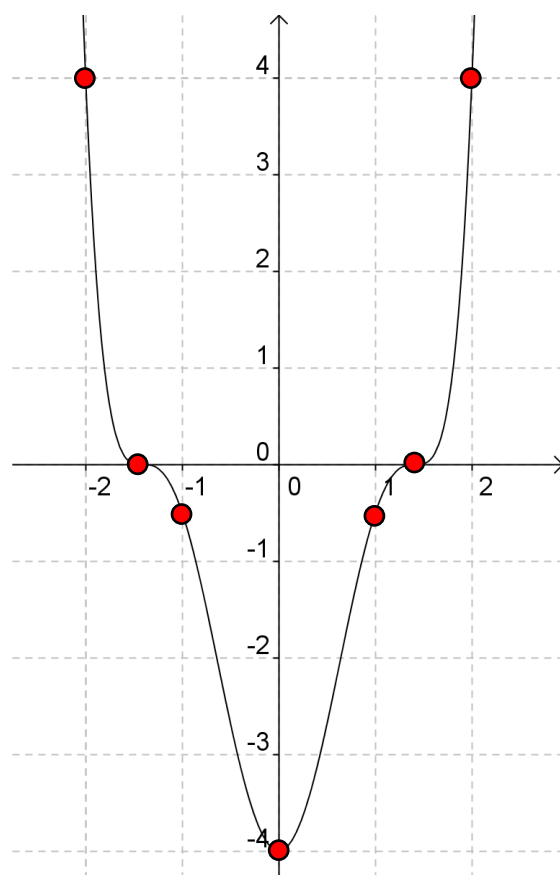
$$h'(1) = 3 > 0$$

$$h'(2) = 24 > 0$$

Minimiarvo $h(0) = \frac{1}{2}(0^2 - 2)^3 = -4$

(Kohdat $x = \pm\sqrt{2}$ ovat terassikohtia)

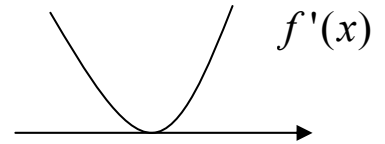
x	$y = h(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^3$
-2	4
$-\sqrt{2}$	0
-1	$-\frac{1}{2}$
0	-4
1	$-\frac{1}{2}$
$\sqrt{2}$	0
2	4



63. $f(x) = x^3 - ax^2 + a^2x$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta on ei-negatiivinen (eli funktio f on aidosti kasvava) kaikkialla, kun derivaatalla on korkeintaan yksi nollakohta.



Tällöin yhtälön $3x^2 - 2ax + a^2 = 0$ diskriminantti $D \leq 0$

$$D \leq 0$$

$$(-2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a^2 \leq 0$$

$$4a^2 - 12a^2 \leq 0$$

$$-8a^2 \leq 0$$

identtisesti tosi

Siis f on aidosti kasvava kaikilla a :n arvoilla.

Vastaus: kaikilla vakion a arvoilla

64. Merkitään $f(x) = x^3 + 3x + 5$

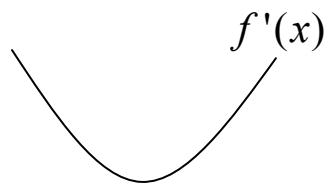
$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

Derivaatan pienin arvo, kun $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$



Derivaatan pienin arvo $f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 3 = 3$

Vastaus: 3

65. $f(x) = -2x^3 - 9x^2 + 60x - 4$ välillä $[-4, 5]$

$$f'(x) = -6x^2 - 18x + 60 = -6(x^2 + 3x - 10)$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x = -5 \text{ tai } x = 2$$

Välillä $[-4, 5]$ on vain $x = 2$

$$f(-4) = -2 \cdot (-4)^3 - 9 \cdot (-4)^2 + 60 \cdot (-4) - 4 = -260$$

$$f(5) = -2 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 - 4 = -179$$

$$f(2) = -2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 - 4 = 64$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on 64 ja pienin -260

