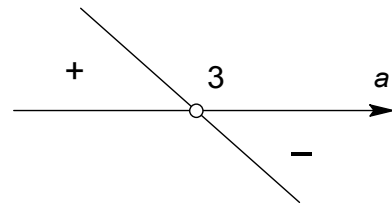


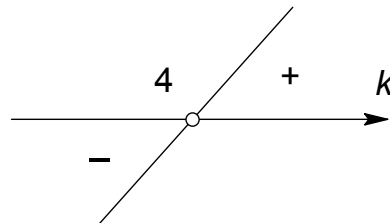
$$\begin{aligned}
 1. \quad a) \quad |1 - \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2})| &= |1 - \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2}| \\
 &= \underbrace{|-2 - 2\sqrt{2}|}_{<0} \\
 &= -(-2 - 2\sqrt{2}) \\
 &= \underline{\underline{2 + 2\sqrt{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad |a + 2 - (2a - 1)| &= |a + 2 - 2a + 1| \\
 &= |-a + 3| \\
 &= \begin{cases} -a + 3, & a \leq 3 \\ a - 3, & a > 3 \end{cases} \\
 &= \underline{\underline{\begin{cases} -a + 3, & a \leq 3 \\ a - 3, & a > 3 \end{cases}}}
 \end{aligned}$$

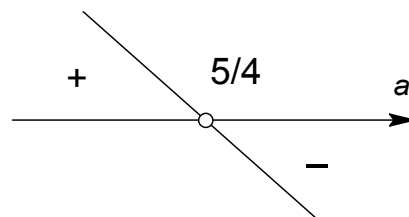


$$2. \quad a) \quad |2 - \sqrt{3}| = \underline{\underline{2 - \sqrt{3}}}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad |k - 4| &= \begin{cases} -(k - 4), & k < 4 \\ k - 4, & k \geq 4 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 4 - k, & k < 4 \\ k - 4, & k \geq 4 \end{cases} \\
 &= \underline{\underline{\begin{cases} 4 - k, & k < 4 \\ k - 4, & k \geq 4 \end{cases}}}
 \end{aligned}$$

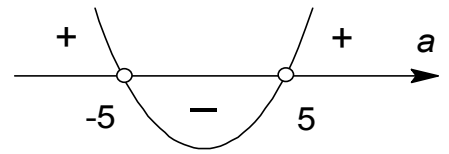


$$\begin{aligned}
 c) \quad |5 - 4a| &= \begin{cases} 5 - 4a, & a < \frac{5}{4} \\ -(5 - 4a), & a \geq \frac{5}{4} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 5 - 4a, & a < \frac{5}{4} \\ 4a - 5, & a \geq \frac{5}{4} \end{cases} \\
 &= \underline{\underline{\begin{cases} 5 - 4a, & a < \frac{5}{4} \\ 4a - 5, & a \geq \frac{5}{4} \end{cases}}}
 \end{aligned}$$

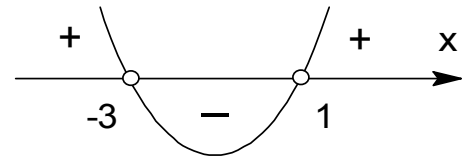


$$3. \quad a) \quad |a^2 - 25| = \begin{cases} a^2 - 25, & a \leq -5 \vee a \geq 5 \\ -(a^2 - 25), & -5 < a < 5 \end{cases}$$

$$= \underline{\underline{\begin{cases} a^2 - 25, & a \leq -5 \vee a \geq 5 \\ -a^2 + 25, & -5 < a < 5 \end{cases}}}$$



b) Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 3$ nollakohdat ratkaisukaavalla
 $x_1 = -3$ ja $x_2 = 1$



$$|x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq -3 \vee x \geq 1 \\ -(x^2 + 2x - 3), & -3 < x < 1 \end{cases}$$

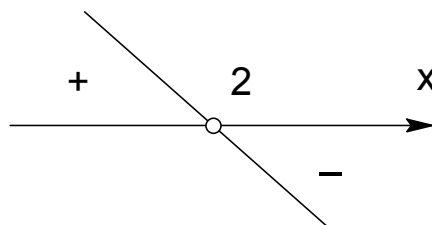
$$= \underline{\underline{\begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq -3 \vee x \geq 1 \\ -x^2 - 2x + 3, & -3 < x < 1 \end{cases}}}$$

4. $f(x) = |6 - 3x|$, merkitään $h(x) = 6 - 3x$. Nollakohdat

$$6 - 3x = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

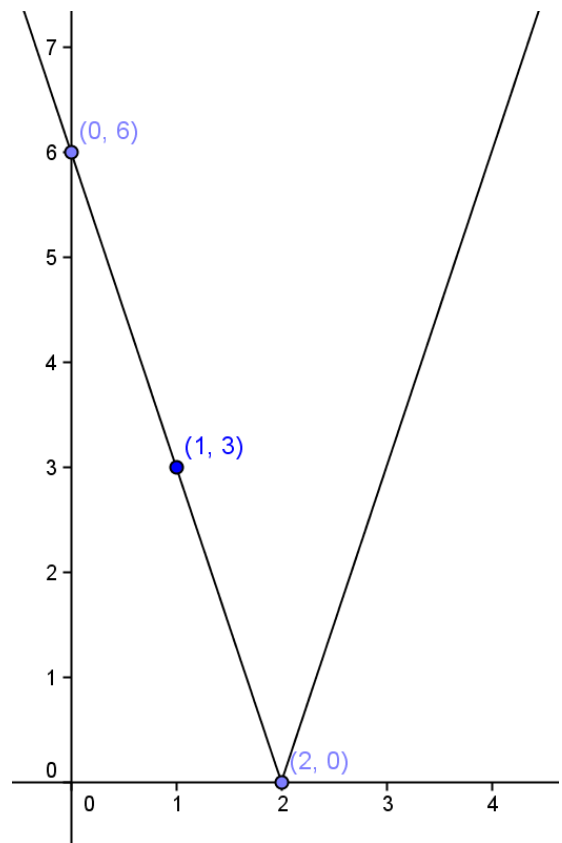


$$f(x) = \begin{cases} 6 - 3x, & x \leq 2 \\ -(6 - 3x), & x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6 - 3x, & x \leq 2 \\ 3x - 6, & x > 2 \end{cases}$$

x	$f(x) = 6 - 3x$, $x \leq 2$
0	6
1	3
2	0

x	$f(x) = 3x - 6$, $x > 2$
3	3
4	6
5	9



5. a) Janan keskipiste, kun $A = -2\sqrt{5}$ ja $B = 6\sqrt{5}$

$$k_p = \frac{A+B}{2} = \frac{-2\sqrt{5} + 6\sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$$

- b) Janan keskipiste, kun $A = \sqrt{7}$ ja $B = 2 + \sqrt{7}$

$$k_p = \frac{A+B}{2} = \frac{\sqrt{7} + 2 + \sqrt{7}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{2} = \underline{\underline{1 + \sqrt{7}}}$$

6. a) Sievennetään lauseketta

$$\frac{|x^2 - 6x + 9|}{|x - 3|} = \left| \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \right| = \left| \frac{(x - 3)^2}{x - 3} \right| = \underline{\underline{|x - 3|}}$$

b) Lausekkeen arvo, kun $x = \sqrt{3}$

$$|x - 3| = \underbrace{|\sqrt{3} - 3|}_{<0} = -(\sqrt{3} - 3) = \underline{\underline{3 - \sqrt{3}}}$$

7. a) Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} |5x - 1| = 4 &\Leftrightarrow 5x - 1 = 4 \quad \vee \quad 5x - 1 = -4 \\ &5x = 5 \qquad \qquad \qquad 5x = -3 \\ &\underline{\underline{x = 1}} \qquad \qquad \qquad \underline{\underline{x = -\frac{3}{5}}} \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} 3|2x - 8| - 12 &= 0 \\ 3|2x - 8| &= 12 \\ |2x - 8| = 4 &\Leftrightarrow 2x - 8 = 4 \quad \vee \quad 2x - 8 = -4 \\ &2x = 12 \qquad \qquad \qquad 2x = 4 \\ &\underline{\underline{x = 6}} \qquad \qquad \qquad \underline{\underline{x = 2}} \end{aligned}$$

8. a) Ratkaistaan yhtälö

$$|20 - 3x| = |5x + 12|$$

$$\begin{array}{l} 20 - 3x = 5x + 12 \quad \vee \quad 20 - 3x = -5x - 12 \\ -8x = -8 \qquad \qquad \qquad 2x = -32 \\ \underline{x = 1} \qquad \qquad \qquad \underline{x = -16} \end{array}$$

b) Ratkaistaan yhtälö

$$|x^2 - 1| = |x + 1|$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 1 = x + 1 \quad \vee \quad x^2 - 1 = -x - 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \qquad \qquad \qquad x^2 - x = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -1$$

tai

$$\begin{array}{l} x^2 - x = 0 \\ x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x = -1 \end{array}$$

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 0$ tai $x = 2$

9. Ratkaistaan yhtälö

$$\left| \frac{6x-5}{2x-5} \right| = |x| \qquad 2x-5 \neq 0$$

$$2x \neq 5$$

$$\left| \frac{6x-5}{2x-5} \right| = |x| \qquad x \neq \frac{5}{2}$$

$$|6x-5| = |x||2x-5|$$

$$|6x-5| = |2x^2-5x|$$

$$6x-5 = 2x^2-5x \quad \vee \quad 6x-5 = -2x^2+5x$$

$$2x^2-11x+5=0 \qquad 2x^2+x-5=0$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{11 \pm 9}{4}$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

tai

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4} \quad \vee \quad x = \frac{-1 - \sqrt{41}}{4}$$

$$\text{Vastaus: } x = 5 \text{ tai } x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4} \text{ tai } x = \frac{-1 - \sqrt{41}}{4}$$

