

1. a) $P(-2) = -4 \cdot (-2) - 3 = 5$
b) $P(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$
c) $P(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = -16$
2. a) $-(2x - 4) + (2 - 9x) = -2x + 4 + 2 - 9x = -11x + 6$
b) $6y^2(5y + 2y^2) = 30y^3 + 12y^4$
c) $(3a - 1)(5 - 4a) = 15a - 12a^2 - 5 + 4a = -12a^2 + 19a - 5$
d) $\frac{12x^3 - 8x^2}{4x} = \frac{12x^3}{4x} - \frac{8x^2}{4x} = 3x^2 - 2x$
3. a) $5x(x - 1) - x(2x - 5)$
 $= 5x^2 - 5x - 2x^2 + 5x$
 $= 3x^2$
b) $2(2x - 3)(3 - x) - (x - 3)(1 - 3x)$
 $= (4x - 6)(3 - x) - (x - 3x^2 - 3 + 9x)$
 $= (12x - 4x^2 - 18 + 6x) - (-3x^2 + 10x - 3)$
 $= -4x^2 + 18x - 18 + 3x^2 - 10x + 3$
 $= -x^2 + 8x - 15$
4. a) $P(x) - Q(x) = x^2 - 2x - (1 - x)$
 $= x^2 - 2x - 1 + x$
 $= x^2 - x - 1$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(x) + Q(x) &= x^2 - 2x + 1 - x \\ &= x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(x) \cdot Q(x) &= (x^2 - 2x)(1 - x) \\ &= x^2 - x^3 - 2x + 2x^2 \\ &= -x^3 + 3x^2 - 2x \end{aligned}$$

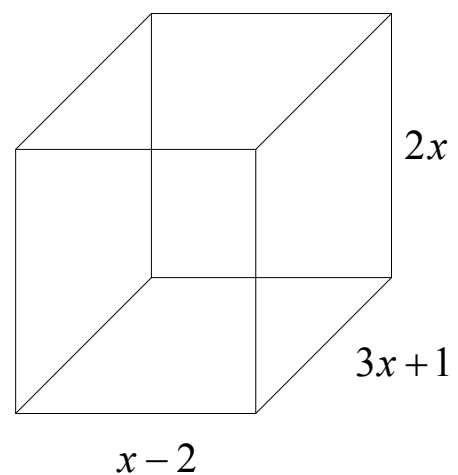
$$\begin{aligned} \text{d) } Q(x)[P(x) - Q(x)] &= (1 - x)(x^2 - x - 1) \\ &= x^2 - x - 1 - x^3 + x^2 + x \\ &= -x^3 + 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

5. a) Kokonaispinta-ala

$$\begin{aligned} A(x) &= 2[(x - 2)2x + 2x(3x + 1) + (x - 2)(3x + 1)] \\ &= 2(2x^2 - 4x + 6x^2 + 2x + 3x^2 + x - 6x - 2) \\ &= 2(11x^2 - 7x - 2) \\ &= \underline{\underline{22x^2 - 14x - 4}} \end{aligned}$$

b) Tilavuus

$$\begin{aligned} V(x) &= 2x(x - 2)(3x + 1) \\ &= (2x^2 - 4x)(3x + 1) \\ &= 6x^3 + 2x^2 - 12x^2 - 4x \\ &= \underline{\underline{6x^3 - 10x^2 - 4x}} \end{aligned}$$



6. Sievennetään lauseketta

$$\begin{aligned} & k^{m-1}(k + k^{mn}) - (k^m - k)(k^m - 1) \\ &= k^{m-1+1} + k^{m-1+mn} - (k^{m+m} - k^m - k^{m+1} + k) \\ &= k^m + k^{2m} - k^{2m} + k^m + k^{m+1} - k \\ &= \underline{\underline{k^{m+1} + 2k^m - k}} \end{aligned}$$

7. a) $(4x - 1)^2 = (4k)^2 - 2 \cdot 4k \cdot 1 + 1^2$
 $= 16k^2 - 8k + 1$

b) $(5 + 2a)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2a + (2a)^2$
 $= 25 + 20a + 4a^2$
 $= 4a^2 + 20a + 25$

c) $(2y - 6)(2y + 6) = (2y)^2 - 6^2$
 $= 4y^2 - 36$

d) $\left(\frac{1}{3}x - 9\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot 9 + 9^2$
 $= \frac{1}{9}x^2 - 6x + 81$

$$\begin{aligned} 8. \quad a) \quad & (y-3)^2 - (y+3)(y-3) \\ & = y^2 - 6y + 9 - (y^2 - 9) \\ & = y^2 - 6y + 9 - y^2 + 9 \\ & = -6y + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & (x^2 + 4)(x-2)(x+2) - (x^2 - 2)^2 \\ & = (x^2 + 4)(x^2 - 4) - (x^4 - 4x^2 + 4) \\ & = x^4 - 16 - x^4 + 4x^2 - 4 \\ & = 4x^2 - 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad a) \quad & (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = \sqrt{2}^2 - \sqrt{5}^2 \\ & = 2 - 5 \\ & = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & (3 - \sqrt{3})^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \\ & = 9 - 6\sqrt{3} + 3 \\ & = 12 - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2 \\ & = 4 \cdot 3 - 9 \cdot 2 \\ & = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad & (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = \sqrt{8}^2 + 2\sqrt{8}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 \\ & = 8 + 2\sqrt{16} + 2 \\ & = 8 + 2 \cdot 4 + 2 \\ & = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad \text{a) } \frac{\sqrt{3+1} \cdot 4}{\sqrt{3}-1} &= \frac{4(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2-1^2} \\
 &= \frac{4(\sqrt{3}+1)}{2} \\
 &= 2(\sqrt{3}+1) \\
 &= 2\sqrt{3}+2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{\sqrt{5}^2-(2\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{5-4 \cdot 3} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{-7} \\
 &= \frac{2\sqrt{15}-4 \cdot 3}{-7} \\
 &= -\frac{2\sqrt{15}-12}{7}
 \end{aligned}$$

$$11. \quad \text{a) } 2x - 5x^2 = x(2 - 5x)$$

$$\text{b) } -6a^3 + 15a^2 = a^2(-6a + 15) = 3a^2(-2a + 5)$$

$$\text{c) } ab^3 - a^3b^2 = ab^2(b - a^2)$$

12. a) $k^2 - 25 = k^2 - 5^2 = (k + 5)(k - 5)$

b) $36y^2 - 24y + 4 = (6y)^2 - 2 \cdot 6y \cdot 2 + 2^2 = (6y - 2)^2$

c) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 = x^2(x^2 + 6x + 9) = x^2(x + 3)^2$

13. a) $ax + 3 + 3a + x = ax + 3a + x + 3$
 $= a(x + 3) + (x + 3)$
 $= (x + 3)(a + 1)$

b) $x^2 - x + x^3 - 1 = x^3 - x + x^2 - 1$
 $= x(x^2 - 1) + (x^2 - 1)$
 $= (x^2 - 1)(x + 1)$
 $= (x - 1)(x + 1)(x + 1)$
 $= (x - 1)(x + 1)^2$

14. a) $4x - x^3 = x(4 - x^2)$
 $= x(x - 2)(2 + x)$

b) $9x^3 + 24x^2 + 16x = x(9x^2 + 24x + 16)$
 $= x(3x + 4)^2$

c) $1 - 8a^2 + 16a^4 = (4a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 + 1^2$
 $= (4a^2 - 1)^2$
 $= ((2a - 1)(2a + 1))^2$
 $= (2a - 1)^2(2a + 1)^2$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^3 + x^2 - x - 1 &= x^2(x+1) - (x+1) \\ &= (x+1)(x^2 - 1) \\ &= (x+1)(x+1)(x-1) \\ &= (x+1)^2(x-1) \end{aligned}$$