Vastaus: suurin 64, pienin -260

66. Merkitään välillä $[0, 3]$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) \\&= (x^2 - 2x - x + 2)(x-3) \\&= (x^2 - 3x + 2)(x-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x-3)(x-3) + (x^2 - 3x + 2) \cdot 1 \\&= 2x^2 - 6x - 3x + 9 + x^2 - 3x + 2 \\&= 3x^2 - 12x + 11\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \approx 2,6 \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1,4$$

$$f(0) = (0-1)(0-2)(0-3) = -6$$

$$f(3) = 0$$

$$f(x_1) \approx -0,4$$

$$\begin{aligned}f(x_2) &= \left(\frac{6-\sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3} - 2\right)\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3} - 3\right) \\&= \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{-3-\sqrt{3}}{3} \\&= \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{27} = \frac{\sqrt{3}(9-3)}{27} = \frac{6\sqrt{3}}{27} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ ja pienin -6

Vastaus: suurin $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, pienin -6

67. $f(x) = (2x - 5)^2(3 + x)^3$ välillä $[-5, 3]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(2x - 5) \cdot 2 \cdot (3 + x)^3 + (2x - 5)^2 \cdot 3(3 + x)^2 \cdot 1 \\ &= 4(2x - 5)(3 + x)^3 + 3(2x - 5)^2(3 + x)^2 \\ &= (2x - 5)(3 + x)^2(4(3 + x) + 3(2x - 5)) \\ &= (2x - 5)(3 + x)^2(12 + 4x + 6x - 15) \\ &= (2x - 5)(3 + x)^2(10x - 3) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$, kun

$$\begin{array}{llll} 2x - 5 = 0 & \text{tai} & 3 + x = 0 & \text{tai} & 10x - 3 = 0 \\ 2x = 5 & & x = -3 & & 10x = 3 \\ x = \frac{5}{2} & & & & x = \frac{3}{10} \end{array}$$

Kaikki derivaatan nollakohdat ovat välillä $[-5, 3]$.

$$f(-5) = -1800$$

$$f(3) = 216$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

$$f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{4348377}{6250} = 695\frac{4627}{6250}$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $695\frac{4627}{6250}$ ja pienin -1800 .

Vastaus: suurin $695\frac{4627}{6250}$ ja pienin -1800

68. $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+4}$

Määritelty
kaikilla x

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2 + 4) - (4x - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4x^2 + 16 - 8x^2 + 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-4x^2 + 2x + 16}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0, \text{ kun}$$

$$-4x^2 + 2x + 16 = 0 \quad |:2$$

$$-2x^2 + x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{65}}{-4} \approx -1,77 \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{65}}{-4} \approx 2,27$$

a) molemmat derivaatan nollakohdat ovat välillä $[-2, 3]$

$$f(-2) = -1,125$$

$$f(3) \approx 0,85$$

$$f(x_1) \approx -1,13$$

$$f(x_2) \approx 0,88$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $f(x_2)$ ja pienin $f(x_1)$

Suurin arvo kohdassa $x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{-4}$ ja pienin kohdassa $x = \frac{-1 + \sqrt{65}}{-4}$

b) välillä $[0, 5]$ on derivaatan nollakohdista vain $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{65}}{-4}$

$$f(0) = -0,25$$

$$f(5) \approx 0,66$$

$$f(x_2) \approx 0,88$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $f(x_2)$ ja pienin $f(0)$

Suurin arvo kohdassa $x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{-4}$ ja pienin kohdassa $x = 0$

Vastaus: a) suurin kohdassa $x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{-4}$ ja pienin kohdassa $x = \frac{-1 + \sqrt{65}}{-4}$

b) suurin kohdassa $x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{-4}$ ja pienin kohdassa $x = 0$

69. $x(t) = -0,02t^2 + 0,61t + 4,00$ missä $0 \leq t \leq 24$

$t = \text{aika (h)}$ $x(t) = \text{lämpötila (°C)}$

$$x'(t) = -0,04t + 0,61$$

$$x'(t) = 0$$

$$-0,04t + 0,61 = 0$$

$$0,04t = 0,61 \quad |:0,04$$

$$t = 15,25$$

$$f(0) = 4,00$$

$$f(24) = 7,12$$

$$f(15,25) = 8,65125$$

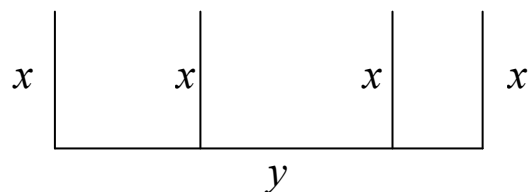
Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo $f(15,25)$ ja pienin $f(0)$