10. a) Ratkaistaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}
 |2x-5| < 1 &\Leftrightarrow -1 < 2x-5 < 1 && | +5 \\
 &&&& 4 < 2x < 6 && | :2 \\
 &&&& \underline{\underline{2 < x < 3}}
 \end{aligned}$$

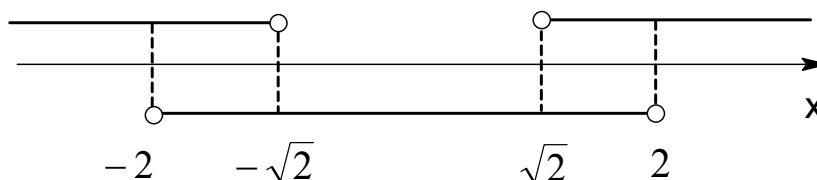
b) Ratkaistaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{3x}{4} - 2 \right| > \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{3x}{4} - 2 < -\frac{1}{2} && \vee && \frac{3x}{4} - 2 > \frac{1}{2} \\
 &&&& 3x - 8 < -2 && 3x - 8 > 2 \\
 &&&& 3x < 6 && 3x > 10 \\
 &&&& \underline{\underline{x < 2}} && \underline{\underline{x > \frac{10}{3}}}
 \end{aligned}$$

11. a) Ratkaistaan epäyhtälö

$$|x^2 - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 3 < 1$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3 > -1 &\quad \wedge &\quad x^2 - 3 < 1 \\
 x^2 > 2 &&\quad x^2 < 4 \\
 |x| > \sqrt{2} &&\quad |x| < 2
 \end{aligned}$$



Vastaus: $-2 < x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad \sqrt{2} < x < 2$

b) Ratkaistaan epäyhtälö

$$|x^2 - 2x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x^2 - 2x < 3$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x > -3 \quad \wedge \quad x^2 - 2x < 3 \\ \underbrace{x^2 - 2x + 3}_{f(x)} > 0 \quad \quad \quad \underbrace{x^2 - 2x - 3}_{g(x)} < 0 \end{array}$$

$$f(x) = 0$$

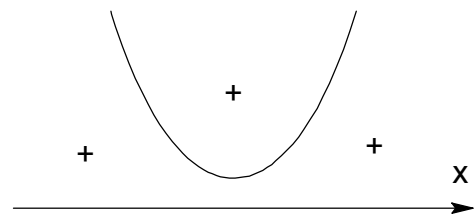
$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

ei ratkaisuja

$$x^2 - 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



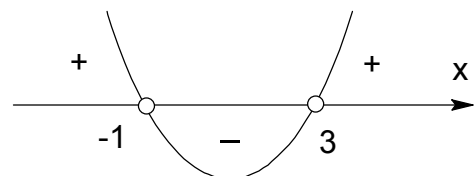
$$g(x) = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -1$$



$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad \text{kun} \quad \underline{\underline{-1 < x < 3}}$$

12. a) Ratkaistaan epäyhtälö

$$|3 - 4x| \leq |x - 4| \quad | ()^2$$

$$(3 - 4x)^2 \leq (x - 4)^2$$

$$9 - 24x + 16x^2 \leq x^2 - 8x + 16$$

$$\underbrace{15x^2 - 16x - 7}_{f(x)} \leq 0$$

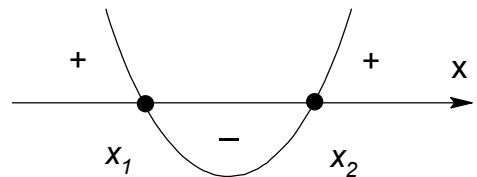
$$f(x) = 0$$

$$15x^2 - 16x - 7 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-7)}}{2 \cdot 15}$$

$$x = \frac{16 \pm 26}{30}$$

$$x = \frac{7}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}$$



$$\text{Toteutuu, kun } \underline{\underline{-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{5}}}$$

b) Ratkaistaan epäyhtälö

$$|5x - 3| > |4x + 2| \quad | ()^2$$

$$(5x - 3)^2 > (4x + 2)^2$$

$$25x^2 - 30x + 9 > 16x^2 + 16x + 4$$

$$\underbrace{9x^2 - 46x + 5}_{f(x)} > 0$$

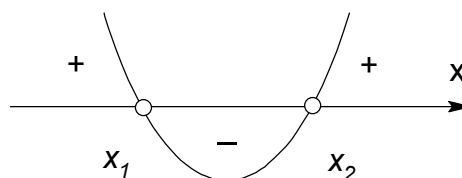
$$f(x) = 0$$

$$9x^2 - 46x + 5 = 0$$

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{(-46)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 5}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{46 \pm 44}{18}$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = \frac{1}{9}$$



Toteutuu, kun $x < \frac{1}{9} \quad \vee \quad x > 5$

13. a) Ratkaistaan epäyhtälö

$$2|7 - 3x| - 3 < 0$$

$$2|7 - 3x| < 3$$

$$|7 - 3x| < \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} < 7 - 3x < \frac{3}{2} \quad | -7$$

$$-\frac{17}{2} < -3x < -\frac{11}{2} \quad | :(-3)$$

$$\frac{17}{6} > x > \frac{11}{6}$$

$$\underline{\underline{\frac{11}{6} < x < \frac{17}{6}}}$$

b) Ratkaistaan epäyhtälö

$$|x+3| < \sqrt{\underbrace{x^2+2}_{>0}} \quad | ()^2$$

$$(x+3)^2 < x^2 + 2$$

$$x^2 + 6x + 9 < x^2 + 2$$

$$6x < -7$$

$$x < \underline{\underline{-\frac{7}{6}}}$$

14. a) Pisteiden välinen etäisyys

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-6 - 2)^2 + (1 - (-5))^2}$$

$$d = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$

b) Pisteiden välinen etäisyys

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{12} - \sqrt{3})^2}$$

$$d = \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{2+3} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

15. a) Janan pituus

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Keskipiste

$$k_p = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+(-\sqrt{2})}{2} \right) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)}}$$

b) Janan pituus

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

Keskipiste

$$k_p = \left(\frac{-1+(-4)}{2}, \frac{2+(-2)}{2} \right) = \underline{\underline{\left(-\frac{5}{2}, 0 \right)}}$$

16. a) Piste on pistejoukossa jos se toteuttaa yhtälön.

$$2x^2 - y^2 - 2 = 0$$

$$2 \cdot 3^2 - y^2 - 2 = 0$$

$$18 - 4 - 2 = 0$$

$$12 = 0 \quad \text{epätosi, } \underline{\underline{\text{ei kuulu}}}$$

b) Sijoitetaan piste yhtälöön

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 7$$

$$\frac{3^2}{3} + 2^2 = 7$$

$$3 + 4 = 7$$

$$7 = 7 \quad \text{tosi, kuuluu}$$

17. Piste (x, y) on kysytyn käyrän piste. Etäisyys pisteestä $(1,2)$

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

Etäisyys pisteestä $(3,5)$

$$d_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$$

$$d_1 = d_2$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} \quad | ()^2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$-2x - 4y + 5 = -6x - 10y + 34$$

$$4x + 6y - 29 = 0$$

Vastaus: Suora $4x + 6y - 29 = 0$

18. Sijoitetaan $a = 0$ ja $a = 1$ yhtälöön $x^2 + ax + a - y = 0$. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$x^2 = x^2 + x + 1$$

$$x = -1$$

$$y = x^2 = (-1)^2 = 1$$

Ainoa mahdollinen piste $(-1,1)$. Sijoitetaan piste alkuperäiseen yhtälöön

$$x^2 + ax + a - y = 0$$

$$(-1)^2 + a(-1) + a - 1 = 0$$

$$1 - a + 1 - 1 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{identtisesti tosi}$$

Siis kaikki pistejoukon kuvaajat kulkevat pisteen $(-1,1)$ kautta.

