3. Lämpölaajeneminen

Harjoittele

Tehtävä 3.1.

a) C

b) B

c) D

d) C

e) A

Tehtävä 3.2.

a) kuparin pituuden lämpötilakerroin $\alpha = 16{,}8 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{1}{\mathrm{K}}$

Jos l_0 = 1,0 m ja Δt = 1,0 °C eli ΔT = 1,0 K on pituuden muutos

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T = 16{,}8 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 1{,}0\ \mathrm{m} \cdot 1{,}0\ \mathrm{K} = 16{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} \approx 17\ \mu\mathrm{m}$$

b) alumiinin pituuden lämpötilakerroin $\alpha = 23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{1}{\mathrm{K}}$

Jos Δt = 100 °C, niin ΔT = 100 K ja uusi pituus on

$$l = l_0 + \alpha l_0 \Delta T = (1 + \alpha \Delta T) l_0 = (1 + 23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 100\ \mathrm{K}) l_0 = 1{,}00232 l_0$$

Tulkitaan luku 1,00232 prosenttikertoimeksi:

pituus muuttuu 0,23 %

Tehtävä 3.3.

Pituuden muutos $\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$, kun

lämpötilakerroin on α, alkuperäinen pituus on l_0 ja lämpötilan muutos ΔT.

Suoran fysikaalinen kulmakerroin on αl_0 eli pituuden lämpötilakertoimen ja alkuperäisen pituuden tulo. Aineen B laajenemista kuvaavan suoran kulmakerroin on suurempi kuin aineen A.

Alkuperäinen pituus on molemmilla tangoilla sama, eli aineen B lämpötilakerroin suurempi, koska pituus muuttuu enemmän samassa lämpötilan muutoksessa.

Tehtävä 3.4.

a) Kaksoismetalliliuskassa on päällekkäin kiinnitettynä kaksi eri metallia. Metallien erisuuruinen lämpölaajenemien aiheuttaa sen, että liuska taipuu, kun lämpötila muuttuu.

b) Kuvasta voidaan päätellä, että metallin 2 pituus kasvaa lämmitettäessä enemmän eli sen pituuden lämpötilakerroin on suurempi.

Invarteräksen pituuden lämpötilakerroin on $\alpha_\mathrm{i} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$ ja messingin $\alpha_\mathrm{m} = 21 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$, joten messinki laajenee lämmetessään paljon enemmän kuin invarteräs. Siten metalli 1 on invarteräs ja metalli 2 on messinki.

c) Kun kaksoismetalliliuskaa jäähdytetään, messinki supistuu enemmän koska sillä on suurempi pituuden lämpötilakerroin. Siksi metalli taipuu nyt toiseen suuntaan:

Tehtävä 3.5.

a) Mitta kutistuu pakkasessa, jolloin mitta-asteikon välit ovat tiiviimmin nauhassa ja mitta näyttää liian suuria lukemia.

b) Lämpölaajeneminen muuttaa aineen tiheyttä, mutta ei massaa. Sormuksen massa on edelleen sama.

Tehtävä 3.6.

Ääriolosuhteet: t_{min} = −35,0 °C ja t_{max} = 35,0 °C, joten
$\Delta t = t_{\mathrm{max}} - t_{min}$ = 70 °C ja ΔT = 70 K

Lähtötilanne: l_0 = 1 000 m

Teräskaapeli: $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{1}{\mathrm{K}}$

Kaapelin pituuden muutos on

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T = 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 1000\ \mathrm{m} \cdot 70\ \mathrm{K} = 0{,}84\ \mathrm{m}$$

Tehtävä 3.7.

a) Lämpötilan vaihteluvälin pituus on

ΔT = 60 °C – (–5 °C) = 65 °C = 65 K.

Oletetaan, että tornin korkeus –5 °C:n lämpötilassa on metrin tarkkuudella ilmoitettuna 324 m eli l_0 = 324 m.

Raudan lämpötilakerroin $\alpha = 11{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$

Eiffel-tornin pituuden muutos on

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T = 11{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 324\ \text{m} \cdot 65\ \text{K} = 0{,}246402\ \text{m} \approx 25\ \text{cm}.$$

Eiffel-tornin pituus vaihtelee vuoden aikana noin 25 cm.

a) Lämpötilan vaihteluvälin pituus on

ΔT = 50 °C – (–25 °C) = 75 °C = 75 K.

