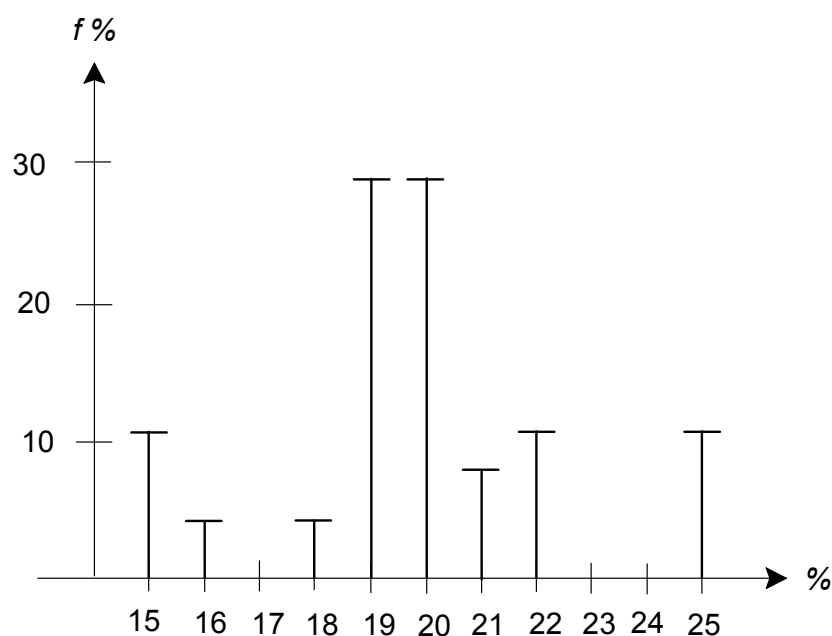


Kertausosa

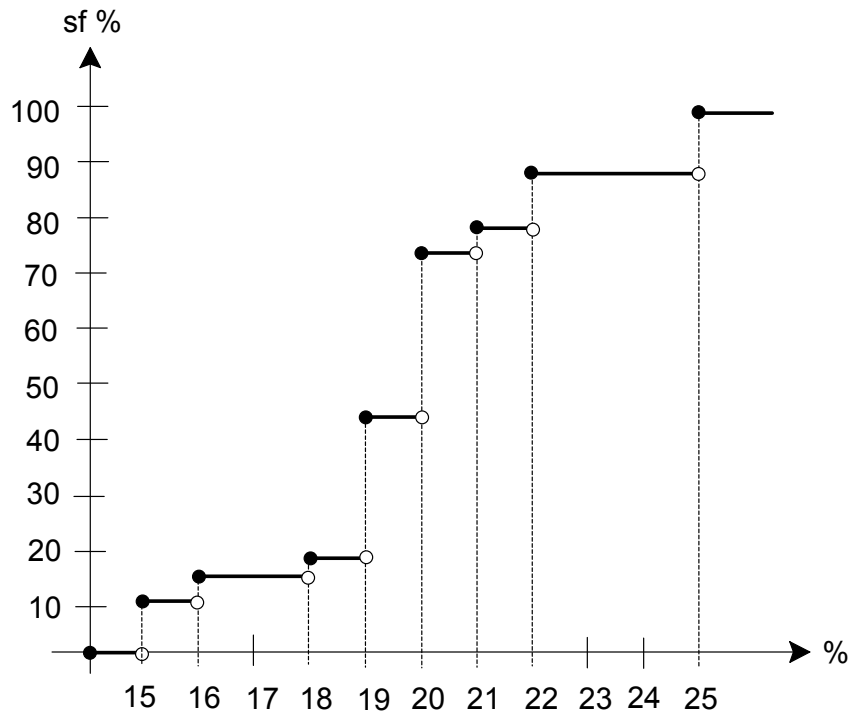
1. Frekvenssijakaumat

%	f	$f\%$	sf	$sf\%$
15	3	$\frac{3}{27} \approx 11,11\%$	3	11,1 %
16	1	$\frac{1}{27} \approx 3,70\%$	3 + 1 = 4	11,1% + 3,7% = 14,81%
18	1	$\frac{1}{27} \approx 3,70\%$	4 + 1 = 5	14,8% + 3,7% = 18,51%
19	7	$\frac{7}{27} \approx 25,93\%$	5 + 7 = 12	18,5 + 25,9 = 44,44%
20	7	$\frac{7}{27} \approx 25,93\%$	12 + 7 = 19	44,4 + 25,9 = 70,37%
21	2	$\frac{2}{27} \approx 7,41\%$	19 + 2 = 21	70,33 + 7,4 = 77,78%
22	3	$\frac{3}{27} \approx 11,11\%$	21 + 3 = 24	77,7 + 11,1 = 88,89%
25	3	$\frac{3}{27} \approx 11,11\%$	24 + 3 = 27	88,8 + 11,1 = 100 %
yht.	27			

Suhteellisten frekvenssijakaumien kuvaajat



Kertausosa



2. Frekvensijakaumat

x	luokka - keskus	f	$f\%$	sf	$sf\%$
60 – 64	62	3	$3/24 = 12,5 \%$	3	12,5 %
65 – 69	67	3	$3/24 = 12,5 \%$	$3 + 3 = 6$	25 %
70 – 74	72	9	$9/24 = 37,5 \%$	$6 + 9 = 15$	62,5 %
75 – 79	77	9	$9/24 = 37,5 \%$	$15 + 9 = 24$	100 %
yht.		24			

3. Taulukoidaan summafrekvenssit

maalit	f	sf
12	1	1
9	1	2
8	2	4
7	2	6
6	10	16
5	15	31
4	25	56
yht.	56	

a) $M_o = 4$

$$\frac{56}{2} = 28 \quad \text{ylittyy 5 maalin kohdalla, siis } M_d = 5$$

b) $M_o = 3$

$$\frac{56 + 77}{2} = 66,5 \quad \text{ylittyy 3 maalin kohdalla, siis } M_d = 3$$

c) $M_o = 2$

$$\frac{56 + 77 + 187}{2} = 160 \quad \text{ylittyy 2 maalin kohdalla, siis } M_d = 2$$

4. Keskiarvo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{3 \cdot 15 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 18 + \dots + 3 \cdot 22 + 3 \cdot 25}{27} = \frac{535}{27} \\ &= 19,81 \\ &\approx \underline{\underline{19,8 (\%)}} \end{aligned}$$

Keskihajonta

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{3(15-19,81)^2 + 1 \cdot (16-19,81)^2 + \dots + 3(25-19,81)^2}{27}} \\ &= 2,653\dots \\ &\approx \underline{\underline{2,7 (\%)}}\end{aligned}$$

5. Arvosanat suuruusjärjestyksessä a, b, c, d

$$\text{Mediaani } Md = 6,5 \text{ eli } \frac{b+c}{2} = 6,5$$

Koska moodi = 7 arvosanoja 7 pitää olla vähintään 2.

Koska $Md = 6,5$ arvosanat $c = 7$ ja $d = 7$. Tällöin

$$\frac{b+7}{2} = 6,5 \Leftrightarrow b = 6$$

Keskiarvo $\bar{x} = 6$

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 6$$

$$a+b+c+d = 24$$

$$a+6+7+7 = 24$$

$$a = 4$$

Arvosanat ovat 4,6,7 ja 7.

6. $x = \{1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 6\}$

Keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{8} = \frac{28}{8} = 3,5$$

Hajonta

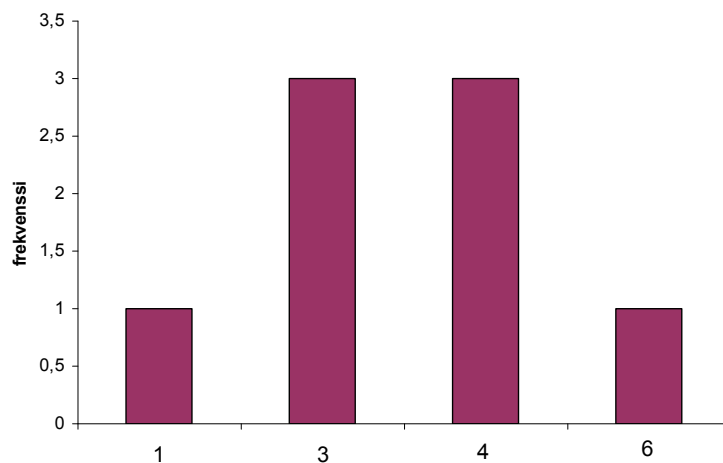
$$\begin{aligned} s_{n-1} &= \sqrt{\frac{1 \cdot (1 - 3,5)^2 + 3(3 - 3,5)^2 + 3(4 - 3,5)^2 + 1 \cdot (6 - 3,5)^2}{8 - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{14}{7}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Varianssi

$$s_{n-1}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$

Vaihteluväli $R = 6 - 1 = 5$

ja $\frac{s_{n-1}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0,28$



$$y = \{2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$$

Keskiarvo

$$\bar{y} = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{8} = \frac{28}{8} = 3,5$$