19. a) Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 5}{-1 - (-2)} = \frac{3}{1} = 3$$

Suoran yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 5 = 3(x - (-2))$$

$$y - 5 = 3x + 6$$

$$\underline{\underline{y = 3x + 11}}$$

b) Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-14 - 0}{-4 - 3} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Suoran yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 0 = 2(x - 3)$$

$$\underline{\underline{y = 2x - 6}}$$

20. Sijoitetaan piste $(-3, -8)$ suoran yhtälöön.

$$\begin{aligned}a \cdot (-3) - 3(-8) - 9 &= 0 \\-3a + 15 &= 0 \\-3a &= -15 \\a &= 5\end{aligned}$$

Suoran yhtälö $5x - 3y - 9 = 0$

Suora leikkaa x akselin, kun $y = 0$

$$\begin{aligned}5x - 9 &= 0 \\5x &= 9 \\x &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

Suora leikkaa y akselin, kun $x = 0$

$$\begin{aligned}-3y - 9 &= 0 \\-3y &= 9 \\y &= -3\end{aligned}$$

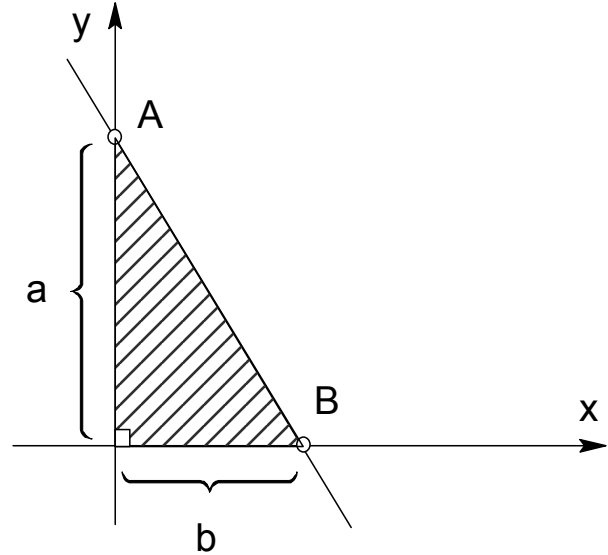
Vastaus: Pisteissä $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$ ja $(0, -3)$

21. Suoran $y = -4x + 1$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteet

Suora leikkaa y akselin
pisteessä $A = (0,1)$, jolloin
 $a = 1$

Suora leikkaa x akselin pisteessä

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -4x + 1 &= 0 \\ -4x &= -1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



$$B = \left(\frac{1}{4}, 0\right), \text{ jolloin } b = \frac{1}{4}$$

Kolmion pinta – ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

22. Merkitään yhtiövastiketta y (€), vesimaksua v (€) ja pinta – alaa A (m^2). Yhtiövastike riippuu lineaarisesti pinta – alasta

a) $y = k \cdot A + v$

$$\begin{cases} 57 = k \cdot 25 + v \\ 192 = k \cdot 100 + v \end{cases}$$

$$-135 = -75k$$

$$k = \frac{135}{75} = 1,8$$

$$v = 57 - k \cdot 25 = 57 - 1,8 \cdot 25 = 12$$

Suoran yhtälö

$$\underline{\underline{y = 1,8 \cdot A + 12}}$$

b) Pinta – alan ollessa $A = 60$, vastike

$$y = 1,8 \cdot 60 + 12 = 120$$

120 euroa

c) Vesimaksu $v = 12$ €

23. Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - (a + 2)}{a - 5 - 1} = \frac{9 - a}{a - 6} \quad a \neq 6$$

Suoran yhtälö

$$y - (a + 2) = \frac{9 - a}{a - 6}(x - 1)$$

$$y - a - 2 = \frac{9 - a}{a - 6}(x - 1)$$

Piste $(10, -13)$ on suoralla

$$-13 - a - 2 = \frac{9 - a}{a - 6} \cdot 9$$

$$-15 - a = \frac{9 - a}{a - 6} \cdot 9$$

$$(a - 6)(-15 - a) = 9(9 - a)$$

$$-15a - a^2 + 90 + 6a = 81 + 9a$$

$$-a^2 - 9a + 90 = 81 - 9a$$

$$-a^2 = -9$$

$$x^2 = 9$$

$$a = \pm 3$$

Jos $a = 6$, niin $(1,8)$ ja $(1,11)$ ovat suoran pisteitä ja piste $(10,-13)$ ei ole tällöin suoralla.

Vastaus: $a = \pm 3$

24. Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{4a + 1 - a}{3 - (-2)} = \frac{3a + 1}{5}$$

a) Nousevalle suoralle $k > 0$

$$\frac{3a + 1}{5} > 0$$

$$3a + 1 > 0$$

$$3a > -1$$

$$\underline{\underline{a > -\frac{1}{3}}}$$

b) Laskevalle suoralle $k < 0$

$$\frac{3a+1}{5} < 0$$

$$3a+1 < 0$$

$$3a < -1$$

$$\underline{\underline{a < -\frac{1}{3}}}$$

c) x akselin suuntaiselle suoralle $k = 0$

$$\frac{3a+1}{5} = 0$$

$$3a+1 = 0$$

$$3a = -1$$

$$\underline{\underline{a = -\frac{1}{3}}}$$

d) Suoran $y - 2x + 1$ eli $y = 2x - 1$ kulmakerroin $k = 2$

$$\frac{3a+1}{5} = 2$$

$$3a+1 = 10$$

$$3a = 9$$

$$\underline{\underline{a = 3}}$$

25. Suoran $y = -4x + 10$ kulmakerroin $k_1 = -4$. Kysytyn suoran kulmakerroin

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$-4k_2 = -1$$

$$k_2 = \frac{1}{4}$$

Suoran yhtälö kun kulkee pisteen $(-12, 24)$ kautta

$$y - y_0 = k_2(x - x_0)$$

$$y - 24 = \frac{1}{4}(x - (-12))$$

$$y - 24 = \frac{1}{4}x + 3$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + 27}}$$

26. Suorien kulmakertoimet

$$-2x - 3y + 1 = 0$$

$$3y = -2x + 1$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad k_1 = -\frac{2}{3}$$

$$x - 4y + 3 = 0$$

$$4y = x + 3$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \quad k_2 = \frac{1}{4}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} \right|$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{-\frac{11}{12}}{\frac{10}{12}} \right|$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{-11}{10} \right|$$

$$\tan \alpha = \frac{11}{10} \Rightarrow \alpha = 47,72\dots^\circ \approx \underline{\underline{48^\circ}}$$

27. Suora $y = -0,1x + 2$ $k_1 = -0,1$ on kysytyn suoran normaali, jolloin sen kulmakertoimelle

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$-\frac{1}{10} k_2 = -1$$

$$k_2 = 10$$

Suoran yhtälö

$$y - y_0 = k_2(x - x_0)$$

$$y - (a - 1) = 10(x - a)$$

$$y - a + 1 = 10x - 10a$$

$$y = 10x - 9a - 1$$

Kysytty suora leikkaa suoran $y = -0,1x + 2$ kohdassa $x = 15$, eli kun

$$y = -0,1 \cdot 15 + 2 = 0,5 = \frac{1}{2}$$

Normaali kulkee pisteen $\left(15, \frac{1}{2}\right)$ kautta

$$\frac{1}{2} = 10 \cdot 15 - 9a - 1$$

$$\frac{1}{2} = 149 - 9a$$

$$9a = 148\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 16\frac{1}{2}$$

$$\text{Vastaus: } a = 16\frac{1}{2}$$

28. Suoran suuntakulma $\alpha = 30^\circ$. Kulmakerroin

$$k = \tan \alpha = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suora kulkee pisteen $(-\sqrt{3}, 2)$ kautta

$$y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - (-\sqrt{3}))$$

$$y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3}}$$

29. Janan keskipiste

$$m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$
$$m = \left(\frac{-4 + (-2)}{2}, \frac{1 + 9}{2} \right) = (-3, 5)$$

Janan AB suuntaisen suoran kulmakerroin

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{-2 - (-4)} = \frac{8}{2} = 4$$

Keskinormaali kulkee keskipisteen kautta ja sen kulmakerroin

$$4 \cdot k_n = -1$$

$$k_n = -\frac{1}{4}$$

Keskinormaalien yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - (-3))$$

$$y - 5 = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}}}$$

30. Pisteen $(-2,3)$ etäisyys suorasta

$$y = -x + 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

31. Piste $(0,1)$ on eräs suoran $y = -2x + 1$ piste. Pisteen etäisyys suorasta

$$y = -2x - 3 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{5}}}}$$

32. Suoran $y = -\frac{1}{4}x + 4$ kulmakerroin $k_1 = -\frac{1}{4}$. Sen normaalin kulmakerroin

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$-\frac{1}{4}k_2 = -1$$

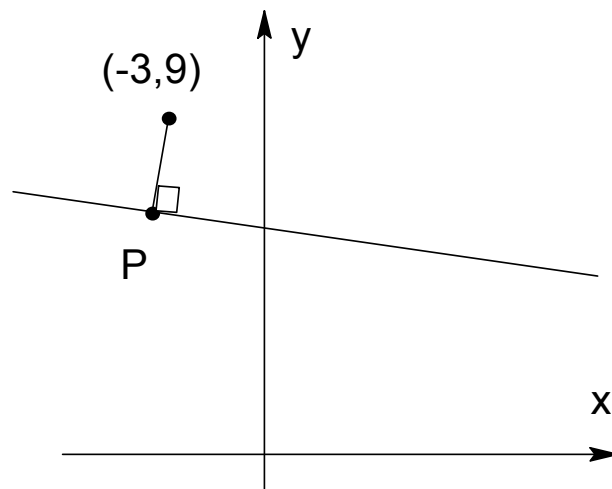
$$k_2 = 4$$

Normaalin yhtälö

$$y - 9 = 4(x - (-3))$$

$$y - 9 = 4x + 12$$

$$y = 4x + 21$$



Suoran ja normaalin leikkauspiste

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + 4 \\ y = 4x + 21 \end{cases}$$

$$4x + 21 = -\frac{1}{4}x + 4$$

$$4x + \frac{1}{4}x = 4 - 21$$

$$\frac{17}{4}x = -17$$

$$x = -4$$

Kun $x = -4$, niin $y = 4 \cdot (-4) + 21 = 5$

Vastaus: Piste $(-4, 5)$

33. Kulmanpuolittajan piste $P(x, y)$ on yhtä kaukana molemmista suorista $x - 2y + 1 = 0$ ja $4x + 2y - 3 = 0$

Pisteen $P(x, y)$ etäisyys suorasta $x - 2y + 1 = 0$

$$d_1 = \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}}$$

Pisteen $P(x, y)$ etäisyys suorasta $4x + 2y - 3 = 0$

$$d_2 = \frac{|4x + 2y - 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|4x + 2y - 3|}{\sqrt{20}} = \frac{|4x + 2y - 3|}{2\sqrt{5}}$$