15. a) $g(-2) = -(-2) + 1 = 3$

b) $4x - 1 = 9$
 $4x = 10$
 $x = \frac{10}{4}$
 $x = \frac{5}{2}$

c) $4x - 1 = -x + 1$
 $5x = 2$
 $x = \frac{2}{5}$

Vastaus: a) 3 b) $x = \frac{5}{2}$ c) $x = \frac{2}{5}$

16. a) $y = (2 - 3k)x + 5$
Suora on laskeva, kun

$$\begin{aligned} 2 - 3k &< 0 \\ -3k &< -2 \\ k &> \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Suora on x - akselin suuntainen, kun

$$2 - 3k = 0$$

$$-3k = -2$$

$$k = \frac{2}{3}$$

17. a) $[-1, 5[$

b) $[-8, \infty[$

c) $]-\infty, 3[$

18. a) $8a < -24$

$$a < -3$$

b) $2x - 18 \geq -4$

$$2x \geq 14$$

$$x \geq 7$$

c) $-3x \leq -2$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

19. a) $2(2 - 3x) - (3 - 4x) \leq -3$

$$4 - 6x - 3 + 4x \leq -3$$

$$-2x \leq -4$$

$$x \geq 2$$

b) $(x - 2)^2 - (x - 3)(x + 3) > 1$

$$x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 9) > 1$$

$$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 9 > 1$$

$$-4x > -12$$

$$x < 3$$

20. Tutkitaan, milloin $2 - \frac{2}{3}x > 0$.

$$2 - \frac{2}{3}x > 0$$

$$-\frac{2}{3}x > -2$$

$$x < 3$$

Vastaus: $x < 3$

21. a) $x - \frac{2}{5}x \leq \frac{1}{2} \quad | \cdot 10$

$$10x - 4x \leq 5$$

$$6x \leq 5$$

$$x \leq \frac{5}{6}$$

b) $\frac{x}{3} - \frac{2x-4}{2} > 2x \quad | \cdot 6$

$$2x - 3(2x - 4) > 12x$$

$$2x - 6x + 12 > 12x$$

$$-16x > -12$$

$$x < \frac{12}{16}$$

$$x < \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} 22. \quad a) \quad & -2 < 4x - 1 < 5 && | +1 \\ & -1 < 4x < 6 && | :4 \\ & -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & 0 < \frac{1}{2}x + 3 \leq 1 && | -3 \\ & -3 < \frac{1}{2}x \leq -2 && | \cdot 2 \\ & -6 < x \leq -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \quad a) \quad & 5(2x - 1) > 6x - (2 - 4x) \\ & 10x - 5 > 6x - 2 + 4x \\ & -5 > -2 \Rightarrow \text{epätosi} \\ & \text{ei ratkaisua} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & 3x - 4 < \frac{3}{4}(4x + 8) \\ & 3x - 4 < 3x + 6 \\ & -4 < 6 \\ & \text{tosi} \end{aligned}$$

Ratkaisuna kaikki muuttujan x arvot.

Vastaus: a) Ei ratkaisua
 b) Ratkaisuna kaikki muuttujan x arvot

24. Ratkaistaan kaksoisepäyhtälö

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq 2 - \sqrt{3}x < 11 && | -2 \\
 -3 &\leq -\sqrt{3}x < 9 && | :(-\sqrt{3}) \\
 \frac{\sqrt{3})3}{\sqrt{3}} &\geq x > -\frac{\sqrt{3})9}{\sqrt{3}} \\
 \frac{3\sqrt{3}}{3} &\geq x > -\frac{9\sqrt{3}}{3} \\
 \sqrt{3} &\geq x > -3\sqrt{3} \\
 -3\sqrt{3} &< x \leq \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Vastaus: $-3\sqrt{3} < x \leq \sqrt{3}$

25. Ratkaistaan epäyhtälö kaikilla parametrin k arvoilla

$$\begin{aligned}
 k(x-3) - 2x &< -6 \\
 kx - 3k - 2x &< -6 \\
 (k-2)x &< -6 + 3k
 \end{aligned}$$

1. $k-2 > 0 \Leftrightarrow k > 2$

$$\begin{aligned}
 (k-2)x &< -6 + 3k && | : (k-2) \\
 x &< \frac{-6 + 3k}{k-2} = \frac{3(k-2)}{k-2} = 3
 \end{aligned}$$

2. $k-2 < 0 \Leftrightarrow k < 2$

$$\begin{aligned}
 (k-2)x &< -6 + 3k && | : (k-2) \\
 x &> \frac{-6 + 3k}{k-2} = \frac{3(k-2)}{k-2} = 3
 \end{aligned}$$

$$3. k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

$$(2 - 2)x < -6 + 3 \cdot 2$$

$$0 < 0$$

epätosi

Ei ratkaisua.

Vastaus: Kun $k > 2$: $x < 3$

 Kun $k < 2$: $x > 3$

 Kun $k = 2$: epäyhtälöllä ei ole ratkaisua

$$26. \quad \text{a) } x(x + 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

$$\text{b) } (2x - 1)(x - 4) = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$2x = 1$$

\vee

$$x = 4$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Vastaus: a) $x = 0 \quad \vee \quad x = -5$

 b) $x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 4$

27. a) $3x^2 - \frac{1}{3} = 0$

$$3x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \pm \frac{1}{3}$$

b) $(x-2)^2 = 2(4-2x)$

$$x^2 - 4x + 4 = 8 - 4x$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

c) $(4x-1)(4x+1) - 1 = 7$

$$(4x)^2 - 1^2 - 1 = 7$$

$$16x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{16}$$

$$x = \pm \frac{3}{4}$$

Vastaus: a) $x = \pm \frac{1}{3}$

b) $x = \pm 2$

c) $x = \pm \frac{3}{4}$

28. a) $x^2 - 6x = 0$
 $x(x - 6) = 0$

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 6 = 0$$
$$x = 6$$

b) $x^3 - 4x = 0$
 $x(x^2 - 4) = 0$

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

c) $-3x = 5x^2$
 $5x^2 + 3x = 0$
 $x(5x + 3) = 0$

$$x = 0 \quad \vee \quad 5x + 3 = 0$$
$$5x = -3$$
$$x = -\frac{3}{5}$$

d) $x^2 + 4x = 3x^2 - 2x$
 $x^2 + 4x - 3x^2 + 2x = 0$
 $-2x^2 + 6x = 0$
 $2x(-x + 3) = 0$

$$2x = 0 \quad \vee \quad -x + 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \quad \quad x = 3$$

29. a) $3x^2 + 2 = 2x^2 + 10$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

b) $2x^3 + (x-3)^2 = x^2 + 9$

$$2x^3 + x^2 - 6x + 9 = x^2 + 9$$

$$2x^3 - 6x = 0$$

$$2x(x^2 - 3) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

∨

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Vastaus: a) $x = \pm 2\sqrt{2}$ b) $x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{3}$

30. a) $x^2 + 3x - 18 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm 9}{2}$$

$$x = \frac{-3+9}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{-3-9}{2} = -6$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & 2x^2 - 10x = -12 \\
 & 2x^2 - 10x + 12 = 0 \quad | :2 \\
 & x^2 - 5x + 6 = 0 \\
 & x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\
 & = \frac{5 \pm 1}{2} \\
 & x = 3 \quad \vee \quad x = 2
 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = -6 \quad \vee \quad x = 3$
 b) $x = 2 \quad \vee \quad x = 3$

$$\begin{aligned}
 31. \quad \text{a)} \quad & x^2 - 8x + 16 = 0 \\
 & x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 = 0 \\
 & (x - 4)^2 = 0 \\
 & x - 4 = 0 \\
 & x = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & (x - 5)^2 - 16 = 0 \\
 & (x - 5)^2 = 16 \\
 & x - 5 = \pm 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x - 5 = 4 & & x - 5 = -4 \\
 x = 9 & \vee & x = 1
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & x^2 - x - 2 = 0 \\
 & x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\
 & x - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} & \vee & x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\
 x = 2 & & x = -1
 \end{array}$$