Vastaus: Lämpötila on matalimmillaan hetkellä $t = 0$ (h) ja korkeimmillaan hetkellä $t = 15$ h 15 min

70. Aitaa käytössä 85 m

$$4x + y = 85$$

$$y = 85 - 4x$$



Pinta-ala on

$$A = x \cdot y$$

$$A(x) = x(85 - 4x) = 85x - 4x^2$$

Rajat:

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 85 - 4x \geq 0$$

$$4x \leq 85 \quad | :4$$

$$x \leq 21,25$$

$$\text{siis } 0 \leq x \leq 21,25$$

$$A'(x) = 85 - 8x$$

$$A'(x) = 0$$

$$85 - 8x = 0$$

$$8x = 85 \quad | :8$$

$$x = 10,625$$

$$f(0) = 0$$

$$f(21,25) = 0$$

$$f(10,625) = 451,5625$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $f(10,625)$

Mitat:

$$\text{rannan suuntainen sivu } y = 85 - 4x = 85 - 4 \cdot 10,625 = 42,5 \text{ m}$$

$$\text{kohtisuora sivu } x = 10,625 \text{ m}$$

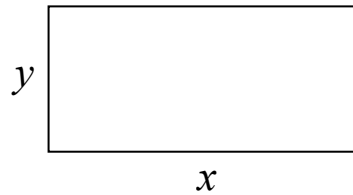
Vastaus: rannan suuntainen sivu 42,5 m

rantaa vastaan kohtisuora sivu 10,625 m

71. Suorakulmion pinta-ala 50 cm^2 , piiri mahdollisimman pieni

$$x \cdot y = 50$$

$$y = \frac{50}{x}$$



Piiri:

$$P = 2x + 2y$$

$$P(x) = 2x + 2 \cdot \frac{50}{x} = 2x + \frac{100}{x} = 2x + 100x^{-1}, \quad x > 0$$

$$P'(x) = 2 - 100x^{-2} = 2 - \frac{100}{x^2} = \frac{2x^2 - 100}{x^2}$$

$$P'(x) = 0, \text{ kun } 2x^2 - 100 = 0$$

$$2x^2 = 100$$

$$x^2 = 50 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{50}$$

Vain $x = \sqrt{50} \approx 7,1$ kelpaa

	0	$\sqrt{50}$
$P'(x)$	-	+
$P(x)$		

Testipisteet:

$$P'(1) = -98 < 0$$

$$P'(10) = 1 > 0$$

Pienin arvo, kun $x = \sqrt{50} \approx 7,1$

$$y = \frac{50}{x} = \frac{50}{\sqrt{50}} = \frac{50\sqrt{50}}{50} = \sqrt{50} \approx 7,1$$

Vastaus: Piirin pienin arvo, kun leikataan neliö, jonka sivu on 7,1 cm

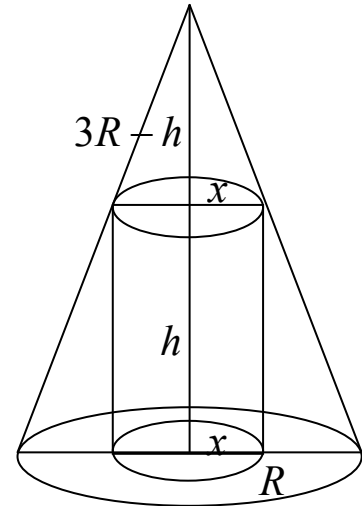
72. Kartion pohjan säde on R ja korkeus $3R$
Lieriön pohjan säde on x ja korkeus h