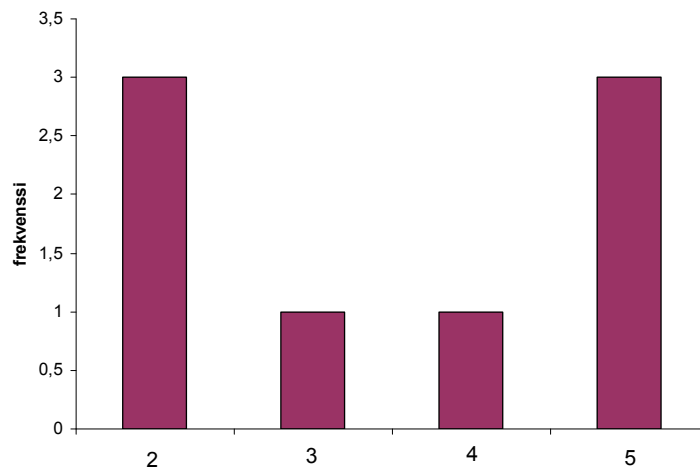
Hajonta

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= \sqrt{\frac{3 \cdot (2 - 3,5)^2 + 1 \cdot (3 - 3,5)^2 + 1 \cdot (4 - 3,5)^2 + 3 \cdot (5 - 3,5)^2}{8 - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Varianssi

$$s_{n-1}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$

$$\text{Vaihteluväli } 5 - 2 = 3 \text{ ja } \frac{s_{n-1}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47$$



Luku $\frac{s_{n-1}}{R}$ kuvaa hajontaa paremmin.

7. Naiset $\bar{x} = 81,1$ vuotta ja $s_x = 4,5$ vuotta

Kilpikonna $\bar{y} = 92$ vuotta ja $s_y = 9,5$ vuotta $y = 140$ vuotta.

Normitetuista arvoista saadaan yhtälö

$$\frac{x - 81,1}{4,5} = \frac{140 - 92}{9,5}$$

$$9,5(x - 81,1) = 4,5 \cdot 48$$

$$9,5x - 770,45 = 216$$

$$9,5x = 986,45$$

$$x = 103,83\dots$$

Ihmisen tulisi olla 104 vuotta.

8. Taulukoidaan luokkakeskukset

inflaatioprosentti	luokkakeskus	f
2,0 – 3,9	$\frac{2,0 + 3,9}{2} = 2,95$	14
4,0 – 5,9	4,95	9
6,0 – 7,9	6,95	3
8,0 – 9,9	8,95	0
10 – 11,9	10,95	2
12 – 13,9	12,95	2
14 – 15,9	14,95	1

$$\text{a) } \bar{x} = \frac{14 \cdot 2,95 + 9 \cdot 4,95 + \dots + 1 \cdot 14,95}{31} = \frac{169,45}{31} = 5,466\dots \approx \underline{\underline{5,47}}$$

b) Keskihajonta

$$\begin{aligned}s_n &= \sqrt{\frac{14 \cdot (2,95 - 5,46)^2 + 9 \cdot (4,95 - 5,46)^2 + \dots + 1 \cdot (14,95 - 5,46)^2}{31}} \\ &= 3,406\dots \\ &\approx \underline{\underline{3,41}}\end{aligned}$$

Vastaus: a) 5,47 % b) 3,41 %

9. Nappuloita yhteensä $2 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 32$ kpl

a) $P(\text{valkoinen kuningatar}) = \frac{1}{\underline{\underline{32}}}$

b) $P(\text{sotilas}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{\underline{\underline{2}}}$

c) $P(\text{ei torni eikä ratsu}) = \frac{32 - 8}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{\underline{\underline{4}}}$

10. Oppilaita yhteensä 35 kpl.

a) $P(\text{vähintään 30 p}) = \frac{12 + 4}{35} = \frac{16}{\underline{\underline{35}}}$

b) $P(\text{alle 40 p}) = \frac{35 - 4}{35} = \frac{31}{\underline{\underline{35}}}$

c) $P(\text{hyväksytty on yli 30 p}) = \frac{12 + 4}{35} = \frac{16}{\underline{\underline{35}}}$

11. Yhteensä joulumusiikkia ja muuta musiikkia on $38 + 22 = 60$ min. Petteri Punakuono kestää 3 min.

$$a) P(\text{joulumusiikkia}) = \frac{38}{60} = \frac{19}{\underline{\underline{30}}}$$

$$b) P(\text{Petteri Punakuono}) = \frac{3}{60} = \frac{1}{\underline{\underline{20}}}$$

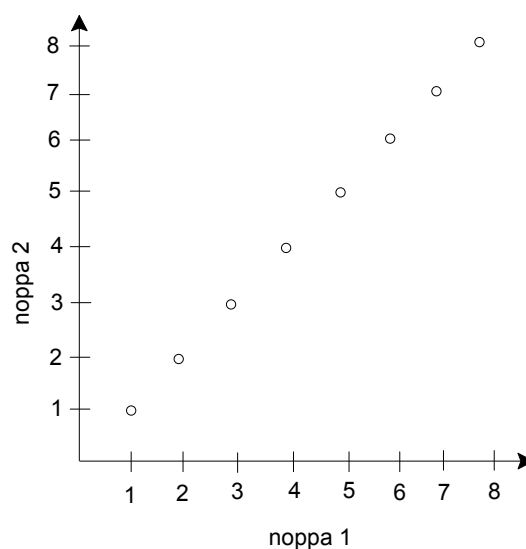
12. Merkitään opiskelijoiden lukumäärää a . Matematiikkaa opiskelee $0,8 \cdot a$ ja pitkää matematiikkaa $0,4 \cdot 0,8 \cdot a = 0,32a$

$$a) P(\text{pitkää matematiikkaa}) = \frac{0,32a}{a} = \underline{\underline{0,32}}$$

$$b) P(\text{lyhyttä matematiikkaa}) = \frac{0,8a - 0,32a}{a} = \frac{0,48a}{a} = \underline{\underline{0,48}}$$

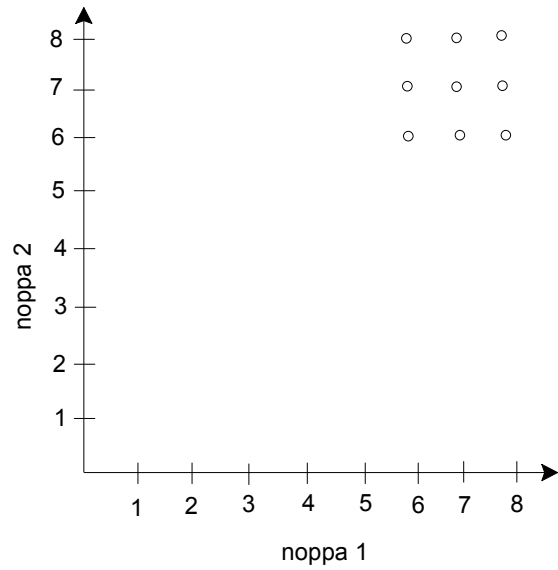
13. a) Molemmilla nopilla saadaan sama silmäluku todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} P(\text{molemmilla sama}) \\ &= \frac{8}{64} \\ &= \frac{1}{\underline{\underline{8}}} \end{aligned}$$

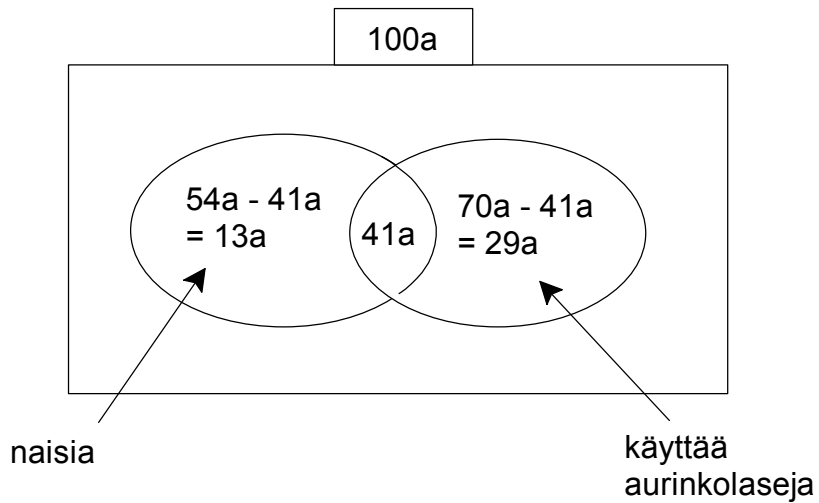


b) Molemmilla ainakin 6

$$P(\text{molemmilla ainakin } 6) = \frac{9}{64}$$



14. Asiakkaita $100a$



Aurinkolaseja käyttäviä miehiä $29a$

$$P(\text{aurinkolaseja käyttävä mies}) = \frac{29a}{100a} = \underline{\underline{0,29}}$$

