

16 Liikemäärä säilyy törmäyksissä

Mekaaninen energia heti törmäyksen jälkeen on

$$E_{\text{mek, jälkeen}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2} \cdot (920 \text{ kg} + 940 \text{ kg}) \cdot (25,9954 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 628,564 \text{ kJ}.$$

Törmäyksessä vapautuneen energian määrä on näiden energioiden erotus:

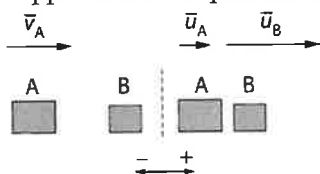
$$E_{\text{mek, lopussa}} - E_{\text{mek, alku}} = 633,635 \text{ kJ} - 628,564 \text{ kJ} \approx 5,2 \text{ kJ}.$$

16-7.

- Liikkuvan pallon liikkeen suunta muuttuu, jos liikkuva pallo on massaltaan pienempi kuin pallo joka on paikallaan. Molempiin palloihin kohdistuu saman suuruinen impulssi, joten kevyemmän pallon nopeus muuttuu enemmän.
- Jos toinen palloista on aluksi paikallaan, törmäyksen jälkeen alussa liikkunut pallo pysähtyy kokonaan. Törmäyksen jälkeen liikkuvalla pallolla on sama liikemäärä, kuin aluksi liikkuneella pallolla oli ennen törmäystä. Vastaava ilmiö tapahtuu myös, vaikka molemmat pallot liikkuisivat ennen törmäystä: pallot "vaihtavat" liikemääränsä keskenään. Kahden pallon systeemin kokonaisliikemäärä ei muutu.
- Nokkakolarissa kevyemmän pallon loppunopeus törmäyksen jälkeen on aina suurempi kuin massiivisemmän pallon. Kevyemmän pallon nopeus törmäyksen jälkeen voi olla pienempi vain tilanteessa, jossa pallot kulkevat aluksi samaan suuntaan.

16-8.

- Aluksi kappale A on tasaisessa liikkeessä ja B levossa. Hetkellä 0,50 s kappale A törmää kappaleeseen B. Törmäyksen jälkeen A:lla ja B:llä on erisuuret vakionopeudet. Molemmat liikkuvat kappaleen A alkuperäisen nopeuden suuntaan.



- Liikemäärä säilyy törmäyksessä. Ennen törmäystä $m_B \bar{v}_B = 0$, joten kuvan merkinnöillä saadaan yhtälö $m_A \bar{v}_A = m_A \bar{u}_A + m_B \bar{u}_B$. Valitaan kappaleiden liikesuunta positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $m_A v_A = m_A u_A + m_B u_B$ eli $m_A(v_A - u_A) = m_B u_B$ saadaan kappaleen A massaksi

$$m_A = \frac{u_B}{v_A - u_A} m_B.$$

Kappaleiden nopeudet saadaan kappaleiden paikan kuvaajista suorien fysikaalisina kulmakertoimina:

$$v_A = \frac{\Delta x_{A1}}{\Delta t_{A1}} = \frac{0,80 \text{ m}}{0,50 \text{ s}} = 1,6 \text{ m/s}, \quad u_A = \frac{\Delta x_{A2}}{\Delta t_{A2}} = \frac{0,20 \text{ m}}{0,50 \text{ s}} = 0,40 \text{ m/s} \quad \text{ja} \quad u_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} = \frac{1,0 \text{ m}}{0,50 \text{ s}} = 2,0 \text{ m/s}.$$

Kappaleen A massa on

$$m_A = \frac{u_B}{v_A - u_A} m_B = \frac{2,0 \text{ m/s}}{1,6 \text{ m/s} - 0,40 \text{ m/s}} \cdot 51 \text{ g} = 85 \text{ g}.$$

- Kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia ennen törmäystä on

$$E_{\text{kl}} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,085 \text{ kg} \cdot (1,6 \text{ m/s})^2 + 0 \text{ J} = 0,1088 \text{ J} \approx 0,11 \text{ J}$$

16 Liikemäärä säilyy törmäyksissä

16-4.