Yhdenmuotoisuus $\Rightarrow$

$$\frac{x}{R} = \frac{3R-h}{3R} \quad | \cdot 3R$$

$$3x = 3R - h$$

$$h = 3R - 3x$$



Lieriön vaipan ja pohjan alojen summa:

$$A = 2\pi x^2 + 2\pi xh$$

$$A(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x(3R - 3x) = 2\pi(x^2 + 3Rx - 3x^2) = 2\pi(3Rx - 2x^2)$$

missä $0 \leq x \leq R$

$$A'(x) = 2\pi(3R - 4x)$$

$$A'(x) = 0, \text{ kun}$$

$$3R - 4x = 0$$

$$4x = 3R \quad | :4$$

$$x = \frac{3}{4}R$$

$$A(0) = 0$$

$$A(R) = 2\pi(3R^2 - 2R^2) = 2\pi R^2$$

$$A\left(\frac{3}{4}R\right) = 2\pi\left(3R \cdot \frac{3}{4}R - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}R\right)^2\right) = 2\pi\left(\frac{9}{4}R^2 - \frac{9}{8}R^2\right) = 2\pi \cdot \frac{9}{8}R^2 = \frac{9}{4}\pi R^2$$

Fermat'n lauseen mukaan suurin arvo on $A\left(\frac{3}{4}R\right)$

Vastaus: $x = \frac{3}{4}R$

Testi 1

1. a) $f'(x) = -12x^3 + 6x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x^5} = 3x^{-5}$, $f'(x) = 3 \cdot (-5)x^{-6} = \frac{-15}{x^6}$

c) $f'(x) = 8(3x^2 + 5)^7 D(3x^2 + 5) = 8 \cdot 6x(3x^2 + 5)^7 = 48x(3x^2 + 5)^7$

d)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{D(4x^2 + 3) \cdot (x+1) - (4x^2 + 3)D(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{8x(x+1) - (4x^2 + 3) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{8x^2 + 8x - 4x^2 - 3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 8x - 3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} f'(x) &= D(3x+1)(x-4)^9 + (3x+1)D(x-4)^9 \\ &= 3(x-4)^9 + (3x+1) \cdot 9 \cdot (x-4)^8 \cdot 1 \\ &= 3(x-4)^8 [(x-4) + 3(3x+1)] \\ &= 3(x-4)^8 [x-4+9x+3] \\ &= 3(x-4)^8 (10x-1) \\ &= (x-4)^8 (30x-3) \end{aligned}$$

2. a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 9} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 - 6x + 9)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x+3)} = \frac{3 \cdot 0}{6} = 0 \end{aligned}$$

b)
$$g(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2x, & x \geq 5 \\ -x - 90a, & x < 5 \end{cases}$$

Funktio g on jatkuva kohdassa $x=5$, jos $\lim_{x \rightarrow 5+} g = \lim_{x \rightarrow 5-} g = g(5)$.

$$\lim_{x \rightarrow 5+} g = \lim_{x \rightarrow 5+} (3ax^2 - 2x) = 3a \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 = 75a - 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 5-} g = \lim_{x \rightarrow 5-} (-x - 90a) = -5 - 90a$$

$$g(5) = 3a \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 = 75a - 10$$

Jotta g olisi jatkuva, niin $\lim_{x \rightarrow 5^-} g = \lim_{x \rightarrow 5^+} g = g(5)$

$$-5 - 90a = 75a - 10$$

$$165a = 5 \quad | : 165$$

$$a = \frac{5}{165} = \frac{1}{33}$$

Vastaus: $a = \frac{1}{33}$

3. a) $f(x) = 5x^3 - 3x$, $f'(x) = 15x^2 - 3$

Kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(-1) = 15 \cdot (-1)^2 - 3 = 12$.

Eräs tangentille kuuluva piste on sivuamispiste, jonka y -koordinaatti on

$$f(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -5 + 3 = -2. \text{ Siis piste } (-1, -2) \text{ kuuluu tangentille.}$$

Tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad (x_0, y_0) = (-1, -2), \quad k_t = 12$$

$$y - (-2) = 12(x - (-1))$$

$$y + 2 = 12(x + 1)$$

$$y = 12x + 10$$

b) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 1} \leq 0$

Nimittäjän nollakohdat: $x - 1 = 0$

$$x = 1$$

Epäyhtälö on siis määritelty, kun $x \neq 1$.