Vastaus: a) $x = 4$ b) $x = 1 \quad \vee \quad x = 9$
 c) $x = -1 \quad \vee \quad x = 2$

$$\begin{aligned}
 32. \quad \text{a)} \quad & 4x^2 + 4x + 4 = 0 \quad | :4 \\
 & x^2 + x + 1 = 0 \\
 & x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\
 & x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}
 \end{aligned}$$

ei reaalisia ratkaisuja

$$\begin{aligned} \text{b) } x - 3x^2 &= 0 \\ x(1 - 3x) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 1 - 3x = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Vastaus: a) Ei reaalisia ratkaisuja

$$\text{b) } x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

33. Sijoitetaan $x = -4$ yhtälöön

$$a \cdot (-4)^2 + (a - 5)(-4) + 4 = 0$$

$$16a - 4a + 20 + 4 = 0$$

$$12a = -24$$

$$a = -2$$

Kun $a = -2$, yhtälö on muotoa

$$-2x^2 + (-2 - 5)x + 4 = 0$$

$$-2x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{7 \pm 9}{-4}$$

$$x = -4 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

Vastaus: $a = -2$, toinen ratkaisu on $x = \frac{1}{2}$.

34. a) Nollakohdat

$$-x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Huippu on nollakohtien puolessavälissä. Huipun x -koordinaatti on

$$x_0 = \frac{-2 + 2}{2} = 0$$

Huipun y -koordinaatti on

$$y_0 = -0^2 + 4 = 4$$

Huippupiste on siis $(0,4)$.

b) Nollakohdat

$$2x^2 + 10x - 28 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-5 \pm 9}{2}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -7$$

Huipun x -koordinaatti

$$x_0 = \frac{2 - 7}{2} = -\frac{5}{2}$$

Huipun y -koordinaatti

$$\begin{aligned}y_0 &= 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 10\left(-\frac{5}{2}\right) - 28 \\ &= -40\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Huippupiste on siis $\left(-\frac{5}{2}, -40\frac{1}{2}\right)$.

Vastaus: a) Nollakohdat $x = \pm 2$, huippupiste $(0, 4)$
b) Nollakohdat $x = -7 \vee x = 2$,
huippupiste $\left(-\frac{5}{2}, -40\frac{1}{2}\right)$

35. Kuvaan piirretyt paraabelit yhdistyvät lausekkeisiin seuraavasti:

- 1) $y = -x^2 - 2$, koska paraabeli aukeaa alaspäin ($a = -1 < 0$).
- 2) $y = 0,2x^2$, koska paraabeli on kaikkein levein ($a = 0,2$ pienin).
- 3) $y = 2x^2$, koska paraabeli on kapein ($a = 2$ suurin).
- 4) $y = x^2$, jäljelle jääneistä paraabeleista se, joka sivuaa x - akselia (origossa).
- 5) $y = x^2 + 3$, edellisen funktion arvoihin lisätty 3 (leikkaa y - akselin kohdassa $y = 3$).

36. Polynomifunktio on muotoa

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x-7)(x-(-2)) \\ &= a(x-7)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1) = 24 &\Leftrightarrow a(-1-7)(-1+2) = 24 \\ & a(-8) = 24 \\ & a = -3 \end{aligned}$$

Polynomi on

$$\begin{aligned} P(x) &= -3(x-7)(x+2) \\ &= (-3x+21)(x+2) \\ &= -2x^2 - 6x + 21x + 42 \\ &= -3x^2 + 15x + 42 \end{aligned}$$

Vastaus: $P(x) = -3x^2 + 15x + 42$

37. a) Nollakohdat

$$\begin{aligned} 5x^2 + 15x + 10 &= 0 & | :5 \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm 1}{2} \\ x &= -1 \quad \vee \quad x = -2 \end{aligned}$$

Tekijöihin jako

$$\begin{aligned} 5x^2 + 15x + 10 &= 5(x-(-1))(x-(-2)) \\ &= 5(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

b) Nollakohdat

$$6x^2 - 14x + 4 = 0 \quad | :2$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

Tekijöihin jako

$$\begin{aligned} 6x^2 - 14x + 4 &= 6\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) \\ &= (6x - 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Vastaus: a) $5(x+1)(x+2)$ b) $(6x-2)(x-2)$

38. Polynomi on muotoa

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - (a - 1))(x - (2a + 1)) \\ &= (x - a + 1)(x - 2a - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(a) = -9 &\Leftrightarrow (a - a + 1)(a - 2a - 1) = -9 \\ &\qquad\qquad\qquad -a - 1 = -9 \\ &\qquad\qquad\qquad a = 8 \end{aligned}$$

Vastaus: $a = 8$

39. a) $2x^2 - 18 < 0$

Nollakohdat:

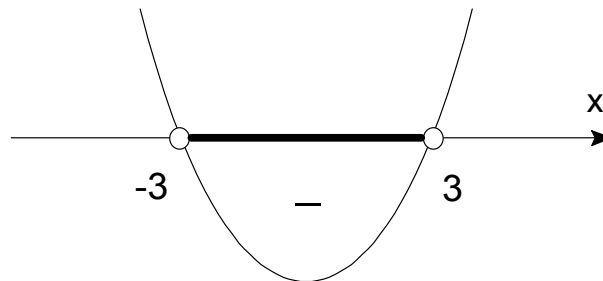
$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 < x < 3$.

b) $4x \geq 3x^2 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x \geq 0$

Nollakohdat

$$-3x^2 + 4x = 0$$

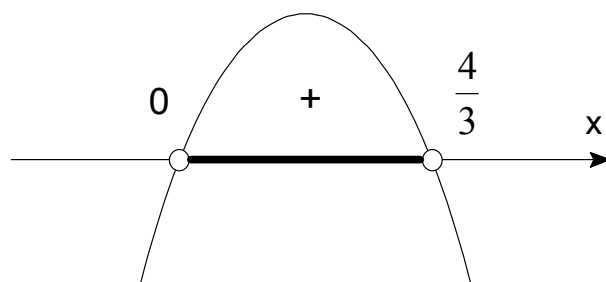
$$x(4 - 3x) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 4 - 3x = 0$$

$$3x = 3$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Vastaus: a) $-3 < x < 3$ b) $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$