Oletetaan, että tornin korkeus –25 °C:n lämpötilassa on metrin tarkkuudella ilmoitettuna 168 m eli l_0 = 168 m.

Betonin lämpötilakerroin $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$

Näsinneulan pituuden muutos on

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T = 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 168\ \text{m} \cdot 75\ \text{K} = 0{,}1512\ \text{m} \approx 15\ \text{cm}.$$

Näsinneulan pituus vaihtelee vuoden aikana noin 15 cm.

Sovella

Tehtävä 3.8.

Esimerkiksi
-peltikaton pauke hellepäivän jälkeen
-hirsitalon pauke pakkasella
-järven jäätymisen äänet

Tehtävä 3.9.

Kireillä pakkasilla vesiputket voivat jäätyä. Kun vesi jäätyy, sen tilavuus kasvaa. Tämä voi halkaista putken. Usein tämä huomataan vasta, kun pakkasjakso päättyy. Putkessa oleva jää sulaa ja putki alkaa vuotaa. Jos putkeen on muodostunut jäätä ja lämpötila nousee, jään lämpölaajeneminen voi rikkoa putken. Vesiputkien jäätymistä voi ehkäistä esimerkiksi parantamalla eristystä tai asentamalla lämmitysvastuksen putkeen.

Tehtävä 3.10.

a) Jos levyä jäähdytetään, kolo pienenee. Rautalevy supistuu jäähtyessään.

b) Mehu on pääasiassa vettä. Vesi laajenee jäätyessään, joten täysi pullo menisi rikki. Jotta vedellä olisi tilaa laajentua, pulloon pitää jättää ilmaa.

c) Lasi laajenee lämmetessään. Tiskikoneesta otetut lasit eivät kaikki ole laajentuneet välttämättä yhtä paljon. Jos kylmä lasi laitetaan kuuman päälle, lasit menevät enemmän sisäkkäin kuin huoneenlämpötilassa pinottuna. Kun kuuma lasi supistuu jäähtyessään, lasit kiinnittyvät toisiinsa erittäin tiukasti. Kun laseja irrotetaan toisistaan, ne saattavat hajota.

Tehtävä 3.11.

Helikopterikannen halkeaminen pakkasessa johtuu todennäköisimmin lämpölaajenemisesta. Lämpötilan laskiessa alumiinikannen mitat ovat pienentyneet. Yhtälön mukaan $l = l_0 + \alpha l_0 \Delta T$, eli pituuden muutos riippuu lämpötilan muutoksesta ΔT, alkuperäisestä pituudesta l_0 ja materiaalista α

(pituuden lämpötilakerroin). Alumiinin pituuden

lämpötilakerroin on $\alpha_{\mathrm{Al}} = 23{,}2 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{1}{\mathrm{K}}$ ja

raudan $\alpha_{\mathrm{Fe}} = 11{,}7 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{1}{\mathrm{K}}$.

Alumiininen helikopterikansi laajenee lämpimässä ja pienenee kylmässä noin kaksinkertaisesti enemmän kuin laivan rautainen runko. Kesällä kannessa on puristusjännitys ja talvella vetojännitys.

Lisäksi rauta on joustavampaa materiaalia kuin alumiini.

Tehtävä 3.12.

a) Teräksen lämpötilakerroin $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$

Öljytankkerin pituus on lyhimmillään 0 °C lämpötilassa, tällöin lämpötilan muutos
ΔT_{min} = 0 °C – (20 °C) = − 20 °C = −20 K.

Öljytankkerin pituus on suurimmillaan 30 °C lämpötilassa, tällöin lämpötilan muutos
ΔT_{max} = 30 °C – (20 °C) = 10 °C = 10 K.

