

- 1.1. Siima kestää ja kala kokee kiihtyvyyden kalastajoon päin.
- 1.2.  $5,1 \text{ kg}$
- 1.3. vastustoa kappaleen liikkeelle lähtemisestä
- 1.4. nopeus kasvaa aluksi kiihtyvyydellä  $9,81 \text{ m/s}^2$ , mutta kiihtyvyys pienenee melko nopeasti kohti nollaa.
- 1.5. väliaineen tiheydestä, kappaleen upotuksessa olevan osan tilavuudesta ja putoamiskiihtyvyydestä.
- 1.6. kappaleen syrjäyttämän nesteen paino
- 1.7. liikemäärä säilyy
- 1.8. jatkaa tasaista liikettään tai pysyy levossa
- 1.9. kappaleen paino
- 1.10. tason pinnasta kohtisuoraan.

(/2p per kohta)

$$2.1. \quad a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{11 \text{ m/s} - 2,0 \text{ m/s}}{18 \text{ s}} = \underline{0,5 \text{ m/s}^2} \quad (4p)$$

Lukuarvo 2p  
pyöristys/ tarkkuus 1p

$$2.2. \quad \text{Työ } W = F \cdot s = 205 \text{ N} \cdot 2,0 \text{ m} = \underline{410 \text{ J}} \quad (2p)$$

Yksikkö 1p

$$\text{Teho } P = \frac{W}{t} = \frac{410 \text{ J}}{3,25} = 128,125 \text{ W} \approx \underline{130 \text{ W}} \quad (2p)$$

$$2.3. \quad \text{Paino } G = mg = 2,8 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 27,468 \text{ N} \approx \underline{27 \text{ N}} \quad (2p)$$

$$\begin{aligned} \text{Noste } N &= \rho_{\text{VESI}} \cdot V_g = \rho_{\text{VESI}} \cdot \frac{m}{\rho_{\text{KIIVI}}} \cdot g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{2,8 \text{ kg}}{2670 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= 10,287 \dots \text{ N} \approx \underline{10 \text{ N}} \quad (2p) \end{aligned}$$

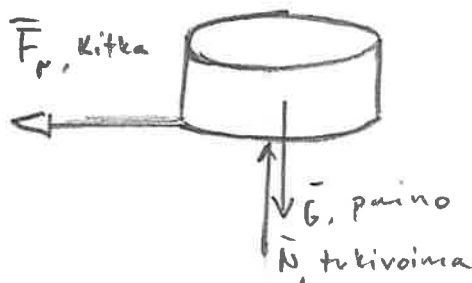
$$2.4. \quad \text{Liikemäärä } p = mv = 1250 \text{ kg} \cdot (55 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 19097,22 \dots \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \approx \underline{19000 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}}$$