40. a) $3x^2 - 12 \neq 0$
 $3x^2 \neq 12$
 $x^2 \neq 4$
 $x \neq \pm 2$

b) $x^2 - 4x - 4 > 0$

Nollakohdat

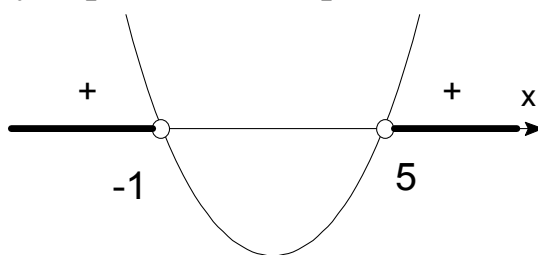
$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = -1$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $x < -1 \vee x > 5$

c) $x^2 + 2x + 2 > 0$

Nollakohdat

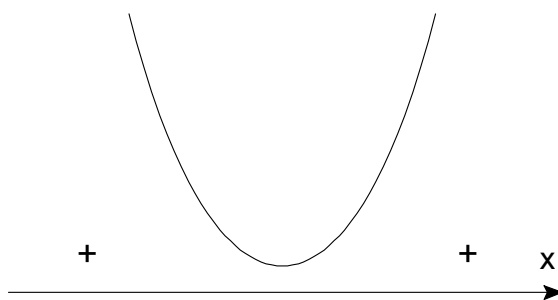
$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

ei reaalisia ratkaisuja

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

- Vastaus: a) $x \neq \pm 2$ b) $x < -1 \vee x > 5$
 c) $x \in R$

41. Paraabeli sulkee aina suoran yläpuolella, kun epäyhtälö

$$4x^2 + 2x + 1 > -2x - 3$$

toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

$$4x^2 + 2x + 1 > -2x - 3$$

$$4x^2 + 4x + 4 > 0 \quad | :4$$

$$x^2 + x + 1 > 0$$

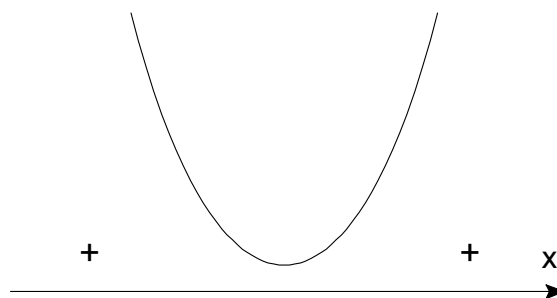
Nollakohdat

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

ei reaalisia ratkaisuja

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla eli paraabeli $y = 4x^2 + 2x + 1$ ei kulje koskaan suoran $y = -2x - 3$ alapuolella. \square

$$42. \quad a) \quad (4 - 3x)^2 \geq 25$$

$$16 - 24x + 9x^2 \geq 25$$

$$9x^2 - 24x - 9 \geq 0$$

Nollakohdat

$$9x^2 - 24x - 9 = 0 \quad | :3$$

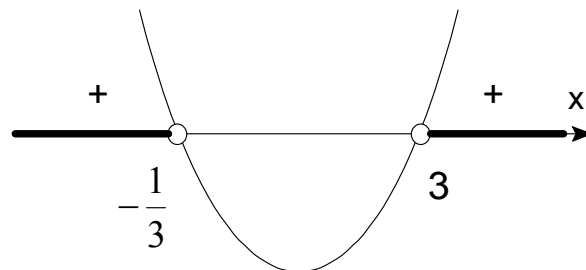
$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{8 \pm 10}{6}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $x \leq -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x \geq 3$.

$$b) \quad (5 - 2x)^2 < x^2$$

$$25 - 20x + 4x^2 < x^2$$

$$3x^2 - 20x + 25 < 0$$

Nollakohdat

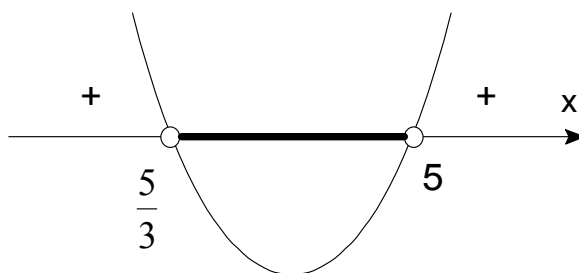
$$3x^2 - 20x + 25 = 0$$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 25}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{20 \pm 10}{6}$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = \frac{5}{3}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{5}{3} < x < 5$.

Vastaus: a) $x \leq -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x \geq 3$

b) $\frac{5}{3} < x < 5$

43. Määritetään vakio k epäyhtälöstä $9x^2 - kx + 1 = 0$.

Paraabeli aukeaa ylöspäin. Jotta epäyhtälön ratkaisuna olisi kaikki muut luvut paitsi $x = \frac{1}{3}$, on luvun $\frac{1}{3}$ oltava polynomin

$P(x) = 9x^2 - kx + 1$ ainoa nollakohta.

Sijoitetaan $x = \frac{1}{3}$ yhtälöön

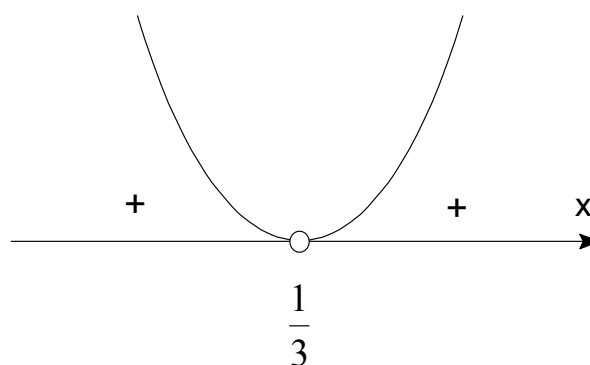
$$9x^2 - kx + 1 = 0$$

$$9\left(\frac{1}{3}\right)^2 - k \cdot \frac{1}{3} + 1 = 0$$

$$1 - \frac{1}{3}k + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{3}k = -2$$

$$k = 6$$



Tällöin polynomi $P(x) = 9x^2 - kx + 1 = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$, joten $\frac{1}{3}$ on sen ainoa nollakohta.

Vastaus: $k = 6$

44. a) $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0 \Rightarrow$ ei reaalista ratkaisua

b) $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ yksi ratkaisu

c) $3x = 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 9 > 0 \Rightarrow$ kaksi ratkaisua

d) $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0 \Rightarrow$ kaksi ratkaisua

Vastaus: a) 0 b) 1 c) 2 d) 2

45. Yhtälön $x^2 - tx + t = 0$ diskriminantti

$$D = (-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot t$$

$$= t^2 - 4t$$

a) Kaksi juurta, kun $D > 0$

$$t^2 - 4t > 0$$

Nollakohdat

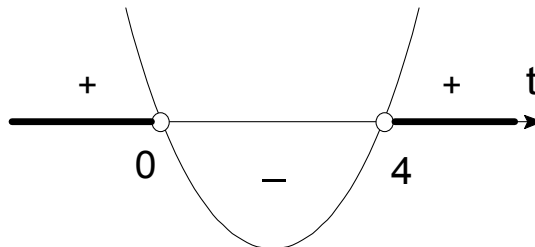
$$t^2 - 4t = 0$$

$$t(t - 4) = 0$$

$$t = 0 \quad \vee \quad t - 4 = 0$$

$$t = 4$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $t < 0 \quad \vee \quad t > 4$.

b) Yksi juuri, kun $D = 0$ eli kun $t = 0 \quad \vee \quad t = 4$.

c) Ei reaali juuria, kun $D < 0$ eli kun $0 < t < 4$.

Vastaus: a) $t < 0 \quad \vee \quad t > 4$

b) $t = 0 \quad \vee \quad t = 4$

c) $0 < t < 4$

46. Funktion $g(x) = -4x^2 + 12x - 10$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktio g saa vain negatiivisia arvoja, kun sillä ei ole nollakohtia.

$$-4x^2 + 12x - 10 = 0$$

Diskriminantti

$$D = 12^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-10) = -16 < 0$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, joten funktiolla g ei ole nollakohtia.