15. Työntekijöitä $100a$

	juo kahvia	ei juo kahvia
tupakoi	$0,33 \cdot 62a = 20,46a$	$0,18 \cdot 38a = 6,84a$
ei tupakoi	$62a - 20,46a = 41,54a$	$38a - 6,84a = 31,16a$
	$62a$	$100a - 62a = 38a$

$$P(\text{ei tupakoi}) = \frac{41,54a + 31,16a}{100a} = \underline{\underline{0,727}}$$

16. 5 henkilöä: Nea, Leevi, A, B ja C. Luetellaan kaikki parit

NL LA AB BC
NA LB AC
NB LC
NC

$$\text{a) } P(\text{Nea pääsee loppukilpailuun}) = \frac{4}{10} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

$$\text{b) } P(\text{Leevi pääsee, Nea ei}) = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}$$

$$0,5p = \frac{1}{13} \text{ ja } 2p = \frac{4}{13}$$

Satunnaismuuttujan jakauma

x_i	p_i
1	$\frac{1}{13}$
2	$\frac{1}{13}$
3	$\frac{1}{13}$
4	$\frac{1}{13}$
5	$\frac{1}{13}$
6	$\frac{4}{13}$

19. Merkitään x = voittosumma yhdellä kierroksella

Todennäköisyydet

$$P(\text{kuva}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(7, 8, 9 \text{ tai } 10) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

$$P(2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(3, 4, 5, 6) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

x_i	p_i
100	$\frac{3}{13}$
-300	$\frac{4}{13}$
400	$\frac{1}{13}$
-400	$\frac{1}{13}$
0	$\frac{4}{13}$

20. Odotusarvo

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{3}{13} \cdot 100 + \frac{4}{13} (-100) + \frac{1}{13} \cdot 400 + \frac{1}{13} (-400) + \frac{4}{13} \cdot 0 \\ &= \frac{-100}{13} \\ &= \underline{\underline{-7,7 \text{ €}}} \end{aligned}$$

Ei ole reilu peli.

21. Merkitään x = voittosumma. Todennäköisyydet

$$P(\text{päävoitto } 10\,000\text{€}) = \frac{3}{20\,000}$$

$$P(2000 \text{ € voitto}) = \frac{10}{20\,000} = \frac{1}{2000}$$

$$P(100 \text{ € voitto}) = \frac{100}{20\,000} = \frac{1}{200}$$

$$P(\text{ei voittoa}) = \frac{20\,000 - 3 - 10 - 100}{20\,000} = \frac{19887}{20\,000}$$

Ostetaan 1 arpa (5 €)

Satunnaismuuttujan jakauma

x_i	p_i
- 5€	$\frac{19887}{20\ 000}$
100€	$\frac{1}{200}$
2000€	$\frac{1}{2000}$
10 000€	$\frac{3}{20\ 000}$

Odotusarvo voittosummalle

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{19887}{20\ 000} \cdot (-5) + \frac{1}{200} \cdot 100 + \frac{1}{2000} \cdot 2000 \\ &\quad + \frac{3}{20\ 000} \cdot 10\ 000 \\ &= -1,97175 \\ &= \underline{\underline{-1,97\ €}} \end{aligned}$$

22. a) Takki (3 kpl), housut (6 kpl), paita (10 kpl) ja kengät (4kpl) muodostavat erilaisia kokonaisuuksia

$$3 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 4 = \underline{\underline{720}}$$

- b) Sinisiä vaatteita: takki (1 kpl), housut (3 kpl), paita (2 kpl) ja kengät (1 kpl) muodostavat erilaisia kokonaisuuksia

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{6}}$$

23. A, B, C, D, E, F, G eli 7 ryhmää

Erilaisia järjestyksiä $7! = 5040$

$$\begin{aligned} P(\text{ryhmät aakkosjärjestyksessä}) &= \frac{1}{5040} \\ &= 0,000198 \\ &\approx \underline{\underline{0,00020}} \end{aligned}$$

24. Erilaisia järjestyksiä on $5! = 120$

$$P(\text{pituusjärjestys}) = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \approx \underline{\underline{0,017}}$$

25. Ada (48p), Bertta (46p) ja Caijus (41p). Lahjakortit 200€, 150€ ja 100€. Kymmenen parasta voidaan laittaa

$10! = 3\,628\,800$ järjestykseen

Suotuisissa järjestyksissä oltava

- Ada ensimmäisenä
- Bertta toisena
- Caijus kolmantena
- loput miss järjestyksessä tahansa

$$\begin{aligned} P(\text{kolme parasta oikeassa järjestyksessä}) &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7!}{10!} \\ &= \frac{7!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} \\ &= \frac{1}{720} \approx \underline{\underline{0,0014}} \end{aligned}$$

26. Poikia (2kpl) ja tyttöjä (3 kpl) yhteensä 5 kpl.

a) Erilaisia jonoja $5! = 120$ kpl

b) Pojat ensin – jonoja $2! \cdot 3! = 12$ kpl

c) Järjestetään lapset jonoon ja kaksi ensimmäistä pääsee kielikurssille

$$\underbrace{2!}_{\text{kaksi vanhinta}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{muut}} = 12$$

erilaista jonoa, joissa ensimmäisenä kaksi vanhinta

$$P(\text{kaksi vanhinta kielikurssille}) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = \underline{\underline{0,1}}$$

27. 10 jäsenestä 3 on naisia ja 7 miehiä. Muodostetaan 4 henkilön ryhmiä

a) Erilaisia ryhmiä $\binom{10}{4} = 210$ kpl

b) Kaikki naiset mukana. Mies voidaan valita 7 tavalla, naiset yhdellä

$$\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{1} = 7 \text{ kpl}$$

28. 22 tomaatin joukossa on 17 tuoretta ja 15 pilaantunutta. Nostetaan 5 tomaattia.

$$\text{a) } P(\text{kaikki tuoreita}) = \frac{\binom{17}{5}}{\binom{22}{5}} = \frac{6188}{26334} \approx \underline{\underline{0,23}}$$

$$\text{b) } P(1 \text{ tuore}) = \frac{\binom{17}{1} \binom{15}{4}}{\binom{22}{5}} = \frac{17 \cdot 5}{26334} \approx \underline{\underline{0,0032}}$$

29. Erilaiset kädet $\binom{52}{13}$ kpl

Kaikki samaa maata olevat kädet 4 kpl

$$P(\text{kaikki samaa maata}) = \frac{4}{\binom{52}{13}} = \underline{\underline{6,3 \cdot 10^{-12}}}$$

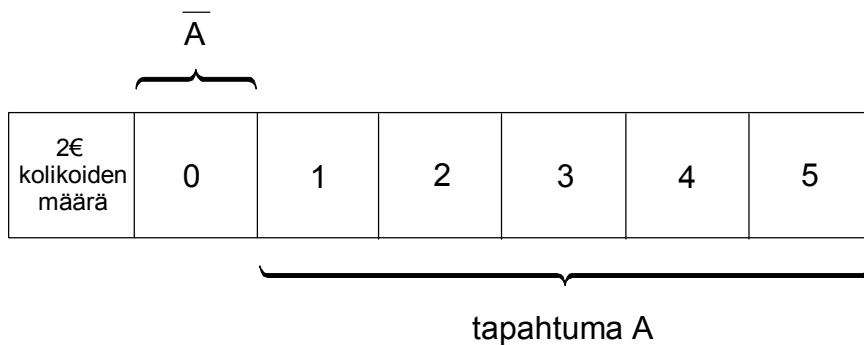
30. 48 numeron joukosta arvotaan 6 oikeaa numeroa ja kaksi lisännumeroa.

$$\text{a) } P(4 \text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{4} \binom{42}{2}}{\binom{48}{6}} = \frac{15 \cdot 861}{12271512} \approx \underline{\underline{0,0011}}$$

$$b) P(5 + 1 \text{ lisä}) = \frac{\binom{6}{4} \binom{2}{1}}{\binom{48}{6}} = \frac{6 \cdot 2}{12271512} = \underline{\underline{9,8 \cdot 10^{-7}}}$$

31. 20 kolikon joukossa on 8 kpl 1€ ja 12 kpl 2€ kolikoita.