Öljytankkerin pituus on lyhimmillään

$$\begin{aligned} l_{\text{min}} &= l_0 + \alpha l_0 \Delta T_{\text{min}} \\ &= 252{,}0\ \text{m} + 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 252{,}0\ \text{m} \cdot (-20\ \text{K}) \\ &= 251{,}9395\ \text{m}. \end{aligned}$$

Öljytankkerin pituus on pisimmillään

$$\begin{aligned} l_{\text{max}} &= l_0 + \alpha l_0 \Delta T_{\text{max}} \\ &= 252{,}0\ \text{m} + 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 252{,}0\ \text{m} \cdot 10\ \text{K} \\ &= 252{,}0302\ \text{m}. \end{aligned}$$

Öljytankkerin pituus vaihtelee

$\Delta l = l_{\text{max}} - l_{\text{min}} =$ 252,0302 m – 251,9395 m =

0,0907 m ≈ 10 cm

b) Öljysäiliön tilavuus on suurimmillaan, kun meriveden lämpötila on korkeimmillaan. Säiliöön laitettavan öljyn lämpölaajeneminen on suurempaa kuin teräksen lämpölaajeneminen, joten säiliöön mahtuu eniten öljyä, kun meriveden lämpötila on matalimmillaan.

Tehtävä 3.13.

Osien halkaisijat ovat

l_{Fe} = 60,00 mm

l_{Al} = 59,80 mm

Raudan ja alumiinin pituuden lämpötilakertoimet ovat

$\alpha_{Fe} = 11{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K} \qquad \alpha_{Al} = 23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K}$

Kertoimista huomataan, että kun osia lämmitetään, alumiini laajenee enemmän kuin rauta. Tästä voidaan päätellä, että alumiinimäntä juuttuu lopulta kiinni rautasylinteriin. Tällöin rautasylinterin sisähalkaisija on yhtä suuri kuin alumiinimännän ulkohalkaisija, eli

$$
\begin{aligned}
l_{Al,lopussa} &= l_{Fe,lopussa} \\
l_{Al} + \alpha_{Al} l_{Al} \Delta T &= l_{Fe} + \alpha_{Fe} l_{Fe} \Delta T \\
\alpha_{Al} l_{Al} \Delta T - \alpha_{Fe} l_{Fe} \Delta T &= l_{Fe} - l_{Al} \\
(\alpha_{Al} l_{Al} - \alpha_{Fe} l_{Fe}) \Delta T &= l_{Fe} - l_{Al} \\
\Delta T &= \frac{l_{Fe} - l_{Al}}{\alpha_{Al} l_{Al} - \alpha_{Fe} l_{Fe}} \\
&= \frac{(60{,}00 - 59{,}80)\,\text{mm}}{23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K} \cdot 59{,}80\ \text{mm} - 11{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K} \cdot 60{,}00\ \text{mm}} \\
&= 291.817\ \text{K} \approx 292\ \text{K}
\end{aligned}
$$

Sylintereitä pitää siis lämmittää 292 °C, jolloin loppulämpötila on 20 °C + 292 °C = 312 °C.

Tehtävä 3.14.

Pituuden lämpötilakerroin teräkselle $\alpha_{\text{teräs}} = 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$

Alussa akselin halkaisija on 0,11 % suurempi kuin reikä eli $l_{\text{alussa}} = 1{,}0011 \cdot l_{\text{reikä}}$

Lopussa on oltava $l_{\text{lopussa}} = l_{\text{reikä}}$

Lämpölaajenemiselle voidaan kirjoittaa $l_{\text{lopussa}} = l_{\text{alussa}} + \alpha_{\text{teräs}} l_{\text{alussa}} \Delta T$.

Ratkaistaan tästä lämpötilan muutos.

$$\begin{aligned}
l_{\text{lopussa}} &= l_{\text{alussa}} + \alpha_{\text{teräs}} l_{\text{alussa}} \Delta T \\
l_{\text{lopussa}} - l_{\text{alussa}} &= \alpha_{\text{teräs}} l_{\text{alussa}} \Delta T \\
\Delta T &= \frac{l_{\text{lopussa}} - l_{\text{alussa}}}{\alpha_{\text{teräs}} l_{\text{alussa}}} \\
&= \frac{\cancel{l}_{\text{reikä}} - 1{,}0011 \cdot \cancel{l}_{\text{reikä}}}{\alpha_{\text{teräs}} \cdot 1{,}0011 \cdot \cancel{l}_{\text{reikä}}} \\
&= \frac{1 - 1{,}0011}{1{,}0011 \cdot \alpha_{\text{teräs}}} \\
&= \frac{1 - 1{,}0011}{1{,}0011 \cdot 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}} \\
&= -91{,}566\ \text{K} \approx -92\ \text{K}
\end{aligned}$$

Teräsakseli pitää siis jäähdyttää 92 °C kylmemmäksi kuin kiekko.