Osoittajan nollakohdat: $x^2 + x - 6 = 0$

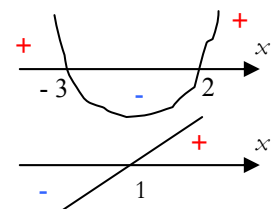
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Tehdään merkkikaavio:

	-3	1	2	
$x^2 + x - 6$	+	-	-	+
$x - 1$	-	-	+	+
$\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$	-	+	-	+

$\leftarrow \bullet \quad \bigcirc \rightarrow \bullet$



Vastaus: a) $y = 12x + 10$

b) $x \leq -3$ tai $1 < x \leq 2$

4. $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$

Funktio f on vähenevä, kun $f' \leq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{D(2x^2 - 3)(x - 2) - (2x^2 - 3)D(x - 2)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{4x(x - 2) - (2x^2 - 3) \cdot 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 2x^2 + 3}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + 3}{(x - 2)^2}, \quad x \neq 2 \end{aligned}$$

Nimittäjä $(x - 2)^2 > 0$, kun $x \neq 2$, joten osoittaja määrää derivaatan merkin.

$$f'(x) = 0$$

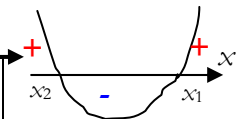
$$2x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$x_1 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 3,6 \quad \text{tai} \quad x_2 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 0,42$$

Tehdään merkki- ja kulkukaavio.

	x_2		2		x_1	
osoittaja $2x^2 - 8x + 3$	+	-		-	+	
f						



Funktio on vähenevä, kun $2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \leq x < 2$ tai $2 < x \leq 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Kulkukaavion mukaan ääriarvokohdat ovat maksimikohta $x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ ja

minimikohta $x = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

Vastaus: Vähenevä, kun $2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \leq x < 2$ tai $2 < x \leq 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$. Ääriarvokohdat ovat

maksimikohta $x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ ja minimikohta $x = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

5. Tutkitaan funktiota $f(x) = 2 - (x - 3)^2$ suljetulla välillä $[-3, 2]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - (x^2 - 6x + 9) \\ &= 2 - x^2 + 6x - 9 \\ &= -x^2 + 6x - 7 \end{aligned}$$

Funktion derivaatta $f'(x) = -2x + 6$.

Derivaatan nollakohdat $f'(x) = 0$

$$-2x + 6 = 0$$

$$-2x = -6 \quad | :(-2)$$

$$x = 3$$

Derivaatan nollakohta $x = 3$ ei kuulu tarkasteluvälille $[-3, 2]$.

Fermat'n lauseen mukaan jatkuvalla funktiolla on suljetulla välillä suurin ja pienin arvo.

Nämä arvot löytyvät derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä.

Funktio f on jatkuva, eikä derivaatalla ole nollakohtia, joten suurin ja pienin arvo löytyy välin päätepisteistä.

$$f(-3) = 2 - (-3 - 3)^2 = 2 - (-6)^2 = 2 - 36 = -34 \quad \text{pienin arvo}$$

$$f(2) = 2 - (2 - 3)^2 = 2 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1 \quad \text{suurin arvo}$$

Funktio saa arvon nolla eli $f(x) = 0$, kun

$$2 - (x - 3)^2 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 2$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \pm\sqrt{2} + 3$$

Vastaus: Suurin arvo 1, pienin arvo -34 . Funktion nollakohdat ovat $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

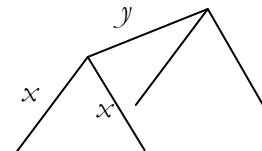
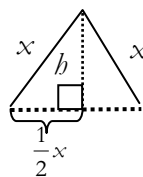
6. Merkitään kehikon tasasivuisen päätykolmion sivun pituutta kirjaimella x ja telttakehikon pituutta kirjaimella y .