Funktio g saa tällöin vain negatiivisia arvoja. \square

47. Funktio on toisen asteen funktio, joten $k \neq 0$. Funktion nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$kx^2 - 3x + 1 = 0$$

Funktiolla on ainakin yksi nollakohta, kun diskriminantti $D \geq 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 = 9 - 4k$$

$$9 - 4k \geq 0$$

$$-4k \geq -9$$

$$k \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{Vastaus: } k \leq \frac{9}{4}$$

48. Suoralla ja paraabelilla ei ole leikkauspisteitä, kun yhtälöllä

$$3x - s = 2x^2 - x$$

ei ole ratkaisua.

$$3x - s = 2x^2 - x$$

$$-2x^2 + 4x - s = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-s)$$

$$= 16 - 8s$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun $D < 0$

$$16 - 8s < 0$$

$$-8s < -16$$

$$s > 2$$

Vastaus: $s > 2$

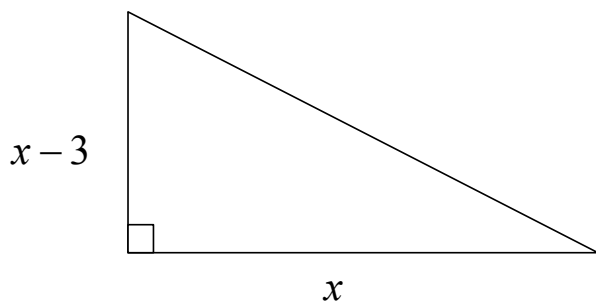
49. Kolmion ala $A(x) = \frac{x(x-3)}{2} = \frac{x^2 - 3x}{2}$

Ala on 189 m^2 , joten

$$\frac{x^2 - 3x}{2} = 189$$

$$x^2 - 3x = 378$$

$$x^2 - 3x - 378 = 0$$



$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-378)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm 39}{2}$$

$$x = 21 \quad \vee \quad x = -18 < 0 \Rightarrow \text{ei kelpaa}$$

Toinen kateetti on 21 m ja toinen $21\text{m} - 3\text{m} = 18\text{ m}$.

Vastaus: 18m ja 21 m

50. a) Muodostetaan taulukko

<i>Hinta (€)</i>	<i>Myyty määrä (kpl)</i>
12	180
$12 - 1$	$180 + 20$
$12 - 2$	$180 + 2 \cdot 20$
$12 - 3$	$180 + 3 \cdot 20$
$12 - x$	$180 + x \cdot 20$

Hinta $12 - x$ määritelty, kun $12 - x > 0 \Leftrightarrow x < 12$.

Myydyille määrälle $180 + 20x$ määritelty, kun $180 + 20x > 0 \Leftrightarrow x > -9$.

Määrittelyjoukko edellisistä:

$$-9 < x < 12$$

Viikkomyynti

$$p(x) = (12 - x)(180 + 20x)$$

$$= 2160 + 240x - 180x - 20x^2$$

$$= -20x^2 + 60x + 2160$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & p(x) \geq 2000 \\ & -20x^2 + 60x + 2160 \geq 2000 \\ & -20x^2 + 60x + 160 \geq 0 \end{aligned}$$

Nollakohdat

$$-20x^2 + 60x + 160 = 0 \quad | :5$$

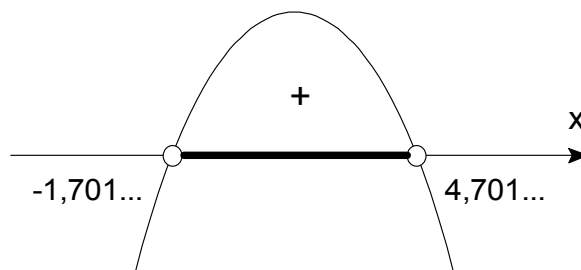
$$-4x^2 + 12x + 32 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 32}}{2 \cdot (-4)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{656}}{-8}$$

$$x = \frac{-12 + \sqrt{656}}{-8} \approx -1,701... \quad \vee \quad x = \frac{-12 - \sqrt{656}}{-8} \approx 4,701...$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli



Viikkomyynti vähintään 2000 €, kun hinnan muutos

$$-1,701... < x < 4,701..$$

TAPA 1.

Kun hinnan muutos on $-1,70... \text{ euroa}$, hinta on $12 - (-1,70...) \approx 13,7 \text{ euroa}$.

Kun hinnan muutos on $4,70... \text{ euroa}$, hinta on $12 - 4,70... \approx 7,30 \text{ euroa}$.

Myyntihinta on siis tällöin

$$7,30\text{€} < m < 13,70\text{€}$$

TAPA 2.

$$-1,701\dots < x < 4,701\dots \quad | \cdot (-1)$$

$$1,701\dots > -x > -4,701 \quad | +12$$

$$13,701\dots > 12 - x > 7,298\dots$$

$$7,30 < \underbrace{12 - m}_{\text{myyntihinta}} < 13,7$$

Vastaus: a) $p(x) = -20x^2 + 60x + 2160$
 c) $7,30\text{€} < m < 13,70\text{€}$

51. Lukujen summa on 52, joten luvut ovat x ja $52 - x$.

Lukujen tulo

$$x(52 - x) = 480$$

$$52x - x^2 = 480$$

$$-x^2 + 52x - 480 = 0$$

$$x = \frac{-52 \pm \sqrt{(52)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-480)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-52 \pm 28}{-2}$$

$$x = 12 \quad \vee \quad x = 40$$

Kun $x = 12$, toinen luku on $52 - 12 = 40$.

Kun $x = 40$, toinen luku on $52 - 40 = 12$.

Vastaus: Luvut ovat 12 ja 40.

52. a) $9x^3 - 6x^2 = 0$
 $3x^2(3x - 2) = 0$

$$\begin{array}{ll} 3x^2 = 0 & 3x - 2 = 0 \\ x^2 = 0 & \vee \quad 3x = 2 \\ x = 0 & x = \frac{2}{3} \end{array}$$

b) $5x^4 - 20x^2 = 0$
 $5x^2(x^2 - 4) = 0$

$$\begin{array}{ll} 5x^2 = 0 & x^2 - 4 = 0 \\ x^2 = 0 & \vee \quad x^2 = 4 \\ x = 0 & x = \pm 2 \end{array}$$

Vastaus: a) $x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}$
b) $x = 0 \quad \vee \quad x = \pm 2$

$$53. \quad \text{a) } t^3 - 6t^2 + 9t = 0$$

$$t(t^2 - 6t + 9) = 0$$

$$t(t-3)^2 = 0$$

$$t = 0 \quad \vee \quad t - 3 = 0$$

$$t = 3$$

$$\text{b) } y^3 + 2y^2 - 7y = 3y - y^2$$

$$y^3 + 3y^2 - 10y = 0$$

$$y(y^2 + 3y - 10) = 0$$

$$y = 0 \quad \vee \quad y^2 + 3y - 10 = 0$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$y = 2 \quad \vee \quad y = -5$$

Vastaus: a) $t = 0 \quad \vee \quad t = 3$

 b) $y = 0 \quad \vee \quad y = 2 \quad \vee \quad y = -5$

$$54. \quad \text{a) } f(x) = 0$$

$$-x^3 + 5x^2 + 9x - 45 = 0$$

$$-x^2(x-5) + 9(x-5) = 0$$

$$(x-5)(9-x^2) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \vee \quad 9 - x^2 = 0$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

b) $f(x) = 0$

$$x^4 - 16x^2 + 64 = 0$$

$$(x^2)^2 - 16x^2 + 64 = 0$$

Sijoitetaan apumuuttuja $y = x^2$

$$y^2 - 16y + 64 = 0$$

$$(y - 8)^2 = 0$$

$$y - 8 = 0$$

$$y = 8$$

Koska $y = x^2$, saadaan

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

Vastaus: a) $x = 5 \vee x = \pm 3$

b) $x = \pm 2\sqrt{2}$

55. a) $t^4 - 10t^2 + 9 = 0$

$$(t^2)^2 - 10t^2 + 9 = 0$$

Sijoitetaan apumuuttuja $x = t^2$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$x = 9 \quad \vee \quad x = 1$$

Koska $x = t^2$, saadaan

$$t^2 = 9$$

$$t^2 = 1$$

$$t = \pm 3$$

$$t = \pm 1$$

b) $k^4 - 2k^2 + 1 = 4$

$$(k^2)^2 - 2k^2 - 3 = 0$$

Sijoitetaan apumuuttuja $x = k^2$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -1$$