a) A = ainakin yksi 2€ kolikko



\overline{A} = ei yhtään 2€ kolikkoa = kaikki ovat 1€ kolikoita

$$P(\overline{A}) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{4}{16} = \frac{6720}{1\,860\,480} = 0,003611\dots$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,003611\dots = 0,99638\dots \approx \underline{\underline{0,996}}$$

b) A = korkeintaan 4 2€ kolikkoa

2€ kolikoiden määrä	0	1	2	3	4	5
---------------------------	---	---	---	---	---	---

tapahtuma A

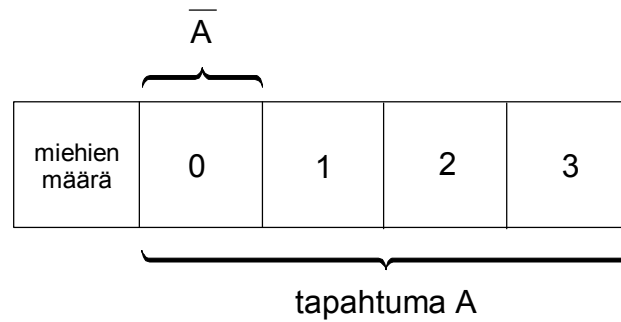
\overline{A}

\overline{A} = kaikki 5 ovat 2€ kolikkoja

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \\ &= \frac{95040}{1\,860\,480} \\ &= 0,05108... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - 0,05108... \\ &= 0,94891... \\ &\approx \underline{\underline{0,949}} \end{aligned}$$

32. 11 henkilöstä 6 on naisia ja 5 miehiä. Merkitään A = ainakin yksi on mies.



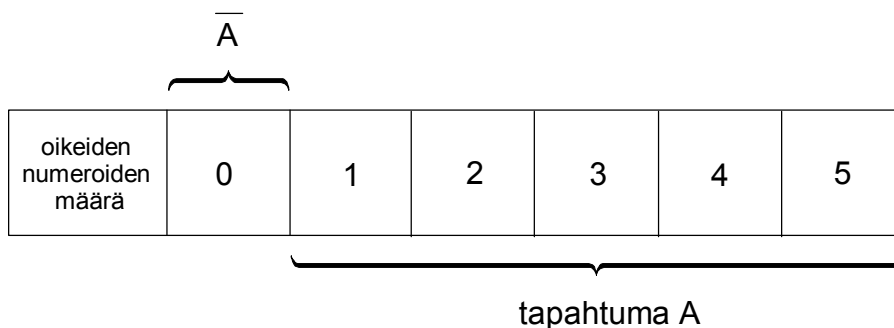
\bar{A} = ei yhtään miestä = kaikki ovat naisia

$$P(\bar{A}) = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$$

$$= \frac{120}{990} = \frac{4}{33}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33} = 0,878... \approx \underline{\underline{0,88}}$$

33. Merkitään A = ainakin yksi oikein.



\bar{A} = ei yhtään oikein = kaikki väärin

$$P(\bar{A}) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \cdot \frac{42}{47} \cdot \frac{41}{46}$$
$$= 0,5766\dots$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$
$$= 1 - 0,5766\dots$$
$$= 0,4233\dots$$
$$\approx \underline{\underline{0,42}}$$

34. Suoritetaan 5 nostoa. Todennäköisyys

$$P(\text{ainakin kerran 4 herttaa})$$
$$= 1 - P(\text{ei kertaakaan 4 herttaa})$$
$$= 1 - P \left(\begin{array}{l} 1. \text{ kerralla kaikki ei herttoja ja} \\ 2. \text{ kerralla kaikki ei herttoja ja} \\ \vdots \\ 5. \text{ kerralla kaikki ei herttoja} \end{array} \right)$$
$$= 1 - P(\text{kaikki 4 ei herttoja})^5$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \right)^5$$
$$= 1 - 0,9973\dots^5$$
$$\approx \underline{\underline{0,013}}$$

35. Ryhmässä 15 tyttöä ja x poikaa. Valitaan 2 henkilöä.

$$P(\text{molemmat tyttöjä}) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{15}{15+x} \cdot \frac{14}{14+x} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{210}{(15+x)(14+x)} = \frac{1}{6}$$

$$(15+x)(14+x) = 1260$$

$$210 + 15x + 14x + x^2 = 1260$$

$$x^2 + 29x - 1050 = 0$$

$$x = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1050)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-29 \pm 71}{2}$$

$$x = 21$$

Ryhmässä on 21 poikaa.

36. a) $P(\text{kaikilla 1}) = P(\text{kahdella heitolla 1}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{\underline{\underline{36}}}$

b) $P(\text{vain 4 ykköstä}) = P(\text{kahdella heitolla muu kuin 1})$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{\underline{\underline{36}}}$$

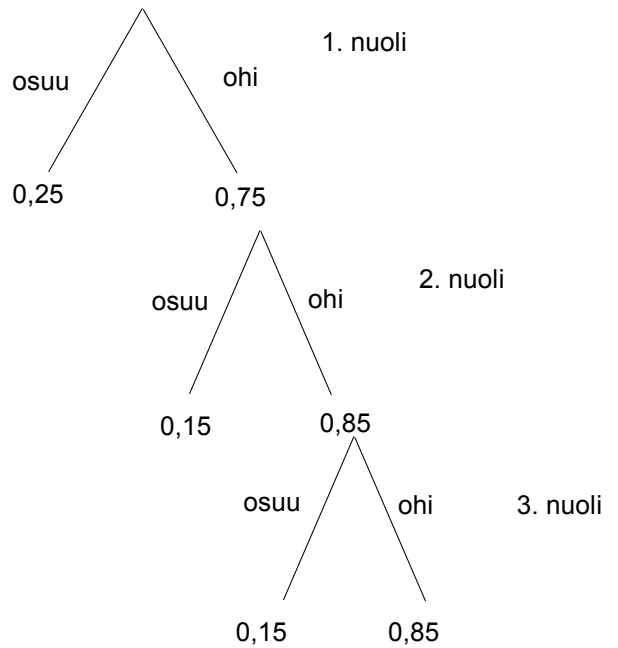
37. Todennäköisyydet

$$P(\text{kymppi}) = 0,25$$

$$P(\text{edellinen ohi ja seuraava 10}) \\ = 0,15$$

Ammutaan 3 nuolta

$$P(\text{ei yhtään 10}) \\ = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \\ \approx \underline{\underline{0,54}}$$



38. Todennäköisyys

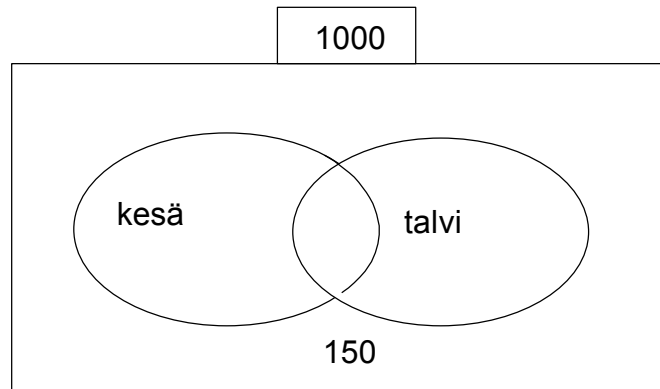
$P(\text{kaksi parasta osallistujaa loppuottelussa})$

osallistujia	kierros	pelipareja	pareja joissa ei ole 2 parasta
32	1	31 (paras ja 31 vaihtoehtoja)	30
16	2	15 (paras ja 15 vaihtoehtoja)	14
8	3	7	6
4	4	3	2
2	loppuottelu		

$P(\text{eivät kohtaa 1. eikä 2. eikä 3. eikä 4. kierroksella})$

$$= \frac{30}{31} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \\ = \frac{16}{31} \approx \underline{\underline{0,52}}$$

39. Venn-diagrammi



A = lomailee kesällä

B = lomailee talvella

$$\text{a) } P(A \text{ tai } B) = \frac{1000 - 150}{1000} = \frac{850}{1000} = \frac{17}{20}$$