Etäisyydet yhtä suuret

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x + 2y - 3|}{2\sqrt{5}}$$

$$2|x - 2y + 1| = |4x + 2y - 3|$$

$$\begin{array}{l} 2(x - 2y + 1) = 4x + 2y - 3 \\ 2x - 4y + 2 = 4x + 2y - 3 \\ \underline{\underline{-2x - 6y + 5 = 0}} \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{l} 2(x - 2y + 1) = -(4x + 2y - 3) \\ 2x - 4y + 2 = -4x - 2y + 3 \\ \underline{\underline{6x - 2y - 1 = 0}} \end{array}$$

34. Origin etäisyys suorasta $y = kx + 2$ eli $kx - y + 2 = 0$

$$d = \frac{|k \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$d = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

$$\frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

$$26 = \sqrt{26}\sqrt{k^2 + 1} \quad | ()^2$$

$$\begin{aligned}676 &= 26(k^2 + 1) && |:26 \\k^2 + 1 &= 26 \\k^2 &= 25 \\k &= \underline{\underline{\pm 5}}\end{aligned}$$

35. a) Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 5x \\ 2x - 2y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}2x - 2 \cdot 5x + 24 &= 0 \\-8x + 24 &= 0 \\-8x &= -24 \\x &= 3\end{aligned}$$

Kun $x = 3$, niin $y = 5 \cdot 3 = 15$

$$\begin{cases} y = 15 \\ x = 3 \end{cases}$$

b) Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = 4x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x^2 + 4x &= 4x + 8 \\x^2 &= 8 \\x &= \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Kun $x = 2\sqrt{2}$, niin $y = 4 \cdot 2\sqrt{2} + 8 = 8\sqrt{2} + 8 = 8(\sqrt{2} + 1)$

Kun $x = -2\sqrt{2}$, niin $y = 4 \cdot (-2\sqrt{2}) + 8 = 8 - \sqrt{2} + 8 = 8(-\sqrt{2} + 1)$

Vastaus: $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 8(\sqrt{2} + 1) \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = 8(-\sqrt{2} + 1) \end{cases}$

36. a) Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6y - 8x - 2 = 0 \\ 12y + 4x + 31 = 0 \end{cases} \quad | \cdot 2 \\ - \begin{cases} 6y - 8x - 2 = 0 \\ 24y + 8x + 62 = 0 \end{cases} \\ \hline 30y + 60 = 0 \\ 30y = -60 \\ y = -2 \end{array}$$

Kun $y = -2$, niin

$$\begin{array}{r} 6 \cdot (-2) - 8x - 2 = 0 \\ -8x - 14 = 0 \\ -8x = 14 \\ x = -\frac{7}{4} \end{array}$$

Vastaus: $\begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ y = -2 \end{cases}$

b) Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3y - 2x - 3 = 0 \\ 2y + 3x - 6 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} | \cdot 3 \\ | \cdot 2 \end{array} \\ - \left\{ \begin{array}{l} 9y - 6x - 9 = 0 \\ 4y + 6x - 12 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 13y - 21 = 0 \\ 13y = 21 \\ y = \frac{21}{13} \end{array}$$

Kun $y = \frac{21}{13}$, niin

$$2 \cdot \frac{21}{13} + 3x - 6 = 0$$

$$3x - \frac{36}{13} = 0$$

$$3x = \frac{36}{13}$$

$$x = \frac{12}{13}$$

$$\text{Vastaus: } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{12}{13} \\ y = \frac{21}{13} \end{array} \right.$$

37. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -4x + 12 \end{cases}$$

$$x - 3 = -4x + 12$$

$$x + 4x = 12 + 3$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Kun $x = 3$, niin $y = x - 3 = 3 - 3 = 0$

Vastaus: Leikkauspiste (3,0)

38. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$$

$$-2x + 7 = -x^2 + 2x + 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Kun $x = 2$, niin $y = -2x + 7 = -2 \cdot 2 + 7 = 3$

Vastaus: Leikkauspiste (2,3)

39. Merkitään autojen lukumäärää kirjaimella x , jolloin renkaita on $4x$ kpl. Merkitään pyörien lukumäärää kirjaimella y , jolloin renkaita on $2y$ kpl. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ 4x + 2y = 136 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 55 \\ 4x + 2y = 136 \end{cases}$$

$$4x + 2(-x + 55) = 136$$

$$4x - 2x + 110 = 136$$

$$2x = 26$$

$$x = 13$$

Kun $x = 13$, niin $y = -x + 55 = -13 + 55 = 42$

Vastaus: Autoja 13 kpl, polkupyöriä 42 kpl

40. Taulukoidaan tehtävän annossa annetut tiedot

	<i>kpl</i>	<i>ala (ha)</i>	<i>hinta (€)</i>
<i>pienet tontit</i>	x	$0,2 x$	$60\,000 x$
<i>suuret tontit</i>	y	$0,5y$	$100\,000 y$
<i>yht.</i>		$16,5 \text{ ha}$	$3,7 \cdot 10^6 \text{ €}$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 0,2x + 0,5y = 16,5 & | \cdot 10 \\ 60\,000x + 100\,000y = 3,7 \cdot 10^6 & | : 10\,000 \\ 2x + 5y = 165 & | \cdot (-2) \\ 6x + 10y = 370 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \left\{ \begin{array}{l} -4x - 10y = -330 \\ 6x + 10y = 370 \end{array} \right. \\ \hline 2x = 40 \\ x = 20 \end{array}$$

Kun $x = 20$, niin

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 20 + 5y = 165 \\ 40 + 5y = 165 \\ 5y = 125 \\ y = 25 \end{array}$$

Vastaus: Pienempiä tontteja 20 kpl, suurempia tontteja 25 kpl

41. Merkitään ensimmäistä lukua x ja sen neliö x^2 . Merkitään toista lukua y ja sen neliö y^2 . Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ x^2 + y^2 = 628 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 34 \\ x^2 + y^2 = 628 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x^2 + (-x + 34)^2 = 628 \\ x^2 + x^2 - 68x + 1156 = 628 \\ 2x^2 - 68x + 528 = 0 \quad | :2 \\ x^2 - 34x + 264 = 0 \end{array}$$

Nollakohdat

$$x = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 264}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{34 \pm 10}{2}$$

$$x = 22 \quad \vee \quad x = 12$$

Kun $x = 22$, niin $y = -x + 34 = -22 + 34 = 12$

Kun $x = 12$, niin $y = -x + 34 = -12 + 34 = 22$

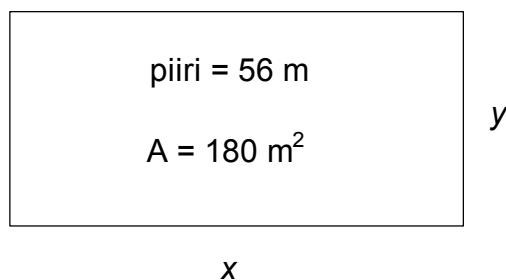
Vastaus: Luvut ovat 12 ja 22

42. Suorakulmion piiri on 56 m ja pinta – ala 180 m^2 . Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 & | :2 \\ x \cdot y = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 28 \\ xy = 180 \end{cases}$$



$$x(-x + 28) = 180$$

$$-x^2 + 28x - 180 = 0$$

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-180)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-28 \pm 8}{-2}$$

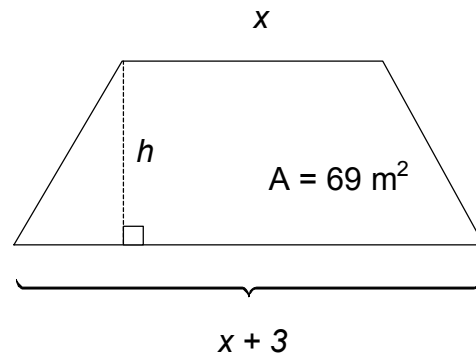
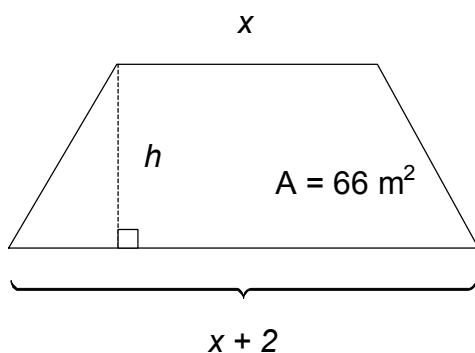
$$x = 10 \quad \vee \quad x = 18$$

Kun $x = 10$, niin $y = -x + 28 = -10 + 28 = 18$

Kun $x = 18$, niin $y = -x + 28 = -18 + 28 = 10$

Vastaus: Mitat ovat $10 \text{ m} \times 18 \text{ m}$

43. Piirretään apukuviot



Puolisuunnikkaan pinta – alalle

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Ratkaistaan saatu yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{x+x+2}{2} \cdot h = 66 & | \cdot 2 \\ \frac{x+x+3}{2} \cdot h = 69 & | \cdot 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (2x+2)h = 132 \\ (2x+3)h = 138 \end{cases}$$
$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2xh + 2h = 132 \\ 2xh + 3h = 138 \end{cases} \\ \hline -h = -6 \\ h = 6 \end{array}$$