Tehtävä 3.15.

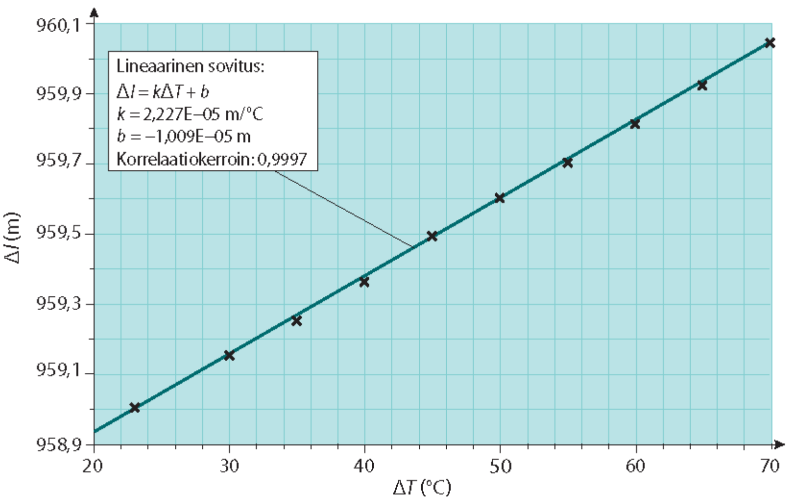
Alumiini laajenee, kun sen lämpötila nousee. Alumiinin pituus lämpötilan muutoksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$l = l_0 + l_0 \alpha \Delta T,$$

missä l on putken pituus lämpötilan muutoksen jälkeen, l_0 on putken pituus alkulämpötilassa, α on pituuden lämpötilakerroin ja ΔT on lämpötilan muutos. Kun lämpötila muuttuu, putken pituuden muutos on

$$l - l_0 = l_0 \alpha \Delta T$$
$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T.$$

Tällöin (ΔT, Δl)-koordinaatistoon piirretyn kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on $l_0\alpha$. Lasketaan uudet arvot lämpötilan ja pituuden muutoksille, tehdään (ΔT, Δl)-koordinaatistoon kuvaaja ja määritetään mittausaineistoon sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin.



Kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin

$$l_0\alpha = 2{,}227 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}}{°\text{C}}.$$

Aineistosta nähdään, että putken pituus mittauksen alussa oli $l_0 =$ 959 mm. Alumiinin pituuden lämpötilakertoimeksi saadaan

$$\alpha = \frac{2{,}227 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}}{°\text{C}}}{l_0} = \frac{2{,}227 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}}{°\text{C}}}{0{,}959\,\text{m}} = 23{,}2221 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{°\text{C}} \approx 23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{°\text{C}}.$$

Alumiinin pituuden lämpötilakerroin on mittauksen perusteella $23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{°\text{C}} = 23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$

Tehtävä 3.16.

a) Kun kuulaa lämmitetään, kuula laajenee. Kuula ei mahdu aukosta.

b) Kun metallilevyä lämmitetään, se laajenee ja samalla myös metallilevyssä olevan aukon koko kasvaa. Kuula mahtuu aukosta levyn lämmittämisen jälkeen.

c) Vesi vastaanotti energiaa metallikuulalta, jolloin kuula jäähtyi ja kuulan lämpötila laski. Tällöin kuulan halkaisija pieneni.

Tehtävä 3.18.
Maapallon merien pinta-alan ja syvyyden avulla saadaan merien tilavuus:

A = 3,6 · 10^8 km^2 = 3,6 · 10^{14} m^2

h = 3 700 m

$$V = Ah = 3{,}6 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2 \cdot 3\,700\ \text{m} = 1{,}332 \cdot 10^{18}\ \text{m}^3$$

$\gamma = 1{,}37 \cdot 10^{-4}\ \dfrac{1}{\text{K}}$ ja $\Delta T = 0{,}025$ K, joten meriveden tilavuuden kasvu on lämpölaajenemisen vuoksi

$$\Delta V = \gamma V \Delta T = 1{,}37 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 1{,}332 \cdot 10^{18}\ \text{m}^3 \cdot 0{,}025\ \text{K} = 4{,}5621 \cdot 10^{12}\ \text{m}^3$$

Meriveden pinnannousu on

$$\Delta V = A \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{A} = \frac{4{,}5621 \cdot 10^{12}\ \text{m}^3}{3{,}6 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2} = 0{,}01267\ \text{m} \approx 1{,}3\ \text{cm}$$

(Tai sieventämällä $\Delta h = \dfrac{\Delta V}{A} = \dfrac{\gamma V \Delta T}{A} = \gamma h \Delta T$.)