Teltan tilavuus V on

$$V = A_{\text{päätykolmio}} \cdot y$$

Lasketaan päätykolmion pinta-ala.

$$A_{\text{päätykolmio}} = \frac{1}{2}xb$$



Päätykolmion korkeudeksi h saadaan Pythagoraan lauseella

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2 = x^2$$

$$h^2 = x^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}x^2$$

$$h = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad x > 0$$

Koska korkeus $h > 0$, niin $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Kehikkoon on käytettävissä metalliputkea 9,5 m, joten

$$4x + y = 9,5$$

$$y = 9,5 - 4x$$

Telttakehikon pituus ja päätykolmion sivun pituus ovat positiivisia eli

$$9,5 - 4x > 0$$

$$-4x > -9,5 \quad | : (-4) \quad \text{ja} \quad x > 0$$

$$x < \frac{9,5}{4} = 2,375$$

Jotta tarkasteluun saadaan suljettu väli, otetaan mukaan myös rajatilanteet, joissa sivujen pituudet ovat yhtä suuria kuin 0. Määrittelyväliksi saadaan siis $[0; 2,375]$

Teltan tilavuuden lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{päätykolmio}} \cdot y \\ &= \frac{1}{2}xh \cdot (9,5 - 4x) \\ &= \frac{1}{2}x \frac{\sqrt{3}}{2}x(9,5 - 4x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(9,5 - 4x) \\ &= 2,375 \cdot \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}x^3 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatta ja derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = 4,75 \cdot \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}x^2$$

$$\begin{aligned}
V'(x) &= 0 \\
\sqrt{3}x(4,75 - 3x) &= 0 \\
\sqrt{3}x &= 0 \quad \text{tai} \quad 4,75 - 3x = 0 \\
x &= 0 \qquad \qquad \qquad -3x = -4,75 \quad | :(-3) \\
x &= \stackrel{4)}{=} \frac{4,75}{3} = \frac{19}{12} = 1,583... \in [0; 2,375]
\end{aligned}$$

V on jatkuva funktio, joten suurin arvo saadaan suljetun välin $[0; 2,375]$ päätepisteissä tai tällä välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$$\begin{aligned}
V(0) &= 2,375 \cdot \sqrt{3} \cdot 0^2 - \sqrt{3} \cdot 0^3 = 0 \\
V\left(\frac{19}{12}\right) &= 2,375 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{19}{12}\right)^2 - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{19}{12}\right)^3 = 3,4375... \approx 3,4 \\
V(2,375) &= 2,375 \cdot \sqrt{3} \cdot 2,375^2 - \sqrt{3} \cdot 2,375^3 = 0
\end{aligned}$$

Tilavuus on suurin, kun päätykolmion sivun pituus $x = \frac{19}{12} \approx 1,6$ (m).

Telttakehikon pituus on $9,5 - 4x = 9,5 - 4 \cdot \frac{19}{12} = 3,16... \approx 3,2$ (m)

Vastaus: Amin katkoo siis neljä kappaletta 1,6 m pätkiä ja yhden 3,2 m pätkän.

Testi 2

1.

$$a) \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{x(2x - 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{x}{2x - 1}$$

$$b) \frac{3x}{1-x} - \frac{3x^2 + 3}{1-x^2} \stackrel{1+x}{=} \frac{3x}{1-x} - \frac{3(x^2 + 1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{3x + 3x^2 - 3x^2 - 3}{(1-x)(1+x)} = \frac{3(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{-3}{1+x}$$

$$c) \frac{x^2 + 4x + 4}{x-2} : (x+2) = \frac{(x+2)^2}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{x-2}$$

2. a) $f'(x) = 15x^2 - \frac{2}{3}x + 6$

$$b) f'(x) = \frac{D2x^2(x-5) - D(x-5)2x^2}{(x-5)^2} = \frac{4x(x-5) - 2x^2}{(x-5)^2} = \frac{4x^2 - 20x - 2x^2}{(x-5)^2} = \frac{2x(x-10)}{(x-5)^2}$$

c) Funktiossa f on muuttujana x ja a on vakio.

$$f'(x) = Da^2 2x(x-3a) + a^2 2xD(x-3a) = 2a^2(x-3a) + a^2 2x \cdot 1 = 4a^2 x - 6a^3$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 3x^2}{|x|}$

Poistetaan lausekkeesta itseisarvot ja sievennetään.