Koska $x = k^2$, saadaan

$$k^2 = 3$$

$$k^2 = -1$$

$$k = \pm\sqrt{3}$$

ei reaalisia ratkaisuja

Vastaus: a) $t = \pm 1 \quad \vee \quad t = \pm 3$

b) $k = \pm\sqrt{3}$

56. Polynomi on jaollinen binomilla $x + 2$, joten $x = -2$ on polynomin nollakohta.

$$\begin{aligned} Q(-2) = 0 &\Leftrightarrow (-2)^3 + a(-2)^2 - (a+7)(-2) - 18 = 0 \\ &-8 + 4a + 2a + 14 - 18 = 0 \\ &6a = 12 \\ &a = 2 \end{aligned}$$

Kun $a = 2$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3 + 2x^2 - (2+7)x - 18 \\ &= x^3 + 2x^2 - 9x - 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) = 0 &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 \\ &x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \\ &(x+2)(x^2 - 9) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} x+2=0 & & x^2 - 9 = 0 \\ x = -2 & \vee & x^2 = 9 \\ & & x = \pm 3 \end{array}$$

Vastaus: $a = 2$, $x = -2$ \vee $x = \pm 3$

57. a) $x^3 - x^2 < 6x - 2x^2$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 6x + 2x^2 &< 0 \\ x^3 + x^2 - 6x &< 0 \\ \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{(x^2 + x - 6)}_{g(x)} &< 0 \end{aligned}$$

Nollakohtat

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 6 = 0$$

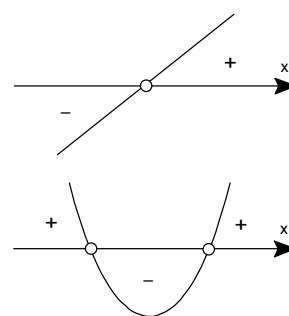
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -3$$

Merkkikaavio

	-3	0	2	
$f(x)$	-	-	+	+
$g(x)$	+	-	-	+
TULO	-	+	-	+



$$x < -3 \quad \vee \quad 0 < x < 2$$

b) Nollakohtat

$$x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -2$$

ei nollakohtia

∨

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

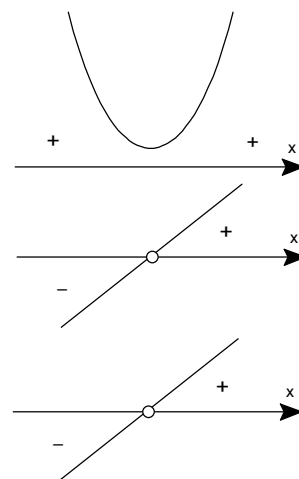
∨

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

Merkkikaavio

	-5	-1	
$f(x)$	+	+	+
$g(x)$	-	-	+
$h(x)$	-	+	+
TULO	+	-	+



$$x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq -1$$

Vastaus: a) $x < -3 \quad \vee \quad 0 < x < 2$
 b) $x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq -1$

58. a) $x < -1 \quad \vee \quad x > 2$

b) $-1 \leq x \leq 2$

59. a) Nollakohdat

$$\underbrace{(4x-3)^2}_{f(x)} \underbrace{(x-2)}_{g(x)} = 0$$

$$4x - 3 = 0$$

$$4x = 3 \quad \vee$$

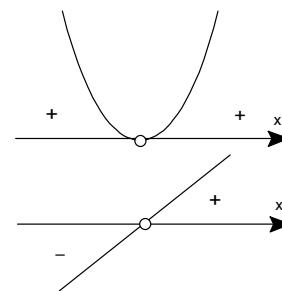
$$x = \frac{3}{4}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Merkkikaavio

	$\frac{3}{4}$	2	
$f(x)$	+	+	+
$g(x)$	-	-	+
TULO	-	-	+



$f(x) > 0$, kun $x > 2$.

b) Nollakohdat

$$3x^3 - 9x = 0$$

$$\underbrace{3x}_{f(x)} \underbrace{(x^2 - 3)}_{g(x)} = 0$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

∨

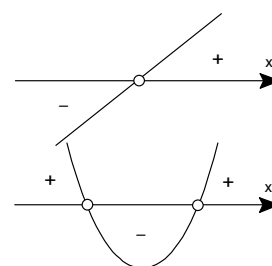
$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Merkkikaavio

	-3	0	3	
$f(x)$	-	-	+	+
$g(x)$	+	-	-	+
TULO	-	+	-	+



Kulkukaavion perusteella $f(x) > 0$, kun $-3 < x < 0 \vee x > 3$.

Vastaus: a) $x > 2$ b) $-3 < x < 0 \vee x > 3$

60. Ratkaistaan lausekkeen $3x^3 + 5x^2 - 2x$ nollakohdat

$$3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x^2 + 5x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

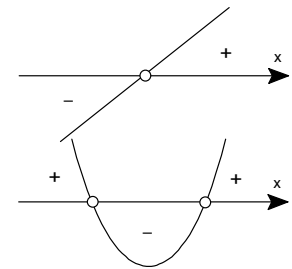
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{1}{3} \vee x = -2$$

Kulkukaavio

	-2	0	$\frac{1}{3}$	
$f(x)$	-	-	+	+
$g(x)$	+	-	-	+
TULO	-	+	-	+



a) Lauseke on positiivinen, kun $-2 < x < 0 \vee x > \frac{1}{3}$

b) Lauseke on negatiivinen, kun $x < -2 \vee 0 < x < \frac{1}{3}$

Testi 1

1. a) $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = \underline{\underline{2(x-2)(x+2)}}$

b) $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3x + 2^2 = \underline{\underline{(3x+2)^2}}$

c) $x^3 - x^2 - 16x + 16 = x^2(x-1) - 16(x-1)$
 $= (x-1)(x^2 - 16)$
 $= \underline{\underline{(x-1)(x-4)(x+4)}}$

d) $x^2 - 17 = x^2 - \sqrt{17}^2 = \underline{\underline{(x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17})}}$

2. a) $-10 \leq 5 - 3x \leq 23 \quad | -5$
 $-15 \leq -3x \leq 18 \quad | :(-3)$
 $5 \geq x \geq -6$
 $\underline{\underline{-6 \leq x \leq 5}}$

b) $(2x-8)^2 < 4x(x-8) + 5$
 $4x^2 - 32x + 64 < 4x^2 - 32x + 5$
 $65 < 5$
 epätosi

Epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) $-x^2 + x + 12 \geq 0$

Nollakohdat

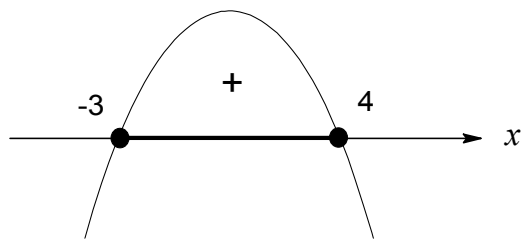
$$-x^2 + x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{-2}$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 4$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli



Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 \leq x \leq 4$.