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ tai } B)$$

$$= \frac{650}{1000} + \frac{300}{1000} - \frac{17}{20}$$

$$= \frac{1}{10}$$

b) $P(\text{joko kesällä tai talvella, mutta ei molempina})$

$$= P(A \text{ tai } B) - P(A \text{ ja } B)$$

$$= \frac{17}{20} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{3}{4}$$

40. 12 korvakorun joukossa on 4 kultaista, 5 hopeista ja 3 pronssista korvakorua. Nostetaan umpimähkään kaksi.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{kaksi hopeista}) &= P(1. \text{ hopeinen}) \cdot P(2. \text{ hopeinen}) \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \\ &= \frac{5}{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{samaa ainetta}) &= P(1. \text{ ja } 2. \text{ kultaa}) + P(1. \text{ ja } 2. \text{ hopeaa}) + P(1. \text{ ja } 2. \text{ pronssia}) \\ &= \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \\ &= \frac{19}{66} \\ &\approx \underline{\underline{0,29}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 41. \text{ a) } P(1 \text{ matkustaja, jolla luvattomia tavaroita}) &= P(1. \text{ luvattomia}) + P(2. \text{ luvattomia}) + P(3. \text{ luvattomia}) \\ &\quad + P(4. \text{ luvattomia}) \\ &= \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} \cdot \frac{43}{47} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{44}{48} \cdot \frac{43}{47} + \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{43}{47} \\ &\quad + \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \cdot \frac{5}{47} \\ &= 4 \cdot \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} \cdot \frac{43}{47} \\ &= 0,30807... \\ &\approx \underline{\underline{0,308}} \end{aligned}$$

b) Kaksi matkustajaa 4:stä voidaan valita $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla

$$= 6 \cdot \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47}$$

$$= 0,04298\dots$$

$$\approx \underline{\underline{0,0430}}$$

42. Todennäköisyydet

$$P(\text{A voittaa}) = \frac{1}{3} \quad \text{1. voitto}$$

$$P(\text{B voittaa}) = \frac{1}{3} \quad \text{2. voittoa}$$

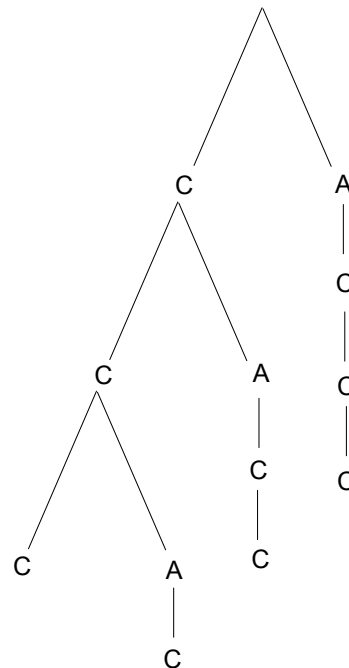
$$P(\text{C voittaa}) = \frac{1}{3} \quad \text{3. voittoa}$$

$P(\text{C voittaa koko pelin})$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3$$

$$= 0,07407$$

$$\approx \underline{\underline{0,074}}$$



43. Numerot 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9. Viisi nostoa

$$P(7) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$P(\text{ei } 7) = 0,6$$

$$\begin{aligned} P(\text{täsmälleen 2 seiskaa}) &= \binom{5}{2} 0,4^2 \cdot 0,6^3 \\ &= 0,3456 \\ &\approx \underline{\underline{0,35}} \end{aligned}$$

44. Valitaan umpimähkään 8 henkilön ryhmä.

$$P(\text{punavihersokea}) = 0,08$$

$$P(\text{ei punavihersokea}) = 0,92$$

$$\text{a) } P(3 \text{ pv - sokeaa}) = \binom{8}{3} 0,08^3 \cdot 0,92^5 \approx \underline{\underline{0,92}}$$

$$\text{b) } P(\text{korkeintaan 1 pv - sokea})$$

$$= P(0 \text{ tai } 1 \text{ pv - sokeaa})$$

$$= 0,92^8 + \binom{8}{1} 0,08 \cdot 0,92^7$$

$$\approx \underline{\underline{0,87}}$$

$$\text{c) } P(\text{vähintään 7 pv - sokeaa}) = P(7 \text{ tai } 8 \text{ pv - sokeaa})$$

$$= \binom{8}{7} 0,08^7 \cdot 0,92 + 0,08^8$$

$$\approx \underline{\underline{1,6 \cdot 10^{-7}}}$$

45. 10 hevosesta 3 on valkoisia, 2 mustia ja 5 ruskeita.

a) $P(\text{molemmat samanvärisiä})$

$$= P(\text{molemmat valk. tai mol. mustia tai mol. ruskeita})$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$$

$$= \frac{28}{90}$$

$$= \frac{14}{45} \approx \underline{\underline{0,311}}$$

b) Viisi päivää

$P(\text{kahtena päivänä samanväriset})$

$$= \binom{5}{2} \left(\frac{14}{45}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{14}{45}\right)^3$$

$$\approx \underline{\underline{0,316}}$$

46. Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(10 ; 0,65)$

$$\text{a) } P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,65^3 \cdot 0,35^7 \approx \underline{\underline{0,021}}$$

$$\text{b) } P(X \geq 8) = P(X = 8 \text{ tai } X = 9 \text{ tai } X = 10) \\ = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= \binom{10}{8} 0,65^8 \cdot 0,35^2 + \binom{10}{9} 0,65^9 \cdot 0,35 + 0,65^{10}$$

$$\approx \underline{\underline{0,26}}$$

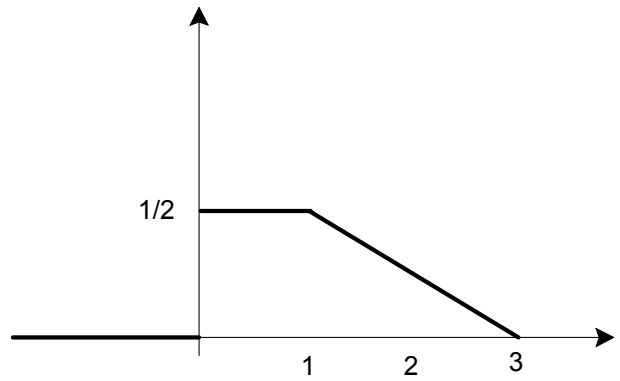
$$\text{c) } E(X) = np = 10 \cdot 0,65 = \underline{\underline{6,5}}$$

47. Funktion $f(x)$ kuvaaja

1. Funktio $f(x) \geq 0$

2. Tarkastellaan pinta – alaa

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2} = 1$$



$f(x)$ on edellisten perusteella tiheysfunktio.

48. a) $f(x) = \begin{cases} -8x + 4, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{muualla} \end{cases}$

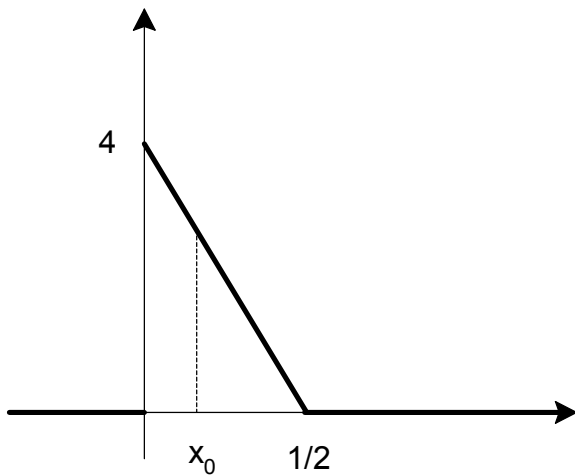
Funktion $f(x)$ kuvaaja

Kun $x < 0$, on $F(x) = 0$

Kun $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4 + f(x)}{2} \cdot x \\ &= \frac{4 - 8x + 4}{2} \cdot x \\ &= (4 - 4x)x \\ &= -4x^2 + 4x \end{aligned}$$

Kun $x > \frac{1}{2}$, on $F(x) = 1$



Edellisten kohtien perusteella kertymäfunktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ -4x^2 + 4x, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{5}\right) &= F\left(\frac{1}{5}\right) - F(0) \\ &= -4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{5} - 0 \\ &= \frac{16}{25} \\ &= \underline{\underline{0,64}} \end{aligned}$$

49. Satunnaismuuttuja $X \sim N(0,1)$

$$\text{a) } P(X \leq 1,6) = \Phi(1,6) = \underline{\underline{0,9452}}$$

$$\text{b) } P(X \geq 0,35) = 1 - \Phi(0,35) = 1 - 0,6368 = \underline{\underline{0,3632}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(-0,4 \leq X \leq 1,1) &= \Phi(1,1) - \Phi(-0,4) \\ &= \Phi(1,1) - (1 - \Phi(0,4)) \\ &= 0,8643 - (1 - 0,6554) \\ &= 0,8643 - 1 + 0,6554 \\ &= \underline{\underline{0,5197}} \end{aligned}$$