Meriveden pinta nousee lämpölaajenemisen vuoksi 1,3 cm kymmenessä vuodessa.

Tehtävä 3.19.

Kun lämpötilan muutos on Δt = 1,0 °C eli ΔT = 1,0 K, etanolin tilavuus kasvaa lämpölaajenemisen vuoksi.

Etanolin tilavuuden lämpötilakerroin on $\gamma = 1{,}10 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$.

Nestepinta nousee h = 2,0 mm verran.

Kapillaariputken sisähalkaisija on d = 1,20 mm ja säde r = 0,60 mm.

Lasketaan etanolin tilavuuden muutos lieriön tilavuuden kaavalla

$$\Delta V = Ah = \pi r^2 h = \pi(0{,}60\ \mathrm{mm})^2 \cdot 2{,}0\ \mathrm{mm} = 2{,}261947\ \mathrm{mm}^3$$

Tilavuuden lämpölaajenemiselle pätee $\Delta V = \gamma V_0 \Delta T$, josta voidaan ratkaista tarvittavan lasisäiliön tilavuus V_0:

$$V_0 = \frac{\Delta V}{\gamma \Delta T} = \frac{2{,}261947\ \mathrm{mm}^3}{1{,}10 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 1{,}0\ \mathrm{K}} = 2056{,}315\ \mathrm{mm}^3 \approx 2{,}1\ \mathrm{cm}^3$$

Lasisäiliön tilavuuden on siis oltava 2,1 cm^3 eli 2,1 ml.

Tehtävä 3.20.
Tulokset laskettu todellisen mittauksen perusteella. Lukuarvot ovat viitteellisiä.

a) Kylmän veden massa m_0 = 2346 g

Veden massa lisäyksen jälkeen m = 2382 g

Veden lämpötila alussa T_a = 16 °C

Veden lämpötila lopussa T_l = 93 °C

Vesi laajenee, kun sitä lämmitetään. Veden uusi tilavuus

$V = V_0 + V_0 \gamma \Delta T$, jossa V_0 on veden tilavuus alussa, γ on tilavuuden lämpötilakerroin ja ΔT on lämpötilan muutos.

Veden tilavuudet alussa ja lopussa saadaan kylmän veden massojen avulla.

Veden tilavuus alussa

$$V_0 = \frac{m_0}{\rho} = \frac{2{,}346\,\text{kg}}{1{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}} = 2{,}346\,\text{l}$$

Veden tilavuus kuumentamisen jälkeen

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{2{,}382\,\text{kg}}{1{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}} = 2{,}382\,\text{l}$$

Lämpölaajenemista kuvaavasta yhtälöstä voidaan ratkaista veden tilavuuden lämpötilakerroin

$$\gamma = \frac{V - V_0}{V_0 \Delta T} = \frac{2{,}382\,\mathrm{l} - 2{,}346\,\mathrm{l}}{2{,}346\,\mathrm{l} \cdot (93 - 16)\,\mathrm{K}} = 0{,}19928 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}} \approx 0{,}20 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$$

b) Veden tilavuuden lämpötilakerroin kirjallisuudessa

$$\gamma_0 = 0{,}21 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$$

Verrataan tulosta kirjallisuusarvoon

$$\frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma} = \frac{0{,}19928 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}} - 0{,}21 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}}{0{,}21 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}} \cdot 100\,\% = 5{,}100\,\% \approx 5{,}1\,\%$$