Liiketilavektorit 1p

Voimavektorit + nimet 3p

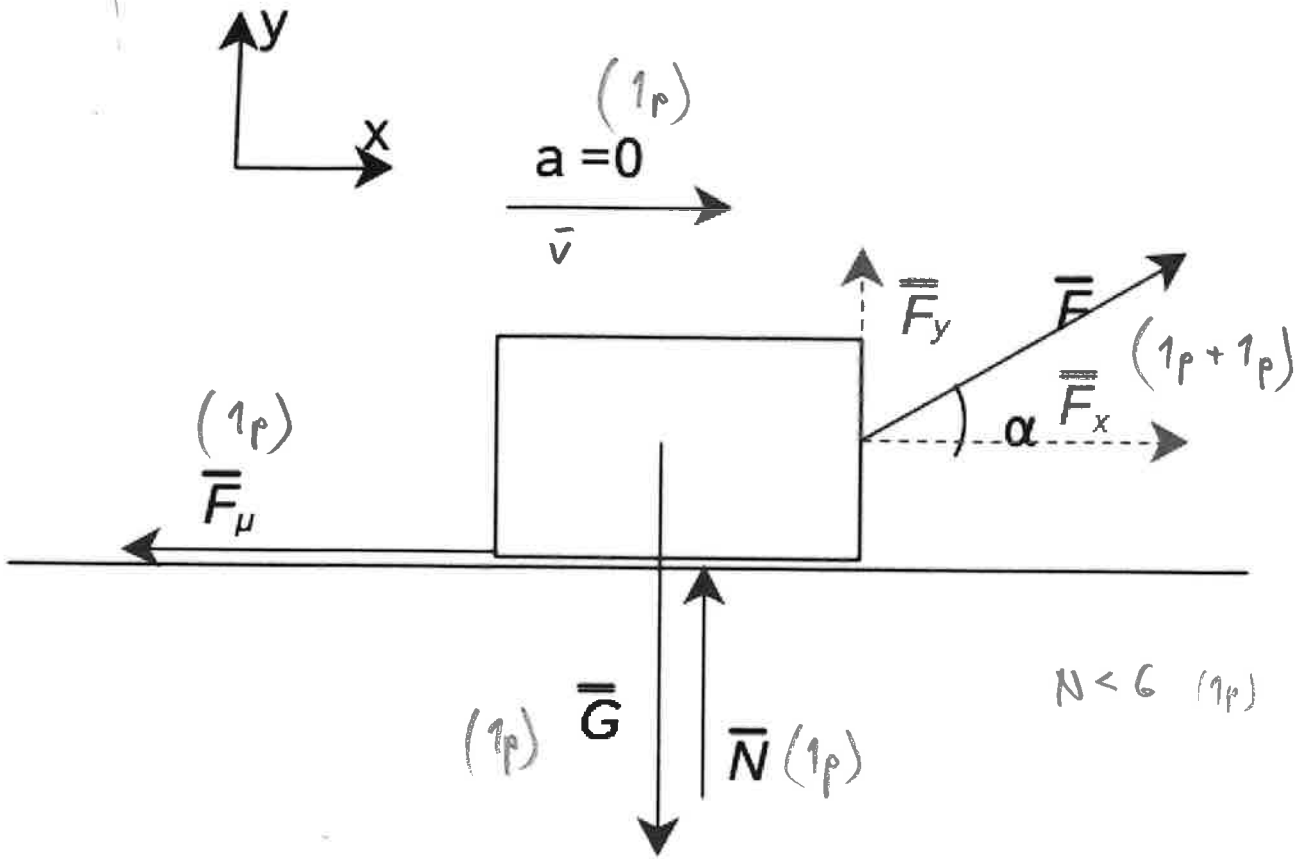
2.5.



### 3. A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

3.1) 1. Piirrä tilanteesta voimakuvio. Myös voimien vektorikomponenttien tulee näkyä kuvassa, jos niitä tarvitaan laskelmissa.

RATKAISU



F = voima jolla kelkkaa vedetään. Voidaan myös nimetä T:nä

$F_\mu$  = kitkavoima

G = painovoima

N = tukivoima

#### PISTEYTYS

- yksi piste per voimavektori

2. Määritä kelkkaan vaikuttava kitkavoima.

#### RATKAISU

$$F_\mu = ?$$

$$F = 150 \text{ N}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Liikkeen suunnassa: Newtonin toinen laki:  $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  ja  $a = 0$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_\mu$$

$$F_x - F_\mu = 0$$

$$F_\mu = F_x$$

$$F_\mu = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_\mu = 150 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ = 129,9 \text{ N} \approx 130 \text{ N}$$

#### PISTEYTYS

- Newtonin toinen laki mainittu 1 p.

- voimat liikkeen suunnassa oikein 2 p.

-  $F_x$  voima oikein 1 p.

- oikea vastaus 1 p.

3.3) 3. Määritä kelkan ja lumen välinen kitkakerroin.