Vastaus: a) $-6 \leq x \leq 5$ b) Ei ratkaisua
 c) $-3 \leq x \leq 4$

$$\begin{aligned} 3. \quad a) \quad \frac{2+\sqrt{7}-6}{2-\sqrt{7}} &= \frac{-6(2+\sqrt{7})}{2^2-\sqrt{7}^2} = \frac{-6(2+\sqrt{7})}{-3} \\ &= 2(2+\sqrt{7}) \\ &= 4+2\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot 2\sqrt{3} &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}^2-1^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \\ &= 3-\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 &= \sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{6}^2 \\ &= 2+2\sqrt{12}+6 \\ &= 8+2 \cdot 2\sqrt{3} \\ &= 8+4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $4+2\sqrt{7}$ b) $3-\sqrt{3}$
 c) $8+4\sqrt{3}$

4. a) $6x - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(3 - 4x) = 0$

$$\begin{array}{l} 2x = 0 \\ x = 0 \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{l} 3 - 4x = 0 \\ -4x = -3 \\ x = \frac{3}{4} \end{array}$$

b) $x^2 - 1\frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$

$$x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{2} = 0 \quad | \cdot 6$$

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3)}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{7 \pm 11}{12}$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}$$

c) $5x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-15}}{10}$$

ei reaalisia ratkaisuja

Vastaus: a) $x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{3}{4}$

b) $x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{3}$

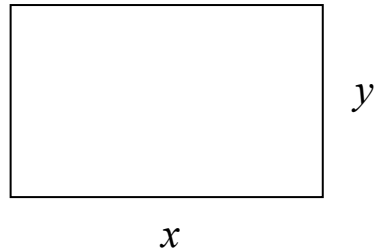
c) Ei ratkaisua

5. Puiston piiri

$$2x + 2y = 140$$

$$y = 70 - x$$

$$\begin{aligned} A(x) &= x(70 - x) \\ &= 70x - x^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A(x) = 1176 &\Leftrightarrow 70x - x^2 = 1176 \\ -x^2 + 70x - 1176 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{(70)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1176)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-70 \pm 14}{-2}$$

$$x = 28 \quad \vee \quad x = 42$$

Kun $x = 28$, $y = 70 - 28 = 42$

Kun $x = 42$, $y = 70 - 42 = 28$

Vastaus: $28m \times 42m$

6. Ratkaistaan epäyhtälö

$$-3x^3 + 15x^2 + x - 5 > 0$$

$$-3x^2(x - 5) + (x - 5) > 0$$

$$\underbrace{(x - 5)}_{f(x)} \underbrace{(1 - 3x^2)}_{g(x)} > 0$$

Nollakohtat

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

∨

$$1 - 3x^2 = 0$$

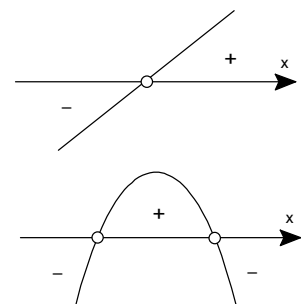
$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Merkkikaavio

	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	5	
$f(x)$	-	-	-	+
$g(x)$	-	+	-	-
TULO	+	-	+	-



$$x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < x < 5$$

Vastaus: $x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < x < 5$

7. Yhtälön $x^2 + ax + a = 0$ diskriminantti

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot a$$

$$= a^2 - 4a$$

Yhtälöllä on reaalisia ratkaisuja, kun $D \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a \geq 0$

Nollakohdat

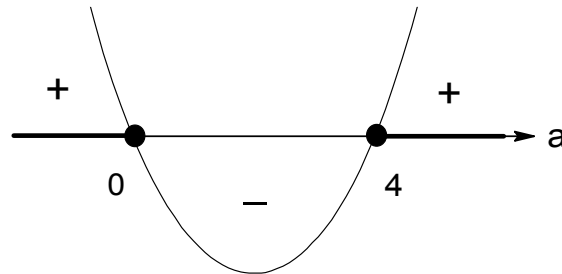
$$a^2 - 4a = 0$$

$$a(a - 4) = 0$$

$$a = 0 \quad \vee \quad a - 4 = 0$$

$$a = 4$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Yhtälöllä on reaalisia ratkaisuja, kun $a \leq 0 \quad \vee \quad a \geq 4$

Vastaus: $a \leq 0 \quad \vee \quad a \geq 4$

8. Polynomi $P(x) = x^3 + ax^2 - 3x + c$

$$P(0) = 10 \Rightarrow c = 10$$

Koska polynomi P on jaollinen binomilla $x + 3$, niin polynomilla on nollakohta $x = -3$.

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 10 \\ &= -27 + 9a + 9 + 10 \\ &= 9a - 8 \end{aligned}$$

$x = -3$ on polynomin nollakohta, joten

$$\begin{aligned} P(-3) = 0 &\Leftrightarrow 9a - 8 = 0 \\ 9a &= 8 \\ a &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Polynomi on siis $P(x) = x^3 + \frac{8}{9}x^2 - 3x + 10$

Vastaus $P(x) = x^3 + \frac{8}{9}x^2 - 3x + 10$

Testi 2

$$\begin{aligned} 1. \quad a) \quad & 3x - 2x(x - 3) \\ & = 3x - 2x^2 + 6 \\ & = \underline{\underline{-2x^2 + 9x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & 4x(x - 2)(3x + 1) \\ & = (4x^2 - 8x)(3x + 1) \\ & = 12x^3 + 4x^2 - 24x^2 - 8x \\ & = \underline{\underline{12x^3 - 20x^2 - 8x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & (2x - 5)^2 - (2x + 3)(2x - 3) \\ & = 4x^2 - 20x + 25 - (4x^2 - 9) \\ & = 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 + 9 \\ & = \underline{\underline{-20x + 34}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad & (x^2 - 2x)^2 + (x^2 + 4)(4 - x^2) \\ & = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 16 - x^4 \\ & = \underline{\underline{-4x^3 + 4x^2 + 16}} \end{aligned}$$

2. a) $(5x + 7)(2x - 3) = 0$

$$5x + 7 = 0$$

$$5x = -7$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{7}{5}}}$$

∨

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$$

b) $2x^2 + 6x - 20 = 0 \quad | :2$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -5$$

c) $(2x - 1)^2 = 4 \quad |\sqrt{\quad}$

$$2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$$

∨

$$2x - 1 = -2$$

$$2x = -1$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$$

d) $x = 3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 1) = 0$

$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \vee \quad 3x - 1 = 0$$

$$3x = 1$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \text{a) } & 2(-3x) - 4 \leq 2x + 7 \\
 & 10 - 6x - 4 \leq 2x + 7 \\
 & -8x \leq 1 \\
 & x \geq -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \underbrace{x^2 - x - 30}_{f(x)} > 0$$

Nollakohdat

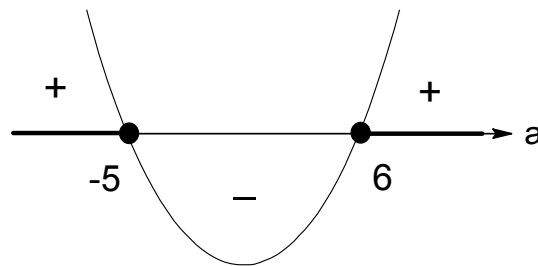
$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm 11}{2}$$

$$x = -5 \quad \vee \quad x = 6$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli



Siis $x < -5 \quad \vee \quad x > 6$.