Kun $h = 6$, niin

$$\begin{aligned} (2x+2)6 &= 132 \\ 2x+2 &= 22 \\ 2x &= 20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

$$x+2=12$$

Vastaus: 10 m ja 12 m

44. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x - 2y + x = 6 \\ -x + 3y + 3z = 7 \\ 4x - y - 2z = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 2y + z = 6 \\ -x + 3y + 3z = 7 \end{cases} \quad | \cdot 2 \\ + \begin{cases} 2z - 2y + z = 6 \\ -2x + 6y + 6z = 14 \end{cases} \\ \hline 4y + 7z = 20 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} -x + 3y + 3z = 7 \\ 4x - y - 2z = -10 \end{cases} \quad | \cdot 4 \\ + \begin{cases} -4x + 12y + 12z = 28 \\ 4x - y - 2z = -10 \end{cases} \\ \hline 11y + 10z = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 4y + 7z = 20 \\ 11y + 10z = 18 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \cdot 11 \\ | \cdot (-4) \end{array} \\ \begin{cases} 44y - 77z = 220 \\ -44y - 40z = -72 \end{cases} \\ \hline 37z = 148 \\ z = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4y + 7 \cdot 4 = 20 \\ 4y = -8 \\ y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x + 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 7 \\ -x = 1 \\ x = -1 \end{array}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

45. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a - b = 10 \\ -2a + 2b = 16 \\ a + b = 7 \end{cases}$$

TAPA 1

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} a - b = 10 \\ a + b = 7 \end{cases} \\ \hline 2a = 17 \\ a = 8\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\frac{1}{2} + b = 7 \\ b = -1\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -2a + 2b = 16 \\ -2 \cdot 8\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = 16 \\ -17 - 3 = 16 \\ -20 = 16 \\ \text{epätosi} \end{array}$$

TAPA 2

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} a - b = 10 \\ -2a + 2b = 16 \\ a + b = 7 \end{cases} \\ \hline 2b = 33 \\ b = 16\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{cases} a - 16\frac{1}{2} = 10 \\ -2a + 2 \cdot 16\frac{1}{2} = 16 \\ a + 16\frac{1}{2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 26\frac{1}{2} \\ a = 8\frac{1}{2} \\ a = -9\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ratkaisuna ei saatu yksikäsitteistä a :ta. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus: Ei ratkaisua

46. Sijoitetaan pisteiden $(0, -5)$, $(-1, -10)$ ja $(2, -13)$ koordinaatit paraabelin yhtälöön. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c = -5 \\ a - b + c = -10 \\ 4a + 2b + c = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5 \\ a - b - 5 = -10 \\ 4a + 2b - 5 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5 \\ a - b = -5 \\ 4a + 2b = -8 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

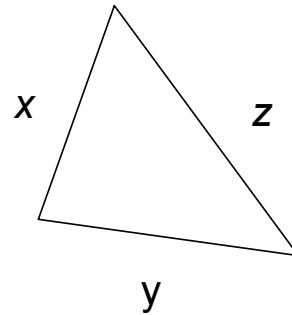
$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 2a - 2b = -10 \\ 4a + 2b = -8 \end{cases} \\ \hline 6a = -18 \\ a = -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -3 - b = -5 \\ b = -3 + 5 \\ b = 2 \end{array}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -5 \end{cases}$$

47. Merkitään lyhintä sivua x :llä ja pisintä sivua z :lla. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x + y = 18 \\ y + z = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x = 18 - y \\ z = 23 - y \end{cases}$$



Sijoittamalla

$$18 - y + y + 23 - y = 31$$

$$41 - y = 31$$

$$y = 41 - 31$$

$$y = 10$$

$$x = 18 - 10 = 8$$

$$z = 23 - 10 = 13$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \\ z = 13 \end{cases}$$

48. a) Keskipistemuotoinen yhtälö

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$$\underline{\underline{(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4}}$$

b) Sijoitetaan piste ympyrän yhtälöön

$$(-3 + 1)^2 + (1 - 3)^2 = 4$$

$$(-2)^2 + (-2)^2 = 4$$

$$8 = 4 \text{ epätosi}$$

Piste ei ole ympyrällä.

c) Sijoitetaan piste ympyrän yhtälöön

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (1 + 1)^2 + (-2 - 3)^2 = 2^2 + (-5)^2 = 29 > 4$$

Piste on ympyrän ulkopuolella.

d) y akselilla $x = 0$

$$(0 - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$1 + (y - 3)^2 = 4$$

$$(y - 3)^2 = 3$$

$$y - 3 = \pm\sqrt{3}$$

$$y = 3 \pm \sqrt{3}$$

Pisteissä $(0, 3 + \sqrt{3})$ ja $(0, 3 - \sqrt{3})$

49. a) Muokataan yhtälöä

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + y^2 + 8y + 17 &= 0 \\x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + 8y + 4^2 &= -17 + 2^2 + 4^2 \\(x-2)^2 + (y-4)^2 &= 3\end{aligned}$$

Yhtälö esittää ympyrää, jolle $k_p = (2,4)$ $r = \sqrt{3}$

b) Muokataan yhtälöä

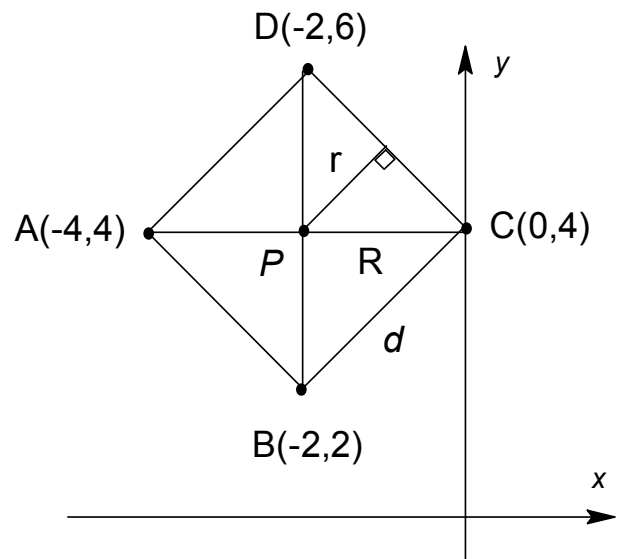
$$\begin{aligned}y^2 - 4y + x^2 + 2x + 8 &= 0 \\x^2 + 2x + 1^2 + y^2 - 4y + 2^2 &= -8 + 1^2 + 2^2 \\(x+1)^2 + (y-2)^2 &= -3\end{aligned}$$

Tulos on epätosi, yhtälö ei esitä ympyrää.

50. Apukuviosta nähdään, että kyseisten ympyröiden keskipiste $P = (-2,4)$.

a) Ympyrän säde $R = 2$

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= R^2 \\(x - (-2))^2 + (y - 4)^2 &= 2^2 \\(x + 2)^2 + (y - 4)^2 &= 4\end{aligned}$$



b) Ympyrän säde r on puolet neliön sivusta $\frac{d}{2}$

$$d = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Ympyrän yhtälö

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\underline{\underline{(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 2}}$$

51. Muokataan yhtälöä

$$x^2 + kx + y^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = -4 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = -4 + \frac{k^2}{4}$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun

$$-4 + \frac{k^2}{4} > 0$$

$$\frac{k^2}{4} > 4$$

$$k^2 > 16$$

$$|k| > 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{k < -4 \vee k > 4}}$$

52. Ympyrän yhtälön keskipistemuoto

$$y^2 + 14y + x^2 + 12x + 60 = 0$$

$$x^2 + 12x + 6^2 + y^2 + 14y + 7^2 = -60 + 6^2 + 7^2$$

$$(x + 6)^2 + (y + 7)^2 = 25$$

Ympyrän $k_p = (-6, -7)$ $r = \sqrt{25} = 5$

Keskipisteen etäisyys origosta

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-6 - 0)^2 + (-7 - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 49}$$

$$d = \sqrt{85}$$

Origon etäisyys ympyrästä = $d - r = \underline{\underline{\sqrt{85} - 5 \approx 4,2}}$

53. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 2 \\ (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{cases} \quad | \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4y = x + 8 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - 8 \\ x^2 - 12x + y^2 - 6y + 41 = 0 \end{cases}$$

Sijoittamalla

$$(4y-8)^2 - 12(4y-8) + y^2 - 6y + 41 = 0$$

$$16y^2 - 64y + 64 - 48y + 96 + y^2 - 6y + 41 = 0$$

$$17y^2 - 118y + 201 = 0$$

Nollakohdat

$$y = \frac{118 \pm \sqrt{(-118)^2 - 4 \cdot 17 \cdot 201}}{2 \cdot 17}$$

$$y = \frac{118 \pm 16}{34}$$

$$y = 3\frac{16}{17} \quad \vee \quad y = 3$$

$$\text{Kun } x = 3\frac{16}{17}, \text{ niin } y = 4y - 8 = 4 \cdot \frac{67}{17} - 8 = \frac{132}{17} = 7\frac{13}{17}$$

$$\text{Kun } x = 3, \text{ niin } y = 4y - 8 = 4 \cdot 3 - 8 = 4$$

Vastaus: Leikkauspisteet $\left(7\frac{13}{17}, 3\frac{16}{17}\right)$ ja $(4,3)$

54. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases} \\ & \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 8 \end{cases} \\ - & \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 8x + y^2 - 6y + 17 = 0 \end{cases} \\ & \hline & \qquad \qquad \qquad 6x + 6y - 18 = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x + y - 3 = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad y = 3 - x \end{aligned}$$

Sijoittamalla

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + (3-x)^2 - 1 = 0 \\ & x^2 - 2x + 9 - 6x + x^2 - 1 = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad 2x^2 - 8x + 8 = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad x^2 - 4x + 4 = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad (x-2)^2 = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x - 2 = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x = 2 \end{aligned}$$

Kun $x = 2$, niin $y = 3 - x = 3 - 2 = 1$

Vastaus: Leikkauspiste (2,1)

55. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y^2 + ay + x^2 + ax - 2 = 0 \\ y = ax + a + 1 \end{cases}$$

Kun $a = 0$

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$1^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Käyrät leikkaavat toisensa pisteissä $(-1,1)$ ja $(1,1)$.