1) Kun $x \geq 0$, niin $|x| = x$. Lasketaan oikeanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-2x + 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x(-2 + 3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} (-2 + 3x) = -2 + 3 \cdot 0 = -2$$

2) Kun $x < 0$, niin $|x| = -x$. Lasketaan vasemmanpuoleinen raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{-2x + 3x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x(-2 + 3x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0_-} (2 - 3x) = 2 - 3 \cdot 0 = 2$$

Koska toispuoleiset raja-arvot kohdan 0 molemmin puolin ovat eri suuret, raja-arvoa ei ole olemassa.

$$c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x + 3}$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtien avulla.

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4}$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

$$\frac{2x^2 + 4x - 6}{x + 3} = \frac{2(x + 3)(x - 1)}{x + 3} = 2(x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow -3} 2(-3 - 1) = -8$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 1}$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin ryhmittelemällä.

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 1} &= \frac{x^2(x + 2) - (x + 2)}{x + 1} \\ &= \frac{(x + 2)(x^2 - 1)}{x + 1} \\ &= \frac{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}{x + 1} \\ &= (x + 2)(x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow -1} (-1 + 2)(-1 - 1) = -2 \end{aligned}$$

$$4. \quad f(x) = (3x - 5)^6$$

Funktio on aidosti vähenevä, kun $f' < 0$ ja nolla korkeintaan erillisissä kohdissa.

$$f'(x) = 6(3x - 5)^5 D(3x - 5) = 6(3x - 5)^5 \cdot 3 = 18(3x - 5)^5$$

$$f'(x) = 0$$

$$18(3x - 5)^5 = 0$$

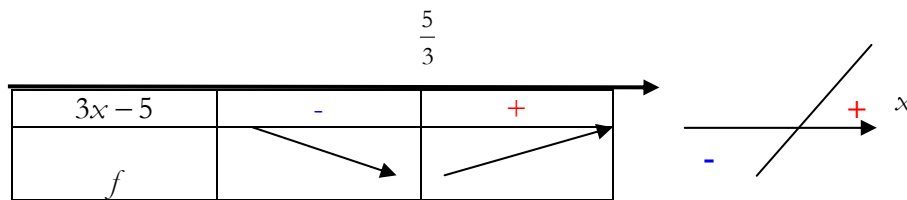
$$(3x - 5)^5 = 0$$

$$3x - 5 = 0$$

$$3x = 5 \quad | :3$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Tehdään merkki- ja kulkukaavio. Tekijän $(3x - 5)^5$ merkin määrää kantaluku $(3x - 5)$.



Kulkukaaviosta nähdään, että f on aidosti vähenevä, kun $x \leq \frac{5}{3}$.

Vastaus: $x \leq \frac{5}{3}$

$$5. \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} (3ax - 2) = 12a - 2 = 12a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (2 - x^3) = 2 - 4^3 = -62$$

b)

Funktio f on jatkuva kaikilla $a \in \mathbb{R}$, kun $x \neq 4$, koska sen lausekkeet ovat polynomeja.

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 4$, jos $\lim_{x \rightarrow 4+} f = \lim_{x \rightarrow 4-} f = f(4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} (3ax - 2) = 12a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (2 - x^3) = 2 - 4^3 = -62$$

$$f(4) = -62$$

Jotta f olisi jatkuva myös kohdassa $x = 4$, niin $\lim_{x \rightarrow 4+} f = \lim_{x \rightarrow 4-} f = f(4)$