Täysin kimmoisa törmäys	Ei ole määritelty fysiikan käsite
Kimmoisa törmäys	Harvinainen makromailmassa
Täysin kimmoton törmäys	Kappaleet takertuvat toisiinsa
Kimmoton törmäys	Mekaaninen energia ei säily
Kaikki törmäykset	Liikemäärä säilyy

16-5.

$$m_{\text{tutkija}} = 75 \text{ kg}, m_{\text{vaunu}} = 210 \text{ kg}, v_{\text{tutkija}} = 1,5 \text{ m/s}$$

- a) Alussa liikemäärä on nolla. Kun tutkija alkaa kävellä, hänen liikemääränsä on

$$p_{\text{tutkija}} = m_{\text{tutkija}} v_{\text{tutkija}} = 75 \text{ kg} \cdot 1,5 \text{ m/s} = 112,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Liikemäärän säilymislain mukaan vaunun liikemäärä on yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin tutkijan liikemäärä niin, että liikemäärien summa on nolla. Vaunun liikemäärän suuruudelle saadaan silloin yhtälö $p_{\text{vaunu}} = m_{\text{vaunu}} v_{\text{vaunu}} = p_{\text{tutkija}}$ eli

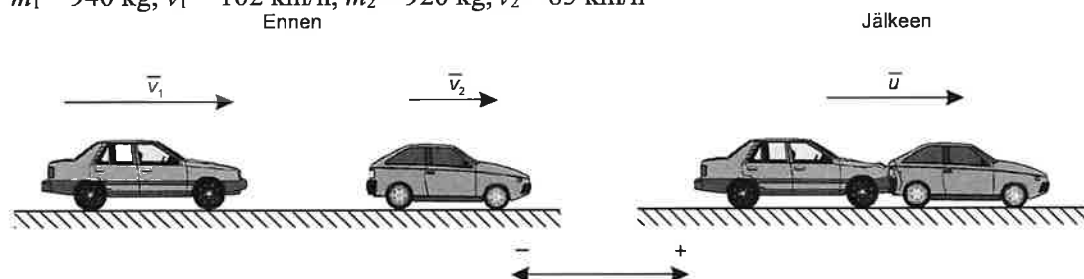
$$v_{\text{vaunu}} = \frac{p_{\text{tutkija}}}{m_{\text{vaunu}}} = \frac{112,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{210 \text{ kg}} \approx 0,54 \text{ m/s}.$$

Vaunun liikkeen suunta on tutkijan kävelysuunnalle vastakkainen.

- b) Kun tutkija pysähtyy, hänen liikemääränsä on nolla. Liikemäärän säilymisen perusteella myös vaunun liikemäärä on nolla eli myös vaunu pysähtyy.

16-6.

$$m_1 = 940 \text{ kg}, v_1 = 102 \text{ km/h}, m_2 = 920 \text{ kg}, v_2 = 85 \text{ km/h}$$



- a) Autojen törmäys on kimmoton, jolloin liikemäärän säilymlaki on

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = (m_1 + m_2) \bar{u}.$$

Sovitaan autojen alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi, jolloin

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Autojen yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{940 \text{ kg} \cdot \frac{102}{3,6} \text{ m/s} + 920 \text{ kg} \cdot \frac{85}{3,6} \text{ m/s}}{940 \text{ kg} + 920 \text{ kg}} = 25,9954 \text{ m/s} \approx 26 \text{ m/s}.$$

Autot liikkuvat törmäyksen jälkeen nopeudella 26 m/s (94 km/h) kummankin auton alkuperäisen liikkeen suuntaan.

- b) Autojen mekaaninen energia on yksin liike-energiaa. Mekaaninen energia ennen törmäystä on autojen liike-energioiden summa:

$$E_{\text{mek, ennen}} = E_{\text{kin,1}} + E_{\text{kin,2}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 940 \text{ kg} \cdot \left(\frac{102}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 920 \text{ kg} \cdot \left(\frac{85}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 633,748 \text{ kJ}.$$

16 Liikemäärä säilyy törmäyksissä

ja törmäyksen jälkeen

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0,085 \text{ kg} \cdot (0,40 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,051 \text{ kg} \cdot (2,0 \text{ m/s})^2 \approx 0,1088 \text{ J} = 0,11 \text{ J}.$$

Huomataan, että liike-energia säilyy, joten törmäys on kimmoisa.