50. Merkitään $X =$ lampun kestoikä. $X \sim N(1100, 180)$

$$z = \frac{a - 1100}{180}$$

$$P(X > a) = 0,95$$

$$P\left(z > \frac{a - 1100}{180}\right) = 0,95$$

$$P\left(z < -\frac{a - 1100}{180}\right) = 0,95$$

$$\Phi\left(-\frac{a - 1100}{180}\right) = 0,95$$

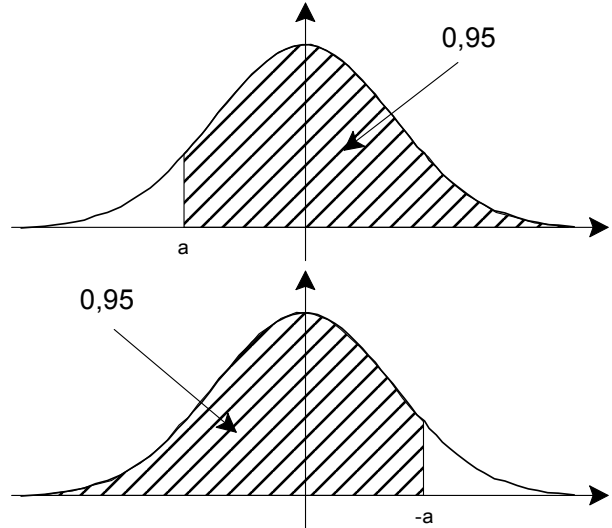
$$\Phi(1,6449) = 0,95$$

$$-\frac{a - 1100}{180} = 1,6449$$

$$a - 1100 = -296,082$$

$$a = 803,918\dots$$

$$a \approx \underline{\underline{804}} \text{ (h)}$$



51. Merkitään $X =$ junamatkan kesto. $X \sim N(3,25 ; \sigma)$.

$$3\text{h } 15\text{min} = 3,25 \text{ h}$$

$$z = \frac{4,5 - 3,25}{\sigma} = \frac{1,25}{\sigma}$$

$$P(X \leq 4,5) = 0,98$$

$$P\left(z \leq \frac{1,25}{\sigma}\right) = 0,98$$

$$\Phi\left(\frac{1,25}{\sigma}\right) = 0,98$$

$$\Phi(2,05) = 0,9798$$

$$\frac{1,25}{\sigma} = 2,05$$

$$2,05\sigma = 1,25$$

$$\sigma = 0,6097... \text{ (h)}$$

$$0,6097... \text{ h} = 36,585... \text{ min}$$

$$\approx \underline{\underline{37 \text{ min}}}$$

52. Merkitään $X =$ tulitikkujen määrä. $X \sim N(\bar{x}, 4)$.

$$P(X \geq 47) = \frac{11}{100}$$

$$P\left(z \geq \frac{47 - \bar{x}}{4}\right) = 0,11$$

$$\Phi\left(\frac{47 - \bar{x}}{4}\right) = 0,89$$

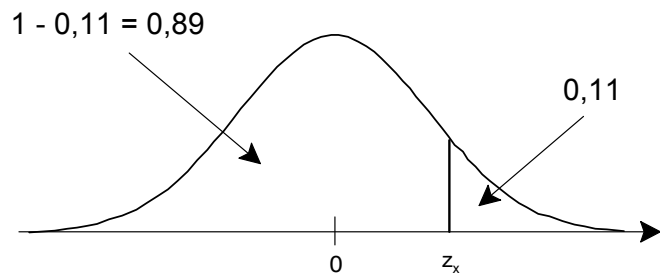
$$\Phi(1,23) \approx 0,89$$

$$\frac{47 - \bar{x}}{4} = 1,23$$

$$47 - \bar{x} = 4,92$$

$$\bar{x} = 42,08$$

$$\bar{x} \approx \underline{\underline{42 \text{ tulitikkua}}}$$



53. Keskiarvot $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 72$ ja hajonnat $\sigma_A = 9,2$ ja $\sigma_B = 6,8$.

$$x_A = 82 \quad x_B = 80$$

$$z_A = \frac{82 - 72}{9,2} \approx 1,09$$

$$z_B = \frac{80 - 72}{6,8} \approx 1,18$$

$$z_B > z_A$$

Bertta menestyi paremmin.

$\Phi(1,18) = 0,8810 \approx 88,1\%$ keskiarvoa paremmin, mutta Berttaa huonommin $88,1\% - 50\% = 38,1\%$.

Alina: $\Phi(1,09) = 0,8621 \approx 86,2\%$

$$\begin{aligned} P(\text{pistemäärä} > 82) &= P(z > 1,09) \\ &= 1 - P(z \leq 1,09) \\ &= 1 - \Phi(1,09) \\ &\approx 1 - 0,8621 \\ &\approx 0,1379 \\ &\approx \underline{\underline{13,8\%}} \end{aligned}$$

Testi 1

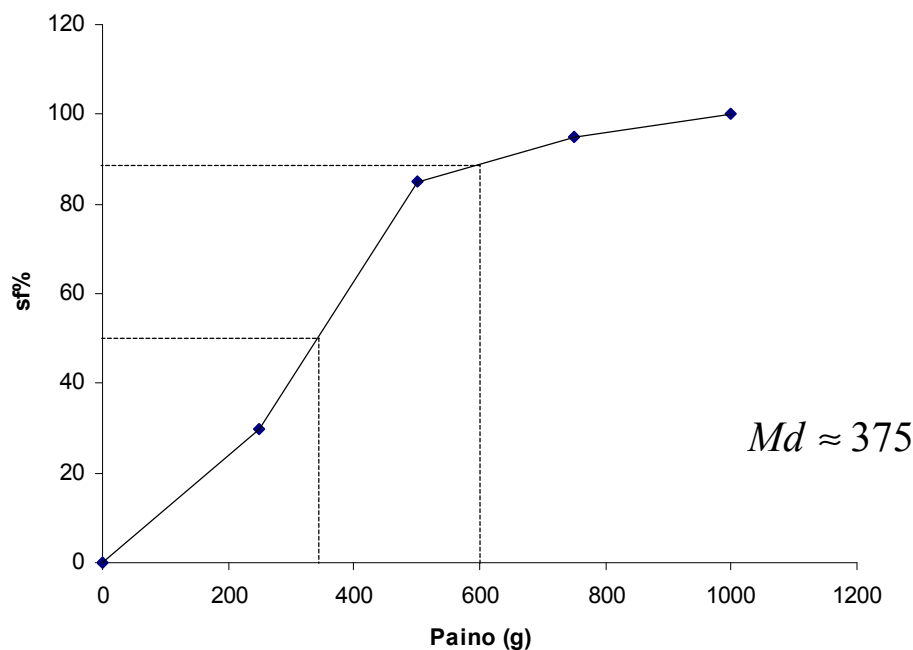
1. Taulukoidaan luokkakeskukset, summafrequenssit sekä suhteelliset summafrequenssit

Kalan paino (g)	f	luokkakeskus	sf	$sf\%$
0 – 249	24	$\frac{0 + 249,5}{2} = 124,75$	24	$\frac{24}{80} = 0,3 = 30\%$
250 – 499	44	$\frac{250 + 499}{2} = 375,5$	$24 + 44 = 68$	$\frac{68}{80} = 0,85 = 85\%$
500 – 749	8	$\frac{500 + 749}{2} = 624,5$	$68 + 8 = 76$	$\frac{76}{80} = 0,95 = 95\%$
750 – 999	4	$\frac{750 + 999}{2} = 874,5$	$76 + 4 = 80$	100 %
yht.	80			

a) Keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{24 \cdot 124,75 + 44 \cdot 375,5 + 8 \cdot 624,5 + 4 \cdot 874,5}{80} = 350,125$$
$$\approx \underline{\underline{350 \text{ (g)}}}$$

b) Kertymäkuvaaja

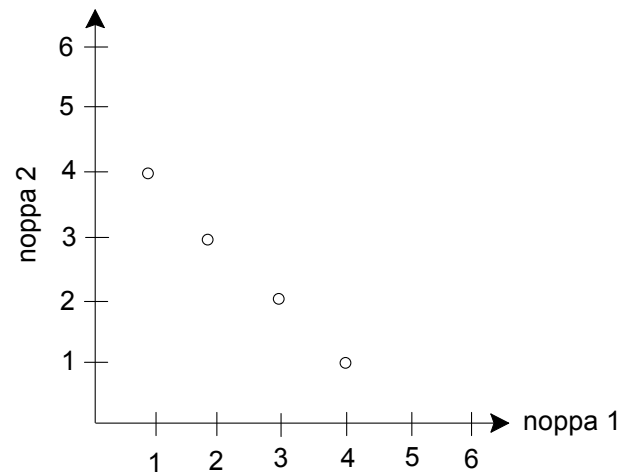


c) Kuvaajalta

$$P(\text{alle } 600 \text{ g}) \approx 90\% = \underline{\underline{0,90}}$$

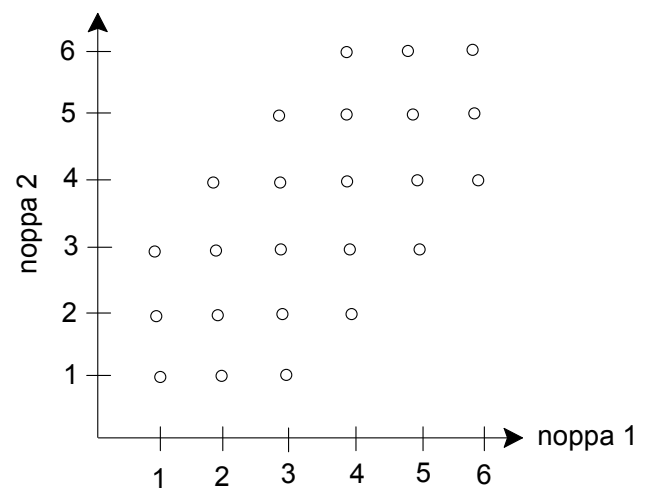
2. a) Noppien pistelukujen summa on 5

$$P(\text{summa} = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{\underline{\underline{9}}}$$



b) Pisteluvut eroavat toisistaan korkeintaan kahdella

$$\begin{aligned} P(\text{eroavat kork. kahdella}) \\ &= \frac{24}{36} \\ &= \frac{2}{\underline{\underline{3}}} \end{aligned}$$



c) Suoran tulisi kulkea pisteen (1,3) kautta. Tällöin suoran yhtälö

$$ax + by - 9 = 0$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 3 - 9 = 0$$