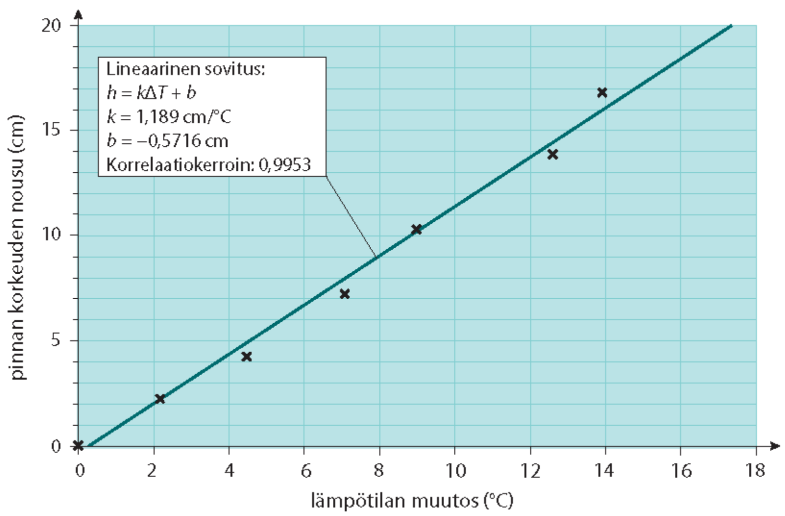
Mahdollisia virhelähteitä ovat muun muassa tilavuuden muutoksen tarkkaan mittaamiseen liittyvät ongelmat sekä lämpötilan mittaamisessa syntyneet virheet. Lisäksi osa nesteestä höyrystyy, jolloin tilavuuden muutos on pienempi kuin todellisuudessa.

Syvennä

Tehtävä 3.21.

Esitetään mittaustulokset (ΔT, h)-koordinaatistossa. Huomataan, että nestepatsaan korkeus riippuu lineaarisesti lämpötilan muutoksesta. Sovitetaan aineistoon suora, jonka fysikaalinen kulmakerroin on

$$k = 1{,}189\ \frac{\text{cm}}{°\text{C}}$$



Putken sisähalkaisija d = 4,8 mm ja säde r = 2,4 mm = 0,24 cm.

Nesteen määrä alussa V_0 = 233,4 ml = 233,4 cm^3.

Tilavuuden lämpölaajenemiselle pätee $\Delta V = \gamma V_0 \Delta T$, jossa ΔV on tilavuuden muutos, γ on tilavuuden lämpötilakerroin ja ΔT lämpötilan muutos.

Putkessa tapahtuva tilavuuden muutos saadaan lieriön tilavuuden avulla $\Delta V = Ah = \pi r^2 h$.

Yhdistämällä edelliset saadaan $\pi r^2 h = \gamma V_0 \Delta T$, josta

$$h = \frac{\gamma V_0}{\pi r^2} \Delta T.$$

Tilannetta kuvaa (ΔT, h)-koordinaatistossa suora, jonka fysikaalinen kulmakerroin on $k = \frac{\gamma V_0}{\pi r^2}$.

Ratkaistaan tilavuuden lämpötilakerroin kulmakertoimen avulla:

$$k = \frac{\gamma V_0}{\pi r^2} \Rightarrow \gamma = \frac{k \pi r^2}{V_0} = \frac{1{,}189\ \frac{\text{cm}}{{}^\circ\text{C}} \cdot \pi \cdot (0{,}24\ \text{cm})^2}{233{,}4\ \text{cm}^3} = 9{,}21835 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{{}^\circ\text{C}} \approx 9{,}2 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{{}^\circ\text{C}}$$

Tuntemattoman nesteen tilavuuden lämpötilakerroin on

$$9{,}2 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{{}^\circ\text{C}} = 9{,}2 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{K}}.$$

Tehtävä 3.22.

Etanolin tiheys alussa $\rho = 790\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

etanolin tilavuuden lämpötilakerroin $\gamma = 1{,}10 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{K}}$

ja lämpötilan muutos ΔT = (−30 °C) –
20 °C = −50 °C = −50 K

Etanolin tiheys muuttuu lämpölaajenemisen seurauksena.
Tutkitaan tiettyä määrää etanolia, jonka massa on m.

Alussa etanolin tiheys on $\rho = \frac{m}{V}$, josta massa $m = \rho V$.

Lopussa etanolin tiheys on $\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{m}{V + \gamma V \Delta T}$, jossa V_1 on etanolin lämpölaajenemisen vuoksi muuttunut tilavuus.

Yhdistetään yhtälöt:

$$\rho_1 = \frac{m}{V + \gamma V \Delta T} = \frac{\rho \cancel{V}}{\cancel{V}(1 + \gamma \Delta T)} = \frac{\rho}{1 + \gamma \Delta T} = \frac{790\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1 + 1{,}10 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{K}} \cdot (-50\,\text{K})} = 835{,}9788\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 840\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Etanolin tiheys −30 °C:n lämpötilassa on 840 kg/m^3.