Kun $a = 1$

$$\begin{cases} y^2 + y + x^2 + x - 2 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$(x+2)^2 + (x+2) + x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 + x + 2 + x^2 + x - 2 = 0$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = -2$$

Kun $x = -1$, niin $y = -1 + 2 = 1$

Kun $x = -2$, niin $y = -2 + 2 = 0$

Käyrät leikkaavat pisteissä $(-1,1)$ ja $(-2,0)$.

Mahdollinen yhteinen leikkauspiste on $(-1,1)$. Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöpariin

$$\begin{cases} 1^2 + a \cdot 1 + (-1)^2 + a \cdot (-1) - 2 = 0 \\ 1 = a \cdot (-1) + a + 1 \\ 0 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases} \quad \text{tosi}$$

Sekä ympyrä, että suora kulkevat kaikilla a :n arvoilla pisteen $(-1,1)$ kautta. \square

56. Käyrien leikkauspisteet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

$$x^2 + (x+5)^2 - 4(x+5) - 5 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 10x + 25 - 4x - 20 - 5 = 0$$

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$2x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$$

Kun $x = 0$, niin $y = 0 + 5 = 5$

Kun $x = -3$, niin $y = -3 + 5 = 2$

Käyrät leikkaavat toisensa pisteissä $(0,5)$ ja $(-3,2)$. Jänteen pituus on leikkauspisteiden välinen etäisyys

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{2 \cdot 9}$$

$$\underline{\underline{d = 3\sqrt{2}}}$$

57. Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{1 - (-3)} = \frac{4}{4} = 1$$

Suoran yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 0 = 1(x - (-3))$$

$$y = x + 3$$

Ympyrän keskipiste $k_p = (0,0)$ ja säde $r = 2$. $d =$ keskipisteen etäisyys suorasta $x - y + 3 = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12 > 2$$

Vastaus: Ei leikkaa

58. Jos suora on ympyrän tangentti, on suoralla ja ympyrällä täsmälleen yksi leikkauspiste. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 5)^2 + 4x + 2(3x - 5) - 5 &= 0 \\ x^2 + 9x^2 - 30x + 25 + 4x + 6x - 10 - 5 &= 0 \\ 10x^2 - 20x + 10 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Kun $x = 1$, niin $y = 3x - 5 = 3 \cdot 1 - 5 = -2$

Ympyrällä ja suoralla on täsmälleen yksi leikkauspiste $(1, -2)$. Suora on ympyrän tangentti. \square

59. Ympyrän $x^2 + y^2 = 25$ keskipiste $k_p = (0, 0)$ ja säde $r = \sqrt{25} = 5$. Tangentti kulkee pisteen $(-3, 4)$ kautta. Piste $(-3, 4)$ on ympyrällä.

$$k_r = \frac{4 - 0}{-3 - 0} = -\frac{4}{3}$$

$$k_t \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad k_t = \frac{3}{4}$$

Tangentin yhtälö

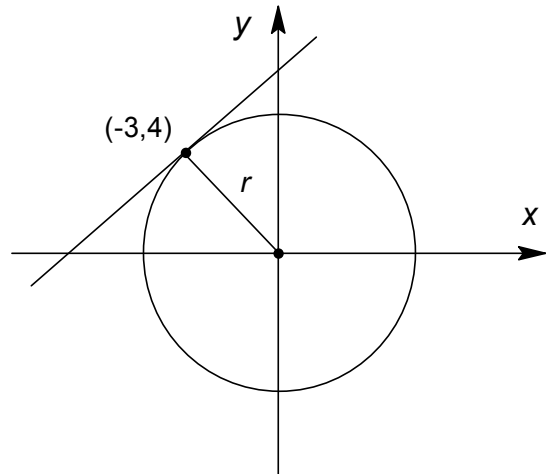
$$y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x - (-3))$$

$$y - 4 = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$4y - 16 = 3x + 9$$

$$\underline{\underline{3x - 4y + 25 = 0}}$$



60. Tangentti kulkee pisteen $(0,0)$ kautta, ja sen yhtälö on muotoa $y = kx$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0 \\ y = kx \end{cases}$$

$$x^2 + (kx)^2 - 10x - 10kx + 45 = 0$$

$$x^2 + k^2x^2 - 10x - 10kx + 45 = 0$$

$$x^2 \underbrace{(1 + k^2)}_{>0} + x(-10 - 10k) + 45 = 0$$

Täsmälleen yksi leikkauspiste kun diskriminantti on nolla

$$D = (-10 - 10k)^2 - 4 \cdot (1 + k^2) \cdot 45$$

$$= 100 + 200k + 100k^2 - 180 - 180k^2$$

$$= -80k^2 + 200k - 80$$

Nollakohdat

$$-80k^2 + 200k - 80 = 0 \quad | :(-40)$$

$$2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$k = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$k = 2 \quad \vee \quad k = \frac{1}{2}$$

Vastaus: Tangentit $y = 2x$ ja $y = \frac{1}{2}x$

61. Origokeskeisen ympyrän yhtälö on muotoa

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Suora $2x + 3y - 14 = 0$ on tangentti, joten origon etäisyys suorasta on ympyrän säde

$$r = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$$

Ympyrän yhtälö

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{14}{\sqrt{13}}\right)^2$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = \frac{196}{13}}}$$

62. Ympyrän keskipiste on $k_p = (2,3)$ ja sen yhtälö on muotoa

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

Suora $y = 2x + 10$ eli $2x - y + 10 = 0$ on ympyrän tangentti, siis suoran ja keskipisteen etäisyys on säde

$$r = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|11|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

Ympyrän yhtälö

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{11}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\underline{\underline{(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{121}{5}}}$$

63. Paraabelin polttopiste $(-1,3)$ ja johtosuora $y = -1$ eli $y - 1 = 0$.
Olkoon (x, y) paraabelin piste. Pisteestä suorasta = pisteen etäisyys polttopisteestä

$$\frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 3)^2}$$

$$|y + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} \quad | ()^2$$

$$\begin{aligned}
 (y+1)^2 &= (x+1)^2 + (y-3)^2 \\
 y^2 + 2y + 1 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\
 2y + 6y &= x^2 + 2x + 1 + 9 + 1 \\
 8y &= x^2 + 2x + 11 \\
 \underline{\underline{y &= \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{11}{8}}}
 \end{aligned}$$

64. Sijoitetaan pisteiden $(0,8)$, $(1,10)$ ja $(-2,-2)$ koordinaatit paraabelin yhtälöön. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 8 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 10 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ -2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 8 \\ a + b + c = 10 \\ 4a - 2b + c = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} a + b + 8 = 10 \\ 4a - 2b + 8 = -2 \end{cases} \\
 &\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 2b = -10 \quad | :2 \end{cases} \\
 + &\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = -5 \end{cases} \\
 \hline
 &3a = -3 \qquad a + b = 2 \\
 &a = -1 \qquad b = 2 - a = 2 - (-1) = 3
 \end{aligned}$$

Vastaus: $y = -x^2 + 3x + 8$

65. a) Paraabeli leikkaa y akselin, kun $x = 0$

$$y = -0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

Leikkauspiste $(0, -2)$

Paraabeli leikkaa x akselin, kun $y = 0$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 2$$

Leikkauspisteet $(1, 0)$ ja $(2, 0)$

Paraabelin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet ovat $(0, -2)$, $(1, 0)$ ja $(2, 0)$.

b) Huipun x koordinaatti

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{4}$$

Paraabelin huippu $\underline{\underline{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)}}$

c) Paraabelin akseli on y akselin suuntainen ja kulkee pisteen $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$

kautta. Siis paraabelin akseli on suora $x = \frac{3}{2}$.

d) Sijoitetaan pisteen $P = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$ koordinaatit paraabelin yhtälöön

$$-\frac{4}{9} = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{2}{3} - 2$$

$$-\frac{4}{9} = -\frac{4}{9} \text{ tosi}$$

Piste on paraabelilla.

e) Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$x - 1 = -x^2 + 3x - 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Kun $x = 1$, niin $y = x - 1 = 1 - 1 = 0$

Leikkauspiste $(1, 0)$.