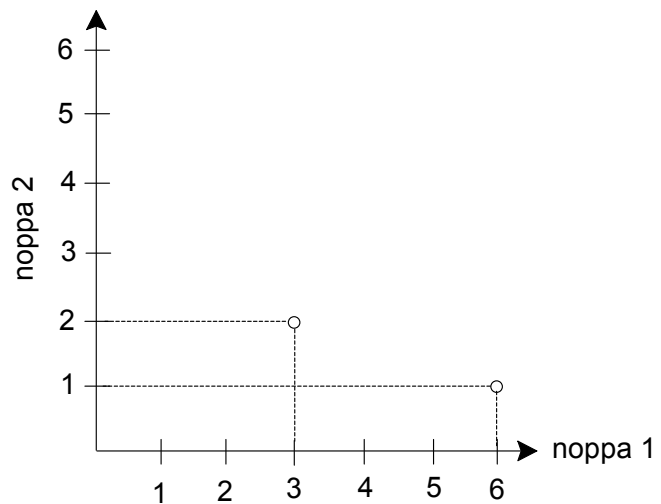
$$a + 3b - 9 = 0$$

Lasketun lausekkeen arvo parametrien a ja b arvoilla

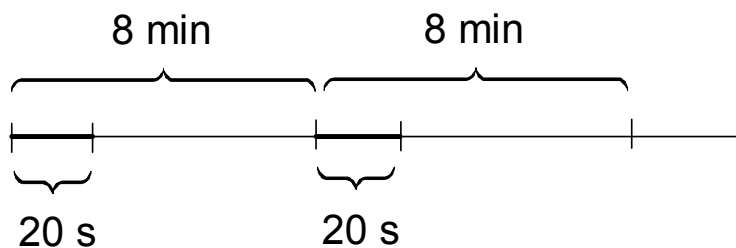
$$P(\text{kulkee } (1,3) \text{ kautta})$$

$$= \frac{2}{36}$$

$$= \frac{1}{18}$$



3. a) Geometrinen todennäköisyys



$$P(\text{pääsee ilman odotusta}) = \frac{20 \text{ s}}{8 \cdot 60 \text{ s}} = \frac{1}{24}$$

b) Geometrinen todennäköisyys

$$R = \frac{50 \text{ cm}}{2} = 25 \text{ cm}$$

$$r = 5$$

$P(\text{tikka on yli } 5 \text{ cm päässä keskustasta})$

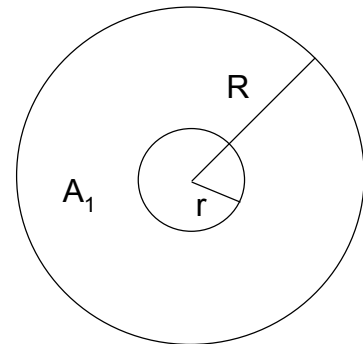
$$= \frac{A_1}{A_{\text{ympyrä}}}$$

$$= \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{25}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{25}$$

$$= \underline{\underline{\frac{24}{25}}}$$



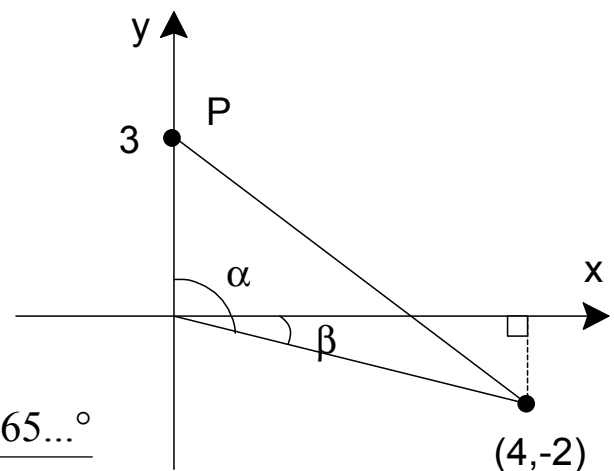
c) Suotuisa kulma $\alpha = 90^\circ + \beta$

$$\tan \beta = \frac{2}{4}$$

$$\beta = 26,565\dots^\circ$$

$$P(\text{osuu janaan AB}) = \frac{90^\circ + 26,565\dots^\circ}{360^\circ}$$

$$\approx \underline{\underline{0,32}}$$



4. Todennäköisyydet

$$P(\text{kaato}) = 0,95$$

$$P(\text{ei kaatoa}) = 0,05$$

$$\text{a) } P(4 \text{ kaatoa ja } 5. \text{ ei kaato}) = 0,95^4 \cdot 0,05 \approx \underline{\underline{0,041}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(5 \text{ heitolla ainakin } 1 \text{ kaato}) &= 1 - P(\text{ei yhtään kaatoa}) \\ &= 1 - 0,05^5 \\ &\approx \underline{\underline{0,99999969}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(10 \text{ heitosta ainakin } 8 \text{ kaatoa}) \\ &= P(8 \text{ kaatoa}) + P(9 \text{ kaatoa}) + P(10 \text{ kaatoa}) \\ &= \binom{10}{8} 0,95^8 \cdot 0,05^2 + \binom{10}{9} 0,95^9 \cdot 0,05 + 0,95^{10} \\ &\approx \underline{\underline{0,988}} \end{aligned}$$

5. Akvaariosta 6 uroskalan ja 4 naaraskalan joukosta valitaan 3 kalaa. Merkitään x = uroskalojen lukumäärä.

x_i	p_i
0	$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$
1	$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$
2	$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$
3	$\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

Odotusarvo

$$E(x) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{1,8}}$$

Keskihajonta

$$\begin{aligned} D(x) &= \sqrt{\frac{1}{30}(0-1,8)^2 + \frac{3}{10}(1-1,8)^2 + \frac{1}{2}(2-1,8)^2 + \frac{1}{6}(3-1,8)^2} \\ &= \sqrt{0,56} \approx \underline{\underline{0,75}} \end{aligned}$$

6. Vikaantumistodennäköisyydet ja ei – vikaantumistodennäköisyydet

$$P_A = 0,01 \quad P_{\bar{A}} = 0,99$$

$$P_B = 0,007 \quad P_{\bar{B}} = 0,993$$

$$P_C = 0,05 \quad P_{\bar{C}} = 0,95$$

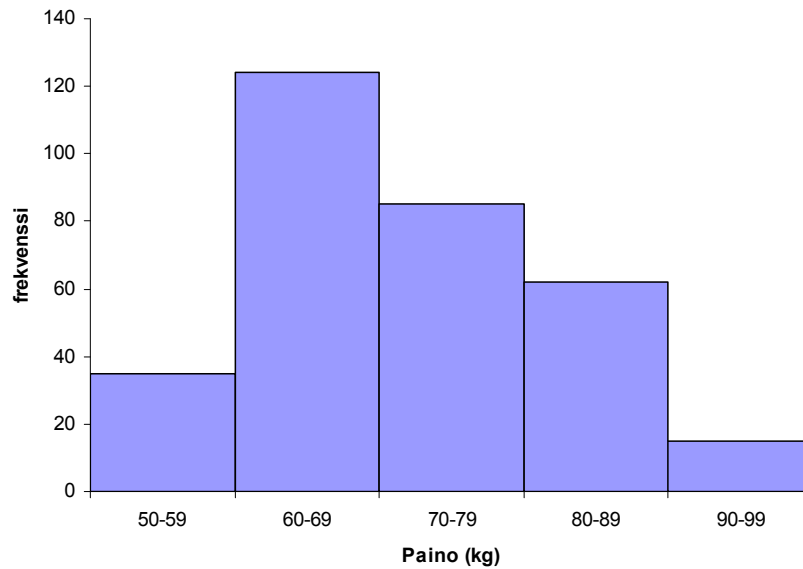
$$\begin{aligned} P(\text{laite ei toimi}) &= P(\text{ainakin 1 komponentti hajoaa}) \\ &= 1 - P(\text{yksikään ei hajoa}) \\ &= 1 - 0,99 \cdot 0,993 \cdot 0,95 \\ &\approx \underline{\underline{0,066}} \end{aligned}$$