16-9.

$$m = 73 \text{ g}, v = 13 \text{ m/s}.$$

- a) Sovitaan pallon liikkeen suunta positiiviseksi. Kun pallo törmää seinään täysin kimmottomasti, se takertuu seinään ja sen nopeus törmäyksen jälkeen on (likimain) nolla. Pallon liikemäärän muutos, eli palloon kohdistunut impulssi on
- $$I_{\text{palloon}} = \Delta p = m_{\text{pallo}} \cdot \Delta v = 0,073 \text{ kg} \cdot (0 \text{ m/s} - 13 \text{ m/s}) \approx -0,95 \text{ Ns}.$$
- Seinään kohdistunut impulssi on yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen, joten seinään kohdistunut impulssi on $I_{\text{seinään}} = 0,95 \text{ Ns}$.

- b) Kimmoisassa törmäyksessä mekaaninen energia säilyy, joten törmäyksessä pallo kimpoaa seinästä yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella, nopeudella, kuin millä se siihen törmäsi. Pallon nopeuden muutos on nyt

$$\Delta v = u - v = -13 \text{ m/s} - 13 \text{ m/s} = -26 \text{ m/s}$$

ja palloon kohdistunut impulssi on

$$I_{\text{palloon}} = \Delta p = m_{\text{pallo}} \cdot \Delta v = 0,073 \text{ kg} \cdot (-26 \text{ m/s}) \approx -1,9 \text{ Ns}.$$

Seinään kohdistunut impulssi on yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen, eli $I_{\text{seinään}} = 1,9 \text{ Ns}$.

16-10.

Liikemäärä määritellään kappaleen massan ja nopeuden tulona $p = mv$. Kahdella kappaleella voi olla sama liikemäärä, vaikka niiden nopeus olisi eri - tällöin kappaleiden massojen täytyy olla erilaiset. Liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$). Näin ollen, vaikka kahdella kappaleella olisi sama liikemäärä, nopeammalla, kevyellä, kappaleella on suurempi kineettinen energia, verrattuna massiivisempaan, hitaampaan, kappaleeseen.

Todistetaan väite vielä vasta-esimerkillä. Oletetaan, että kahden kappaleen (A ja B) liikemäärät ovat yhtä suuret. Jos kappaleiden liike-energian voisi päätellä liikemäärästä, molemmilla kappaleilla pitäisi siten olla välttämättä sama liike-energia.

Olkoon kappaleen A massa m ja nopeuden suuruus v , ja kappaleen B massa $2m$ ja nopeuden suuruus $\frac{1}{2}v$. Kappaleiden liikemäärät ovat yhtä suuret:

$$p_A = mv \text{ ja}$$

$$p_B = 2m \cdot \frac{1}{2}v = mv.$$

Kappaleiden liike-energiat ovat kuitenkin erisuuruiset:

$$E_{\text{kin,A}} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ja}$$

$$E_{\text{kin,B}} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (\frac{1}{2}v)^2 = \frac{1}{4}mv^2.$$

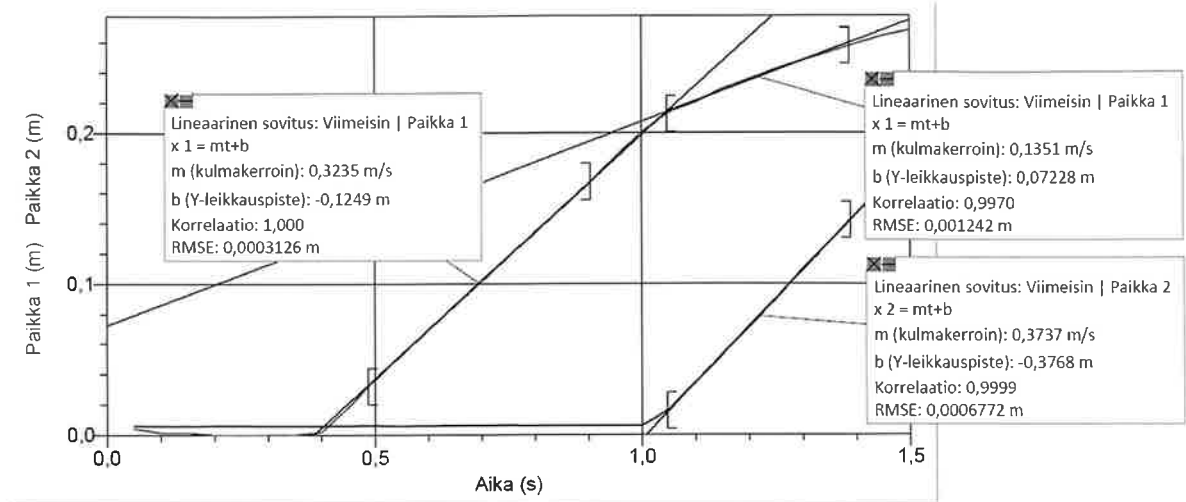
Liike-energiaa ei siten voi päätellä liikemäärästä.