Tehtävä 3.23.

a) Jos vesi olisi tiheimmillään 0 °C:ssa järven jäätyminen alkaisipohjasta ja järven eliöstön talvehtiminen vaikeutuisi. Järven vesien syys- ja kevätkiertoa ei tapahtuisi, joten vedet eivät sekoittuisi eikä pohjalle päätyisi hapekasta vettä. Seurauksena olisi happikato järven pohjalla. Vesien sekoittuminen jakaa hapen ja ravinteet tasaisesti järven vesimassaan.

b) Kun T = +4 °C, veden tiheys on $\rho = 0{,}999973\ \mathrm{g/cm^3}$.

Kun T = +20 °C, veden tiheys on $\rho = 0{,}99820\ \mathrm{g/cm^3}$.

Yhdessä kuutiometrissä on 10^6 kuutiosenttimetriä.

Veden massa lämpötilassa +4 °C on

$$m_1 = \rho_1 V = 0{,}999973\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}} \cdot 10^6\ \mathrm{cm^3} = 999\,973\,\mathrm{g}.$$

Veden massa lämpötilassa +20 °C on

$$m_2 = \rho_2 V = 0{,}99820\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}} \cdot 10^6\ \mathrm{cm^3} = 998\,200\,\mathrm{g}.$$

(Erotus
$m_1 - m_2$ = 999 973 g – 998 200 g = 1 773 g ≈ 1 770 g,

eli +4 °C lämpötilassa vettä on kuutiometrissä 1 770 g enemmän.)

Tehtävä 3.24.

a) Lämminvesivaraajan on eristetty, joten veden ja varaajan lämpötila on lämmittämisen jälkeen sama 74 °C. (2 p)

b) Lämminvesivaraajan tilavuus alussa V = 300 l ja

varaajan lämpötilan muutos
ΔT = 74 °C – 12 °C = 62 °C = 62 K

veden tilavuuden lämpötilakerroin $\gamma_{\text{vesi}} = 0{,}21 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{K}}$

teräksen pituuden lämpötilakerroin $\alpha_{\text{teräs}} = 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$

teräksen tilavuuden lämpötilakerroin on silloin
$\gamma_{\text{teräs}} = 3\alpha_{\text{teräs}} = 3 \cdot 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} = 36 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}.$

(arvojen löytäminen taulukosta ja lämpötilan muutoksen laskeminen 1 p, teräksen lämpötilakertoimen lasku 1 p)

Lämminvesivaraajan tilavuuden muutos on

$\Delta V_{\text{teräs}} = \gamma_{\text{teräs}} V_0 \Delta T = 36 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 300\ \text{l} \cdot 62\ \text{K} = 0{,}6696\ \text{l} \approx 0{,}67\ \text{l}$
(2 p)

Veden tilavuuden muutos on

$$\Delta V_{vesi} = \gamma_{vesi} V_0 \Delta T = 0{,}21 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 300\,\mathrm{l}\ \cdot 62\,\mathrm{K} = 3{,}906\ \mathrm{l} = 3{,}9\ \mathrm{l}$$

(2 p)

c) Vettä valuu yli b)-kohdan tulosten perusteella

$$\Delta V = \Delta V_{\mathrm{vesi}} - \Delta V_{\mathrm{teräs}} = 3{,}906\,\mathrm{l} - 0{,}6696\,\mathrm{l} = 3{,}2364\,\mathrm{l}\ \approx\ 3{,}2\ \mathrm{l}.$$

(2 p)

d) Lämminvesivaraaja on huonetta lämpimämpi, joten se luovuttaa energiaa huoneeseen (1 p), jolloin varaajaa ja varaajassa oleva vettä pitäisi lämmittää koko ajan (1 p) ja lämpimän veden lämmittäminen vaatisi huomattavasti enemmän energiaa (1 p). Eristämätön lämminvesivaraaja lämmittäisi ympäristöä, jolloin varaajan lähelle ei voisi sijoittaa mitään. Tämä olisi rakennuksen tilankäytön kannalta ongelmallista (2 p) Myös muista järkevistä perusteluista voi saada pisteitä, kuten lämminvesivaraajan pataan muodostuvan kondenssiveden mainitsemisesta.