2 rinnakkaista komponenttia C

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin 1 hajoaa}) \\ &= 1 - P(\text{A ja B ehjiä ja ainakin toinen C pysyy ehjänä}) \\ &= 1 - 0,99 \cdot 0,993 \cdot (1 - P(\text{molemmat C : t hajoaa})) \\ &= 1 - 0,99 \cdot 0,993 \cdot (1 - 0,05^2) \\ &\approx \underline{\underline{0,019}} \end{aligned}$$

Testi 2

1. a) Frekvensijakauman kuvaaja



b) Moodiluokka 60 – 69 (kg)

$$Mo = \frac{60 + 69}{2} = 64,5 \text{ (kg)}$$

Opiskelijoita yhteensä 321 kpl

	<i>sf %</i>
50 – 59	$\frac{35}{321} \approx 10,5\%$
60 – 69	$\frac{35+124}{321} \approx 49,5\%$
70 – 79	$\frac{35+124+85}{321} \approx 76,0\%$
80 – 89	$\frac{35+124+85+62}{321} \approx 95,3\%$
90 – 99	100 %

Mediaaniluokka 70 – 70 (kg)

$$Md = \frac{70 + 79}{2} = 74,5 \text{ (kg)}$$

$$\text{c) } P(\text{painaa alle 70 kg}) = \frac{35 + 124}{321} \approx \underline{\underline{0,495}}$$

2. a) Erilaisia 10 opiskelijan jonoja $10! = 3\,628\,800$

$$\begin{aligned} 3\,628\,800 \text{ s} &= 60\,480 \text{ min} \\ &= 1008 \text{ h} \\ &= 42 \text{ d} \end{aligned}$$

b) $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$

c) $\binom{15}{10} = 3003$

3. a) Mustia ässiä 2 kpl
Punaisia kolmosia 2 kpl
Ruutujätkiä 1 kpl

Ennen uuden kortin saantia pakassa on kortteja $52 - 4 = 48$ kpl

- pakassa ässiä 2 kpl
- pakassa jätkiä 4 kpl

yht. suotuisia kortteja 6 kpl

$$P(\text{saa ässän tai jätkän}) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

b) Poutapäiviä 92 % = 0,92
ei poutapäiviä (= sataa) $1 - 0,92 = 0,08$

$$\begin{aligned} &P(\text{sataa korkeintaan kahtena päivänä}) \\ &= P(\text{sadepäiviä } 0 \text{ tai } 1 \text{ tai } 2) \\ &= 0,92^7 + 7 \cdot 0,08 \cdot 0,92^6 + \binom{7}{2} 0,08^2 \cdot 0,92^5 \\ &= 0,9859\dots \\ &\approx \underline{\underline{0,986}} \end{aligned}$$

4. Satunnaismuuttujalle $X \sim \text{Bin}(15 ; 0,73)$

$$n = 15$$

$$p = 0,73$$

$$q = 1 - 0,73 = 0,27$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 2) &= P(X = 0 \text{ tai } X = 1) \\ &= 0,27^{15} + 15 \cdot 0,73 \cdot 0,27^{14} \\ &= 1,2276\dots \cdot 10^{-7} \\ &\approx \underline{\underline{1,23 \cdot 10^{-7}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - 1,2276... \cdot 10^{-7} \\
&= 0,999999877... \\
&\approx \underline{\underline{0,99999988}}
\end{aligned}$$

$$\text{c) } E(X) = np = 15 \cdot 0,73 = \underline{\underline{10,95}}$$

$$\text{d) } D(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{15 \cdot 0,73 \cdot 0,27} = 1,719... \approx \underline{\underline{1,72}}$$

5. Merkitään $X =$ laitteen kestoikä, $X \sim N(5,5 ; 2,8)$

$$\begin{aligned}
\text{a) } P(X > 8) &= 1 - P(X \leq 8) \\
&= 1 - P\left(z \leq \frac{8 - 5,5}{2,8}\right) \\
&\approx 1 - P(z \leq 0,89) \\
&= 1 - \Phi(0,89) \\
&= 1 - 0,8133 \\
&= 0,1867 \\
&\approx \underline{\underline{0,19}}
\end{aligned}$$

b) Takuuaika = a ja $z_a = \frac{a - 5,5}{2,8}$

$$P(X < a) = 0,05$$

$$P(z < z_a) = 0,05$$

$$P(z < -z_a) = 0,95$$

$$\Phi(-z_a) = 0,95$$

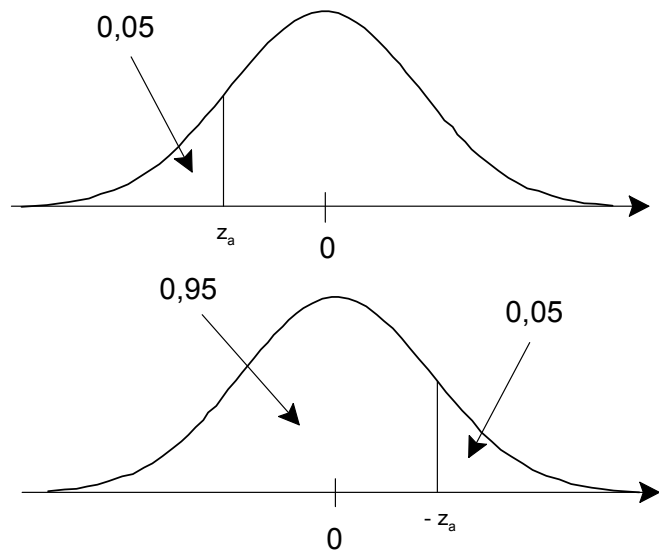
$$-z_a = 1,6449$$

$$z_a = -1,6449$$

$$\frac{a - 5,5}{2,8} = -1,6449$$

$$a - 5,5 = -4,60572$$

$$a = 0,89428 \text{ vuotta} = 10,73136 \text{ kk}$$

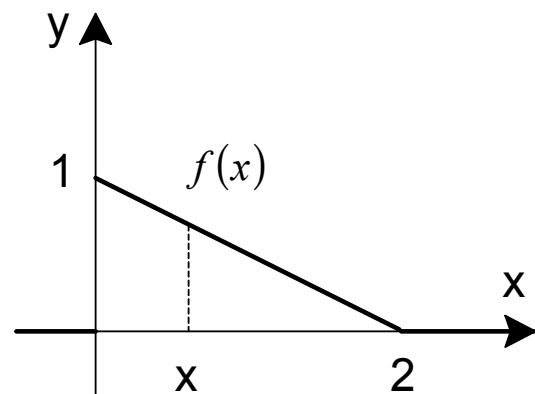


Vastaus: Korkeintaan 10 kk

6. a) Tiheysfunktion kuvaaja

- Kun $x < 0$ niin $F(x) = 0$
- Kun $0 \leq x \leq 2$:

Puolisuunnikkaan ala



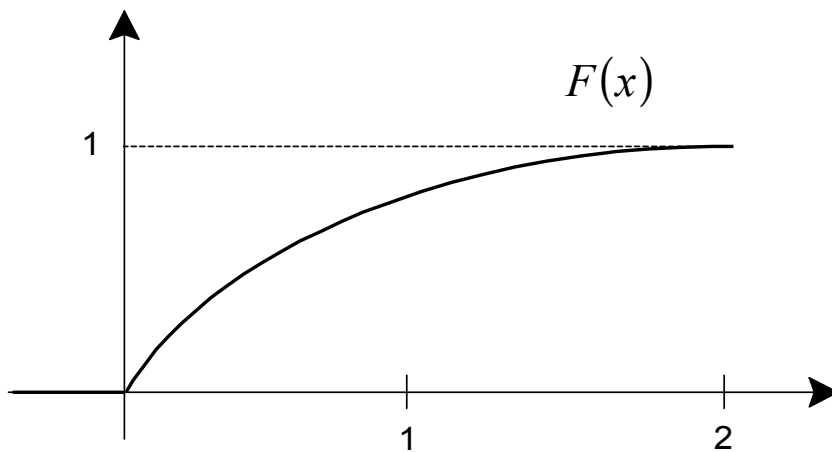
$$\frac{1 + f(x)}{2} \cdot x = \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{2}x\right)}{2} \cdot x = x - \frac{1}{4}x^2$$

- Kun $x > 2$ niin $F(x) = 1$

Kertymäfunktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2, & \text{kun } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

Kertymäfunktion kuvaaja



$$\begin{aligned} \text{b) } P\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}\right) &= F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{11}{64} \\ &\approx \underline{\underline{0,17}} \end{aligned}$$