16-11.

$$m_1 = 1,044 \text{ kg}, m_2 = 0,514 \text{ kg}$$

- a) Mittausohjelmasta saatujen kuvaajien kulmakertoimien avulla voidaan selvittää vaunujen nopeudet ennen ja jälkeen törmäyksen.

16 Liikemäärä säilyy törmäyksissä



Vaunun 1 nopeus ennen törmäystä on $v_{1,a} = 0,3235 \text{ m/s}$ ja törmäyksen jälkeen $v_{1,l} = 0,1351 \text{ m/s}$.
Vaunun 2 nopeus ennen törmäystä on $v_{2,a} = 0 \text{ m/s}$ ja törmäyksen jälkeen $v_{2,l} = 0,3737 \text{ m/s}$.

- b) Mittausohjelmasta saaduista kuvaajista saadaan selville törmäävän vaunun nopeus ennen sen törmäämistä paikallaan olevaan vaunuun ja molempien vaunujen nopeudet törmäyksen jälkeen.

Vaunujen yhteen laskettu liikemäärä ennen törmäystä on

$$p_a = p_{1,a} + p_{2,a} = 1,044 \text{ kg} \cdot 0,3235 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0 = 0,337734 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

ja törmäyksen jälkeen

$$p_l = p_{1,l} + p_{2,l} = 1,044 \text{ kg} \cdot 0,1351 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,514 \text{ kg} \cdot 0,3737 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,333126 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

Mittauksen mukaan liikemäärä ennen ja jälkeen törmäyksen on sama kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Hieman alempi liikemäärä törmäyksen jälkeen saattaa johtua vaunujen liikettä vastustavien voimien aiheuttamasta impulssista.

16-12.

$$m_1 = 0,0100 \text{ kg}, m_2 = 3,5 \text{ kg}, h = 0,25 \text{ m}, g = 9,81 \text{ m/s}^2, v_2 = 0 \text{ m/s}$$

Törmäykseen voidaan soveltaa liikemäärän säilymlakia. Luoti ja puukappale liikkuvat törmäyksen jälkeen yhdessä, joten törmäys on kimmoton. Liikemäärän säilymlain mukaan on

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}, \text{ kun } \vec{v}_1 \text{ on luodin nopeus ennen osumaa ja } \vec{u} \text{ luodin ja puukappaleen yhteinen nopeus heti osuman jälkeen. Sovitaan luodin nopeuden suunta positiiviseksi. Koska puupala oli aluksi levossa eli } v_2 = 0 \text{ m/s, liikemäärän säilymlaki skalaariyhtälönä on } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u, \text{ joten luodin nopeus ennen törmäystä oli } v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u.$$

Sovelletaan törmäyksen jälkeiseen puupalan kohoamiseen mekaanisen energian säilymlakia. Sovitaan luodin lentoradan taso alussa potentiaalienergian nollatasoksi. Luotia ja puukappaletta voidaan pitää törmäyksen jälkeen yhtenä kappaleena, jonka liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi.

Mekaanisen energian säilymlain mukaan on

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = (m_1 + m_2) g h,$$

16 Liikemäärä säilyy törmäyksissä

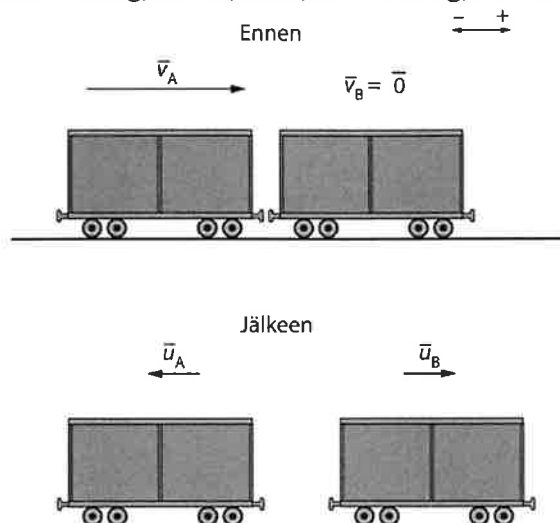
joten luodin ja puukappaleen yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on $u = \sqrt{2gh}$. Luodin nopeus ennen törmäystä oli

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

$$= \frac{0,0100 \text{ kg} + 3,5 \text{ kg}}{0,0100 \text{ kg}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,25 \text{ m}} \approx 780 \text{ m/s}.$$

16-13.