66. Paraabeli $y = ax^2 - 3x + 1$ kulkee pisteen $(1, -1)$ kautta. Sijoitetaan pisteen koordinaatit paraabelin yhtälöön

$$-1 = a \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$-1 = a - 2$$

$$a = 1$$

Paraabelin yhtälö on $y = x^2 - 3x + 1$

Nollakohdissa $y = 0$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vastaus: } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ tai } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Testi 1

1. a) Ratkaistaan itseisarvoyhtälö

$$|x-8|=15 \Leftrightarrow x-8=15 \vee x-8=-15$$
$$\underline{\underline{x=23}} \qquad \underline{\underline{x=-7}}$$

b) Ratkaistaan itseisarvoepäyhtälö

$$|x+12|<20 \Leftrightarrow -20<x+12<20 \quad | -12$$
$$\underline{\underline{-32<x<8}}$$

c) Ratkaistaan itseisarvoepäyhtälö

$$|-2x+1|>7 \Leftrightarrow -2x+1<-7 \vee -2x+1>7$$
$$-2x<-8 \qquad -2x>6$$
$$\underline{\underline{x>4}} \qquad \underline{\underline{x<-3}}$$

d) Ratkaistaan epäyhtälö

$$4x^2 \leq 9$$
$$x^2 \leq \frac{9}{4}$$
$$|x| \leq \frac{3}{2}$$
$$\underline{\underline{-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}}}$$

2. a) Pisteiden $A = (2, -6)$ ja $B = (-5, -9)$ välinen etäisyys

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-5 - 2)^2 + (-9 - (-6))^2} \\ &= \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{49 + 9} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{58} \approx 7,6}} \end{aligned}$$

b) Janan AB keskipiste

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{2 + (-5)}{2}, \frac{-6 + (-9)}{2} \right) \\ &= \underline{\underline{\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2} \right)}} \end{aligned}$$

c) Suoran AB kulmakerroin

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-9 - (-6)}{-5 - 2} = \frac{-3}{-7} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

3. Suoran s yhtälö $6x - 4y = 5$.

a) Suoran yhtälön ratkaistu muoto

$$6x - 4y = 5$$

$$-4y = -6x + 5$$

$$y = \frac{6}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

Josta kulmakerroin $k_s = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

b) Suoran ja x akselin leikkauspiste, kun $y = 0$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Suora leikkaa x akselin pisteessä $\underline{\underline{\left(\frac{5}{6}, 0\right)}}$

c) Suoran kulmakerroin on sama kuin suoran s kulmakerroin

$$k = k_s = \frac{3}{2}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - (-5) = \frac{3}{2}(x - (-2))$$

$$y + 5 = \frac{3}{2}x + 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{3}{2}x - 2}}$$

d) Piste (1,2) etäisyys suorasta

$$\begin{aligned}d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 - 5|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} \\&= \frac{|-7|}{\sqrt{52}} \\&= \frac{7}{\sqrt{52}} \\&= \frac{7}{2\sqrt{13}} \approx 0,97\end{aligned}$$

e) Suoran kulmakerroin

$$k_n \cdot k_s = -1 \Leftrightarrow k_n \cdot \frac{3}{2} = -1 \Leftrightarrow k_n = -\frac{2}{3}$$

Suora kulkee pisteen (1,-3) kautta

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k(x - x_0) \\y - (-3) &= -\frac{2}{3}(x - 1) \\y + 3 &= -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\y &= -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}\end{aligned}$$

$$4. \quad a) \quad x^2 + (y-5)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-5)^2 = 2^2$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(0,5)$ ja säde 2.

b) Muokataan yhtälöä

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 3 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1^2 + y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -3 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ ja säde $\frac{1}{2}$.

c) Ratkaistaan yhtälö x :n suhteen

$$3x - y^2 + 3 = 0$$

$$3x = y^2 - 3$$

$$x = \frac{1}{3}y^2 - 1$$

Yhtälö esittää oikealle aukeavaa paraabelia.

5. Suoran yhtälön ratkaistu muoto

$$3x + y - 2 = 0$$

$$y = -3x + 2$$

Ympyrän $k_p = (2,0)$ $r = 4$. Ympyrän yhtälö

$$(x-2)^2 + y^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 14$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + (-3x + 2)^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 9x^2 - 12x + 4 - 12 = 0$$

$$10x^2 - 16x - 8 = 0$$

$$5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{8 \pm 12}{10}$$

$$x_1 = -\frac{2}{5} \quad \vee \quad x_2 = 2$$

$$\text{Kun } x = -\frac{2}{5}, \text{ niin } y = -3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 2 = \frac{6}{5} + 2 = 3\frac{1}{5}$$

$$\text{Kun } x = 2, \text{ niin } y = -3 \cdot 2 + 2 = -6 + 2 = -4$$

Vastaus: Leikkauspisteet $\left(-\frac{2}{5}, 3\frac{1}{5}\right)$ ja $(2, -4)$

6. Muokataan yhtälöä

$$x^2 + y^2 - 4kx + 6ky - 2k + 11 = 0$$

$$x^2 - 4kx + (2k)^2 + y^2 + 6ky + (3k)^2 = 2k - 11 + (2k)^2 + (3k)^2$$

$$(x - 2k)^2 + (y + k)^2 = 2k - 11 + 4k^2 + 9k^2$$

$$(x - 2k)^2 + (y + k)^2 = 13k^2 + 2k - 11$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun

$$\underbrace{13k^2 + 2k - 11}_{f(k)} > 0$$

Nollakohdat

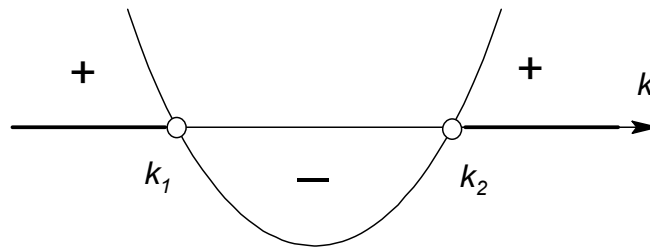
$$13k^2 + 2k - 11 = 0$$

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-11)}}{2 \cdot 13}$$

$$k = \frac{-2 \pm 24}{26}$$

$$k_1 = -1 \quad \vee \quad k_2 = \frac{11}{13}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



$$\text{Vastaus: } k < -1 \quad \text{tai} \quad k > \frac{11}{13}$$

7. Ympyrän yhtälön keskipistemuoto

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$$

$$x^2 - 8x + 4^2 + y^2 - 4y + 2^2 = 5 + 4^2 + 2^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$\text{Ympyrän } k_p = (4, 2) \quad r = 5$$

Tangentin yhtälö on muotoa

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - (-3) = k(x - 14)$$

$$y + 3 = kx - 14k$$

$$kx - y - 14k - 3 = 0$$

Tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä = säde

$$\frac{|k \cdot 4 - 1 \cdot 2 - 14k - 3|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$\frac{|-10k - 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5$$

$$|-10k - 5| = 5\sqrt{k^2 + 1} \quad | ()^2$$

$$(-10k - 5)^2 = 25(k^2 + 1)$$

$$100k^2 + 100k + 25 = 25k^2 + 25$$

$$75k^2 + 100k = 0$$

$$k(75k + 100) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 75k + 100 = 0$$

$$75k = -100$$

$$k = -\frac{4}{3}$$

Tangentin yhtälöt

$$-y - 3 = 0$$

$$y = -3$$

$$-\frac{4}{3}x - y - 14 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 3 = 0 \quad | \cdot (-3)$$

$$4x + 3y - 47 = 0$$

Vastaus: $y = -3$ ja $4x + 3y - 47 = 0$

8. Piste $P(x, y)$ on suoralla $y = -3x$, joten $P(x, -3x)$. Etäisyys pisteestä $(-2, 1)$

$$d_1 = \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 1)^2}$$

$$d_1 = \sqrt{(x + 2)^2 + (-3x - 1)^2}$$

Pisteen etäisyys suorasta

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

$$d_2 = \frac{|2 \cdot x - 1 \cdot y - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$d_2 = \frac{|2x - (-3x) - 1|}{\sqrt{5}}$$

$$d_2 = \frac{|5x - 1|}{\sqrt{5}}$$

Etäisyydet ovat samat, siis

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (-3x - 1)^2} = \frac{|5x - 1|}{\sqrt{5}} \quad |(\)^2$$

$$(x + 2)^2 + (-3x - 1)^2 = \frac{(5x - 1)^2}{5}$$

$$x^2 + 4x + 4 + 9x^2 + 6x + 1 = \frac{25x^2 - 10x + 1}{5}$$

$$10x^2 + 10x + 5 = \frac{25x^2 - 10x + 1}{5}$$

$$50x^2 + 50x + 25 = 25x^2 - 10x + 1$$

$$25x^2 + 60x + 24 = 0$$

Nollakohdat

$$25x^2 + 60x + 24 = 0$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 25 \cdot 24}}{2 \cdot 25}$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{1200}}{50}$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{400 \cdot 3}}{50}$$

$$x = \frac{-60 \pm 20\sqrt{3}}{50}$$

$$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{Kun } x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{5}, \text{ niin } y = -3x = -3 \left(\frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{5} \right) = \frac{18 \mp 6\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{Vastaus: } \left(\frac{-6 + 2\sqrt{3}}{5}, \frac{18 - 6\sqrt{3}}{5} \right) \text{ tai } \left(\frac{-6 - 2\sqrt{3}}{5}, \frac{18 + 6\sqrt{3}}{5} \right)$$