$$12a - 2 = -62 = -62$$

$$12a - 2 = -62$$

$$12a = -60 \quad | : 12$$

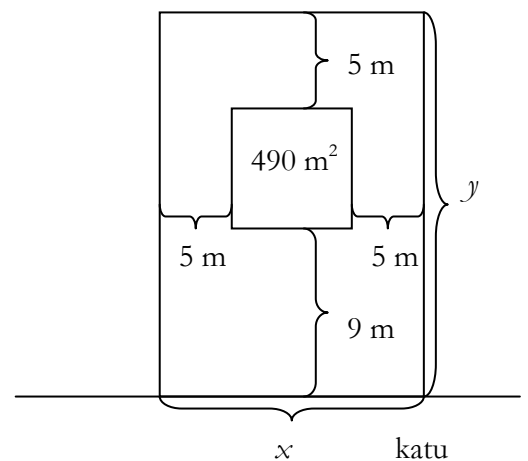
$$a = \frac{-60}{12} = -5$$

Vastaus: a) $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 12a - 2$, $\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = -62$

b) $a = -5$

6. Merkitään pienimmän mahdollisen tontin pituutta kirjaimella x ($x > 0$) ja leveyttä y ($y > 0$). Toimitalon mitat ovat tällöin: pituus $x - 10$ (m), leveys $y - 14$ (m).

Kysytyn tontin ala $A = xy$ (m²)



Toimitalon ala on

$$(x-10)(y-14) = 490$$

$$y-14 = \frac{490}{x-10}$$

$$y = \frac{490}{x-10} + 14$$

Tällöin tontin ala on $A(x) = x \left(\frac{490}{x-10} + 14 \right)$.

Kysyttiin pienintä tonttia, joten ääriarvokohtaa etsitään derivaatan avulla.

$$A'(x) = 1 \left(\frac{490}{x-10} + 14 \right) + x D \left(\frac{490}{x-10} + 14 \right)$$

$$= \left(\frac{490}{x-10} + 14 \right) + x \frac{-490}{(x-10)^2}$$

$$= \frac{490}{x-10} + 14 - \frac{490x}{(x-10)^2}$$

$$\left| D \left(\frac{490}{x-10} + 14 \right) = \frac{0 \cdot (x-10) - 1 \cdot 490}{(x-10)^2} + 0 \right.$$

$$= \frac{-490}{(x-10)^2}$$

$$A'(x) = 0$$

$$\frac{490}{x-10} + 14 - \frac{490x}{(x-10)^2} = 0 \quad | \cdot (x-10)^2$$

$$490(x-10) + 14(x-10)^2 - 490x = 0$$

$$490x - 4900 + 14(x-10)^2 - 490x = 0$$

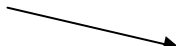
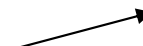
$$14(x-10)^2 = 4900 \quad | : 14$$

$$(x-10)^2 = 350$$

$$x-10 = \pm\sqrt{350}$$

$$x = \sqrt{350} + 10 = 5\sqrt{14} + 10 = 28,708... > 0 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{350} + 10 = -8,708... < 0$$

$x < 0$, ei käy, koska on oltava $x > 0$

	0	$5\sqrt{14} + 10$
A'	-	+
A		
	min	

testipisteet:

$$A'(1) = -13,44... < 0$$

$$A'(30) = 1,225... > 0$$

Tontin pinta-ala on pienin, kun $x = 5\sqrt{14} + 10 = 28,709... \approx 29$ (m)

Tällöin leveys on

$$\begin{aligned} y &= \frac{490}{x-10} + 14 \\ &= \frac{490}{5\sqrt{14} + 10 - 10} + 14 \\ &= \frac{98\sqrt{14}}{14} + 14 = 7\sqrt{14} + 14 = 40,19... \approx 40 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Vastaus: Tontin mitat ovat 29 m ja 40 m.

$$7. \quad g'(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{g(x+b) - g(x)}{b}$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x+b) - g(x)}{b} &= \frac{\overset{x)}{\frac{3}{x+b}} - \overset{x+b)}{\frac{3}{x}}}{b} \\ &= \frac{\frac{3x - 3(x+b)}{x(x+b)}}{b} \\ &= \frac{\frac{3x - 3x - 3b}{x(x+b)}}{b} \\ &= \frac{-3b}{bx(x+b)} \\ &= \frac{-3}{x(x+b)} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{-3}{x(x+0)} = -\frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Siis } g'(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{g(x+b) - g(x)}{b} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\text{Vastaus: } g'(x) = -\frac{3}{x^2}$$