$m_A = 80 \text{ kg}$, $v_A = 5,0 \text{ m/s}$, $m_B = 320 \text{ kg}$, $v_B = 0$.



Törmäyksessä liikemäärä säilyy, joten $m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B = m_A \bar{u}_A + m_B \bar{u}_B$. Koska vaunu B on levossa ennen törmäystä, liikemäärän säilymlaki saa muodon $m_A \bar{v}_A + \bar{0} = m_A \bar{u}_A + m_B \bar{u}_B$.

Valitaan vaunun A suunta ennen törmäystä positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$$m_A v_A = m_A (-u_A) + m_B u_B.$$

Vaunun B nopeudeksi saadaan

$$u_B = \frac{m_A v_A - m_A (-u_A)}{m_B} = \frac{80 \text{ kg} \cdot 5,0 \text{ m/s} - 80 \text{ kg} \cdot (-1,45 \text{ m/s})}{320 \text{ kg}} = 1,61250 \text{ m/s}.$$

Koska vierimisvastus on pieni, mekaaninen energia säilyy törmäyksen jälkeen.

Vaunun B liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi:

$$\frac{1}{2} m_B u_B^2 = m_B g h.$$

Ylätasanteen suurin korkeus on

$$h = \frac{u_B^2}{2g} = \frac{(1,6125 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 0,13 \text{ m}.$$

16-14.

$m_1 = 75 \text{ kg}$, $m_2 = 53 \text{ kg}$, $E = 41 \text{ J}$, $\mu = 0,020$

- a) Kun luistelija (massa m_1) työntää pariaan (massa m_2), he erkanevat ja liikkuvat vastakkaisiin suuntiin. Tapahtumassa kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2$. Aluksi liikemäärä

16 Liikemäärä säilyy törmäyksissä

on nolla, joten $\vec{0} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$. Kun luistelijan 1 liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan

skalaariyhtälö $0 = m_1 u_1 - m_2 u_2$, josta luistelijan 1 nopeus on $u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1}$.

Kitkan ja ilmanvastuksen tekemä työ on työnnön aikana pieni työnnössä vaikuttaviin voimiin verrattuna, joten se voidaan jättää huomiotta.

Työntöön käytetty energia $E = 41 \text{ J}$ muuntuu luistelijoiden liike-energiaksi eli

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = E.$$

Sijoitetaan tähän luistelijan 1 nopeus $u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1}$:

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 u_2}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = E.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{m_2^2}{m_1} u_2^2 + m_2 u_2^2 = 2E,$$

josta luistelijan 2 nopeus on

$$u_2 = \sqrt{\frac{2E}{\frac{m_2^2}{m_1} + m_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 41 \text{ J}}{\frac{(53 \text{ kg})^2}{75 \text{ kg}} + 53 \text{ kg}}} = 0,952126 \text{ m/s} \approx 0,95 \text{ m/s}.$$

Luistelijan 1 nopeus on

$$u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1} = \frac{53 \text{ kg} \cdot 0,952126 \text{ m/s}}{75 \text{ kg}} = 0,672836 \text{ m/s} \approx 0,67 \text{ m/s} \text{ vastakkaiseen suuntaan.}$$

- b) Työ-energiaperiaatteen mukaan kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin liike-energian muutos eli $W = \Delta E_k$. Luistelijoiden liike-energia kuluu kitkatyöhön. Luisteliija 2 liukuu matkan s , jolloin työ-energiaperiaatteen mukaan on

$$F_{\mu 2} s = \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Kun kitkavoima $F_{\mu 2} = \mu N = \mu m_2 g$ sijoitetaan yhtälöön $F_{\mu 2} s = \frac{1}{2} m_2 u_2^2$,

yhtälö tulee muotoon $\mu m_2 g s = \frac{1}{2} m_2 u_2^2$.

Luistelijan 2 liukuma matka on

$$s = \frac{u_2^2}{2\mu g} = \frac{(0,952126 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0,020 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 2,3 \text{ m}.$$

Vastaavalla tavalla ratkaistaan luistelijan 1 liukuma matka, joka on

$$s = \frac{u_1^2}{2\mu g} = \frac{(0,672836 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0,020 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 1,2 \text{ m}.$$