Testi 2

1. a) $|-16|=16$

b) $|\sqrt{5}-3|=-(\sqrt{5}-3)=3-\sqrt{5}$

c) $|11-3\pi|=11-3\pi$

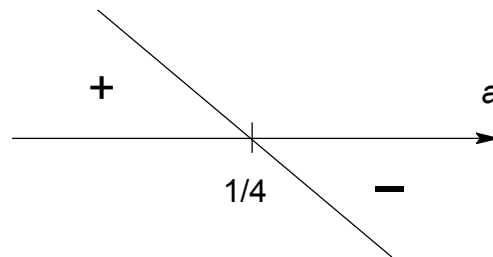
d) $f(a)=1-4a$

Nollakohta

$$1-4a=0$$

$$4a=1$$

$$a=\frac{1}{4}$$



$$|1-4a| = \begin{cases} 1-4a, & \text{kun } a \leq \frac{1}{4} \\ -(1-4a), & \text{kun } a > \frac{1}{4} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1-4a, & \text{kun } a \leq \frac{1}{4} \\ 4a-1, & \text{kun } a > \frac{1}{4} \end{cases}$$

2. a) Ratkaistaan itseisarvoyhtälö

$$|3x - 2| - 7 = 0$$

$$|3x - 2| = 7 \Leftrightarrow 3x - 2 = 7 \quad \vee \quad 3x - 2 = -7$$

$$3x = 9$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

$$3x = -5$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{5}{3}}}$$

b) $|x^2 - x| = |7x - 7|$

$$x^2 - x = 7x - 7 \quad \vee$$

$$x^2 - x = -7x + 7$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

$$x = 7 \quad \vee \quad x = 1$$

$$x = -7 \quad \vee \quad x = 1$$

c) Ratkaistaan itseisarvoepäyhtälö

$$|6x - 1| > 11 \Leftrightarrow 6x - 1 > 11 \quad \vee \quad 6x - 1 < -11$$

$$6x < -10$$

$$6x > 12$$

$$x < -\frac{10}{6}$$

$$x > 2$$

$$x < -\frac{5}{3}$$

d) Ratkaistaan itseisarvoepäyhtälö

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{3} - 2 \right| < 6 &\Leftrightarrow -6 < \frac{x}{3} - 2 < 6 && | +2 \\ &&&& -4 < \frac{x}{3} < 8 && | \cdot 3 \\ &&&& -12 < x < 24 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = -\frac{5}{3} \vee x = 3$ b) $x = \pm 7 \vee x = 1$
c) $x < -\frac{5}{3} \vee x > 2$ d) $-12 < x < 24$

3. a) Sijoitetaan $x = -1$ ja $y = 3$ pistejoukon yhtälöön

$$\begin{aligned} (-1)^2 + k \cdot (-1) \cdot 3 - 3^2 + 20 &= 0 \\ 1 - 3k - 9 + 20 &= 0 \\ -3k &= -12 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

b) Suoran yhtälön ratkaistu muoto

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2 &= 0 \\ 5y &= -3x - 2 \\ y &= -\frac{3}{5}x - \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Suora leikkaa y akselin kohdassa $y = -\frac{2}{5}$. Suoran suuntakulma $\alpha = -30^\circ$. Tällöin kulmakerroin

$$k = \tan(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suoran s yhtälö on

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{5}$$

Vastaus: a) $k = 4$ b) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{5}$

4. Merkitään $x =$ kirjoittimen A nopeus (lehteä/min) ja $y =$ kirjoittimen B nopeus (lehteä/min). Kirjoitusajat minuutteina:

$$1\text{h } 55\text{ min} = 115\text{ min}$$

$$1\text{h } 30\text{ min} = 90\text{ min}$$

$$1\text{h } 20\text{ min} = 80\text{ min}$$

$$2\text{h } 10\text{ min} = 130\text{ min}$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 115x + 90y = 1200 \quad | \cdot 80 \\ 130x + 80y = 1200 \quad | \cdot (-90) \end{array} \right. \\ + \left\{ \begin{array}{l} 9200x + 7200y = 96000 \\ -11700x - 7200y = -108000 \end{array} \right. \\ \hline -2500x = -12000 \\ x = 4,8 \end{array}$$

Sijoitetaan $x = 4,8$ ensimmäiseen yhtälöön

$$115 \cdot 4,8 + 90y = 1200$$

$$90y = 648$$

$$y = 7,2$$

Kirjoitin B on nopeampi, tulostusnopeus 7,2 lehteä/min.

Jos käytetään vain kirjoitinta B, työ kestää

$$\frac{1200}{7,2} = 166,66... \text{ min}$$

$$= 2 \text{ h } 46,66... \text{ min}$$

$$\approx 2 \text{ h } 50 \text{ min}$$

Vastaus: A:n nopeus 4,8 lehteä/min, B:n nopeus 7,2 lehteä/min.
Tulostus nopeammalla kirjoittimella kesää 2h 50 min.

5. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 5x^2 - 3x + 2 \\ y = 3x^2 + 6x - 2 \end{cases}$$

Sijoittamalla

$$5x^2 - 3x + 2 = 3x^2 + 6x - 2$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

Nollakohdat

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

Kun $x = 4$, niin $y = 5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 70$

Kun $x = \frac{1}{2}$, niin $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 1\frac{3}{4}$

Vastaus: $(4, 70)$ ja $\left(\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$

6. a) Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c = 4a \\ c = b + 1 \end{cases}$$

$$4a = b + 1$$

$$b = 4a - 1$$

Sijoitetaan tämä kolmanteen yhtälöön

$$6a - 2 = 4a - 1$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sijoitetaan } a = \frac{1}{2}$$

$$b = 4a - 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1$$

$$c = 4a = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{Vastaus: } a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 2$$

b) Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y = -30 \\ x - 5y = -23 \end{cases} \quad | \cdot (-3)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = -30 \\ -3x + 15y = 69 \end{cases}$$

$$\hline 13y = 39$$

$$y = 3$$

Sijoitetaan $y = 3$ toiseen yhtälöön

$$x - 5 \cdot 3 = -23$$

$$x = -8$$

Tutkitaan, toteuttaako ratkaisu $x = -8$ ja $y = 3$ viimeisen yhtälön

$$-2 \cdot (-8) - 3 = 13$$

$$13 = 13$$

tosi

Vastaus: $x = -8$ ja $y = 3$

7. a) Olkoon paraabelin piste (x, y) . Etäisyys johtosuorasta $y = 2$ eli $y - 2 = 0$

$$d_1 = \frac{|y - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y - 2|$$

Etäisyys polttopisteestä $(3, 4)$

$$d_2 = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

Etäisyydet yhtä suuret, joten

$$|y - 2| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

$$(y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2$$

$$y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$4y = x^2 - 6x + 21$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{21}{4}$$

b) Huipun x koordinaatti

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
$$x_0 = -\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

Huippu on polttopisteen kautta kulkevalla suoralla. Kun paraabeli aukeaa suoraan ylös, on paraabelin akseli y askelin suuntainen. Tällöin huipun x koordinaatti on sama kuin polttopisteen x koordinaatti.

Huipun y koordinaatti

$$y = \frac{1}{4} \cdot 3^2 - \frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{21}{4} = 3$$

Huipun y koordinaatin etäisyys johtosuoraan ja polttopisteeseen on yhtä suuri, joten huippu on x akselin suuntaisen johtosuoran ja polttopisteen puolivälissä.

Vastaus: a) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{21}{4}$ b) (3,3)

8. Muokataan yhtälöä

$$x^2 + y^2 + 2ax + 4ay + 2y + 6a + 1 = 0$$

$$x^2 + 2ax + y^2 + 4ay + 2y = -6a - 1$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2(2a+1)y + (2a+1)^2 = -6a - 1 + a^2 + (2a+1)^2$$

$$(x+a)^2 + (y+(2a+1))^2 = -6a - 1 + a^2 + 4a^2 + 4a + 1$$

$$(x+a)^2 + (y+(2a+1))^2 = 5a^2 - 2a$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun

$$\underbrace{5a^2 - 2a}_{f(a)} > 0$$

Nollakohdat

$$5a^2 - 2a = 0$$

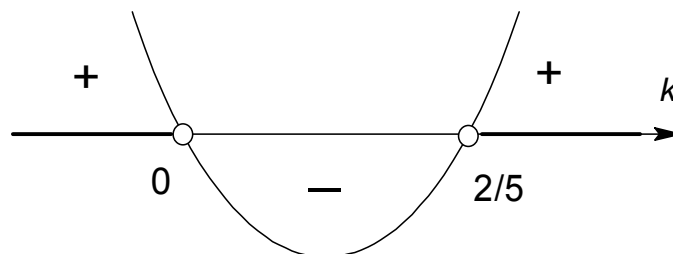
$$a(5a - 2) = 0$$

$$a = 0 \quad \vee \quad 5a - 2 = 0$$

$$5a = 2$$

$$a = \frac{2}{5}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $a < 0 \quad \vee \quad a > \frac{2}{5}$

Ympyrän keskipiste $(-a, -(2a+1))$. Keskipisteiden pistejoukko on

$$\begin{cases} x = -a \\ y = -2a - 1 \end{cases}$$

eli

$$y = -2 \cdot (-x) - 1 = 2x - 1$$

Kun $a < 0$, niin $-a > 0$ eli $x > 0$

Kun $a > \frac{2}{5}$, niin $-a < -\frac{2}{5}$ eli $x < -\frac{2}{5}$

Vastaus: Yhtälö esittää ympyrää, kun $a < 0$ tai $a > \frac{2}{5}$. Keskipisteet ovat puolisuorilla $y = 2x - 1$, $x > 0$ tai $x < -\frac{2}{5}$.