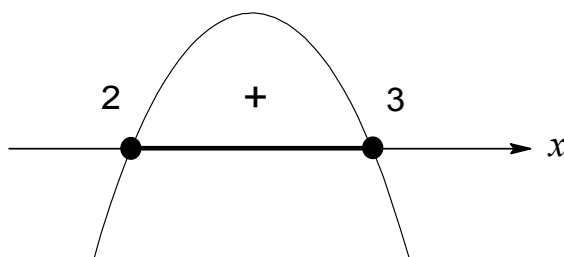
$$\text{c) } \underbrace{(x-3)(4-2x)}_{f(x)} \geq 0$$

Nollakohdat

$$\begin{array}{ccc} x-3=0 & \vee & 4-2x=0 \\ x=3 & & x=2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 2x^2 - 12 + 6x \\ &= -2x^2 + 10x - 12 \end{aligned}$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli

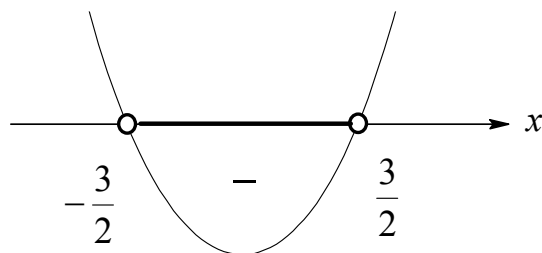


Siis $2 \leq x \leq 3$.

$$\text{d) } 4x^2 < 9 \Leftrightarrow \underbrace{4x^2 - 9}_{f(x)} < 0$$

Nollakohdat

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow 4x^2 = 9 \\ x^2 &= \frac{9}{4} \\ x &= \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli

Siis $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

4. a) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 4) = 0$

$x = 0$ \vee $x^2 - 2x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2}$$

$x = 4$ \vee $x = -1$

b) $\underbrace{(x^2 - 4)}_{f(x)} \underbrace{(2x + 3)}_{g(x)} \leq 0$

Nollakohdat

$x^2 - 4 = 0$

$2x + 3 = 0$

$x^2 = 4 \quad \vee$

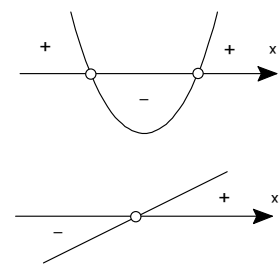
$2x = -3$

$x = \pm 2$

$x = -\frac{3}{2}$

Merkkikaavio

	-2	$-\frac{3}{2}$	2	
$f(x)$	+	-	-	+
$g(x)$	-	-	+	+
TULO	-	+	-	+



Siis $x \leq -2 \quad \vee \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

5. a) $3x^2 - 6x = \underline{\underline{3x(x-2)}}$

b) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = \underline{\underline{(2x-3)(2x+3)}}$

c) $2x^2 - 16x + 32 = 2(x^2 - 8x + 16) = \underline{\underline{2(x-4)^2}}$

d) $3x^2 - 10x - 8 = 3(x - x_1)(x - x_2)$

$$3x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x_2 = 4$$

$$3x^2 - 10x - 8 = 3\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)(x - 4)$$

$$= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 4)$$

$$= \underline{\underline{(3x + 2)(x - 4)}}$$

6. a) $4x^2 + 3x + c = 0$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot c$$

$$= 9 - 16c$$

Ainakin yksi ratkaisu, kun $D \geq 0$

$$9 - 16c \geq 0$$

$$-16c \geq -9$$

$$c \leq \frac{9}{16}$$

b) $2x^2 - 3cx + c = 0$

$$D = (-3c)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c$$

$$= 9c^2 - 8c$$

$$D \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{9c^2 - 8c}_{f(x)} \geq 0$$

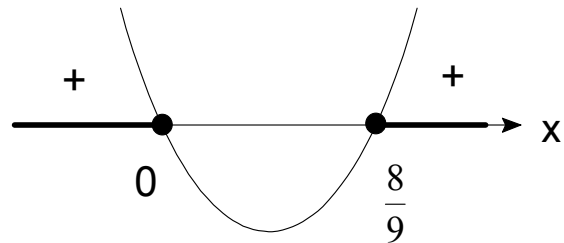
Nollakohdat

$$9c^2 - 8c = 0 \Leftrightarrow c(9c - 8) = 0$$

$$c = 0 \quad \vee \quad 9c - 8 = 0$$

$$9c = 8$$

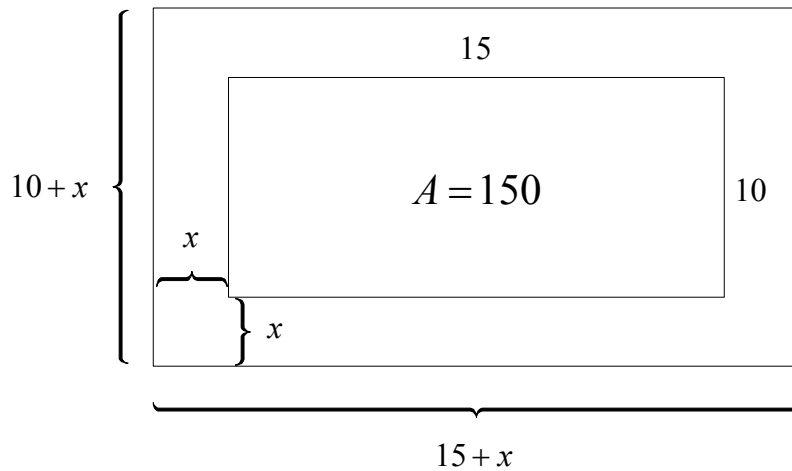
$$c = \frac{8}{9}$$



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli

$$\text{Siis } c \leq 0 \quad \vee \quad c \geq \frac{8}{9}$$

7. Merkitään leveyttä x m.



Terassin ala

$$A(x) = (15+x)(10+x) - 150$$

$$A(x) = 200 \Leftrightarrow (15+x)(10+x) - 150 = 200$$

$$150 + 15x + 10x + x^2 - 150 = 200$$

$$x^2 + 25x - 200 = 0$$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200)}}{2}$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{1425}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6,374... \\ x_2 = -31,37... \Rightarrow \text{ei kelpaa} \end{cases}$$

Siis leveys $x \approx 6,37$ m

Vastaus: $x \approx 6,37$ m

8. 20 sentin korotuksia x kappaletta

$$\text{Hinta} = 5 + 0,2x$$

$$\text{Myynti} = 80 - 10x \quad \text{myynti} \leq 150$$

$$80 - 10x \leq 150$$

$$-10x \leq 70$$

$$x \geq 7$$

$$\text{Tulot} = (5 + 0,2x)(80 - 10x)$$

$$T(x) = 400 - 50x + 16x - 2x^2$$

$$= -2x^2 - 34x + 400$$

$$T(x) \geq 300 \text{ €} \Leftrightarrow -2x^2 - 34x + 400 \geq 300$$

$$\underbrace{-2x^2 - 34x + 100}_{f(x)} \geq 0$$

Nollakohdat

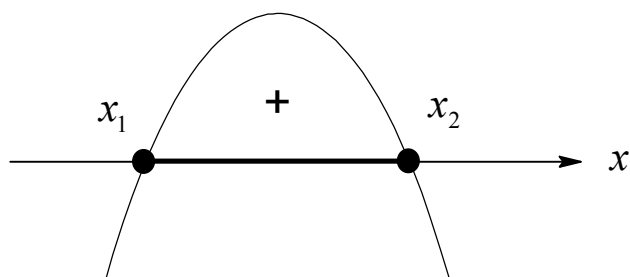
$$-2x^2 - 34x + 100 = 0$$

$$x = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 100}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{34 \pm 44,22\dots}{-4}$$

$$x_1 = -19,55\dots \quad \vee \quad x_2 = 2,5566\dots$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli



Kuvaajasta nähdään, että

$$-19,55... \leq x \leq 2,5566...$$

Toisaalta $x \geq -7$, joten

$$-7 \leq x \leq 2,5566...$$

$$\text{Hinta} = 5 + 0,2x$$

$$\text{Kun } x = -7, \text{ hinta} = 5 + 0,2(-7) = 3,6$$

$$\text{Kun } x = 2,5566..., \text{ hinta} = 5 + 0,2(2,5566...) = 5,51133...$$

Siis hinnalle $3,6 \leq \text{hinta} \leq 5,511...$

Vastaus: Hinta on välillä 3,6 € – 5,51 €.