#### RATKAISU

$$\mu = ? \quad m = 35 \text{ kg} \quad F_y = F \cdot \sin(30^\circ)$$

$$F_\mu = \mu \cdot N \Leftrightarrow \mu = \frac{F_\mu}{N}$$

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_y = \vec{0}$$

$$N + F_y - G = 0$$

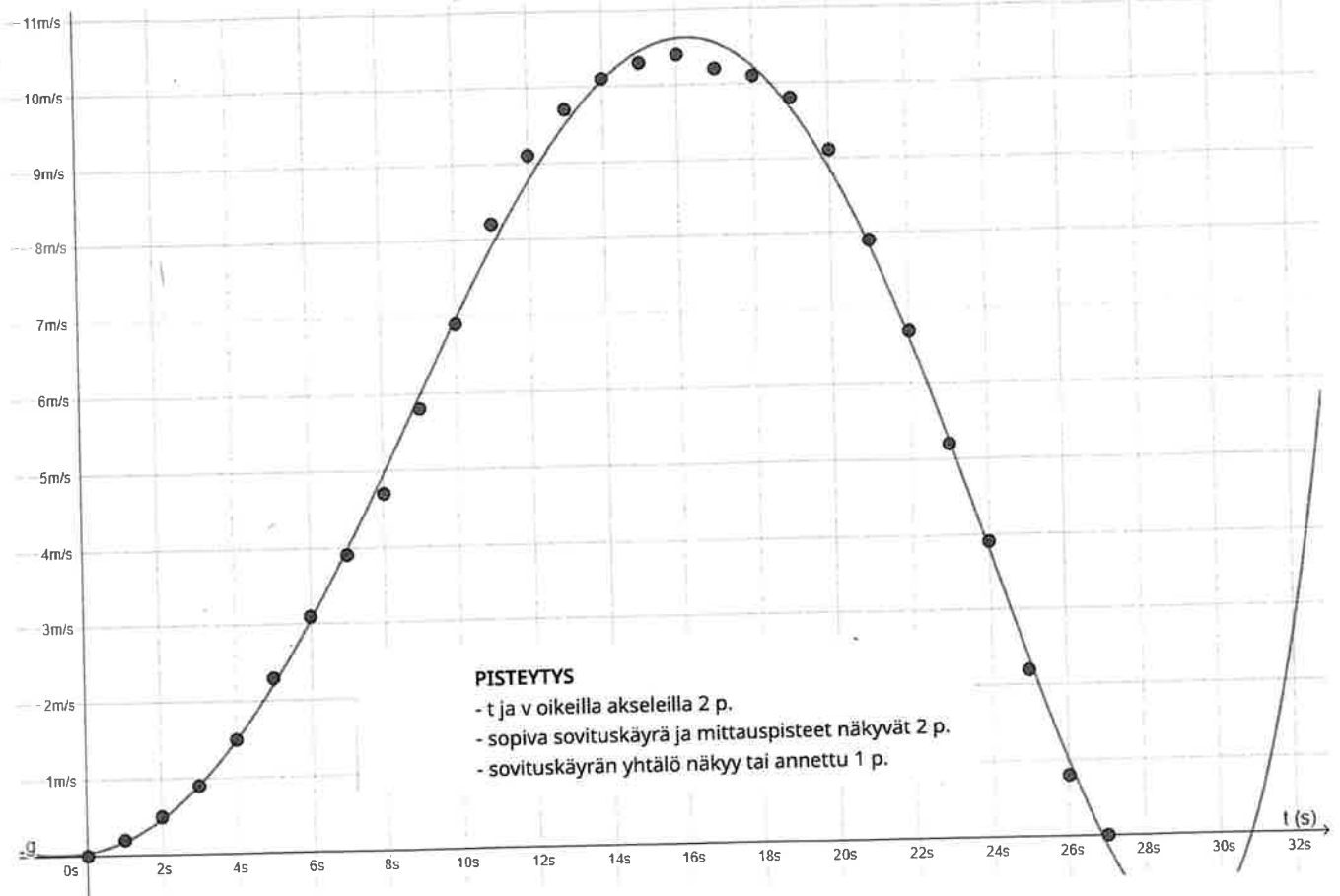
$$N = G - F_y$$

$$\mu = \frac{F_\mu}{N} = \frac{F_x}{N} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{G - F_y}$$

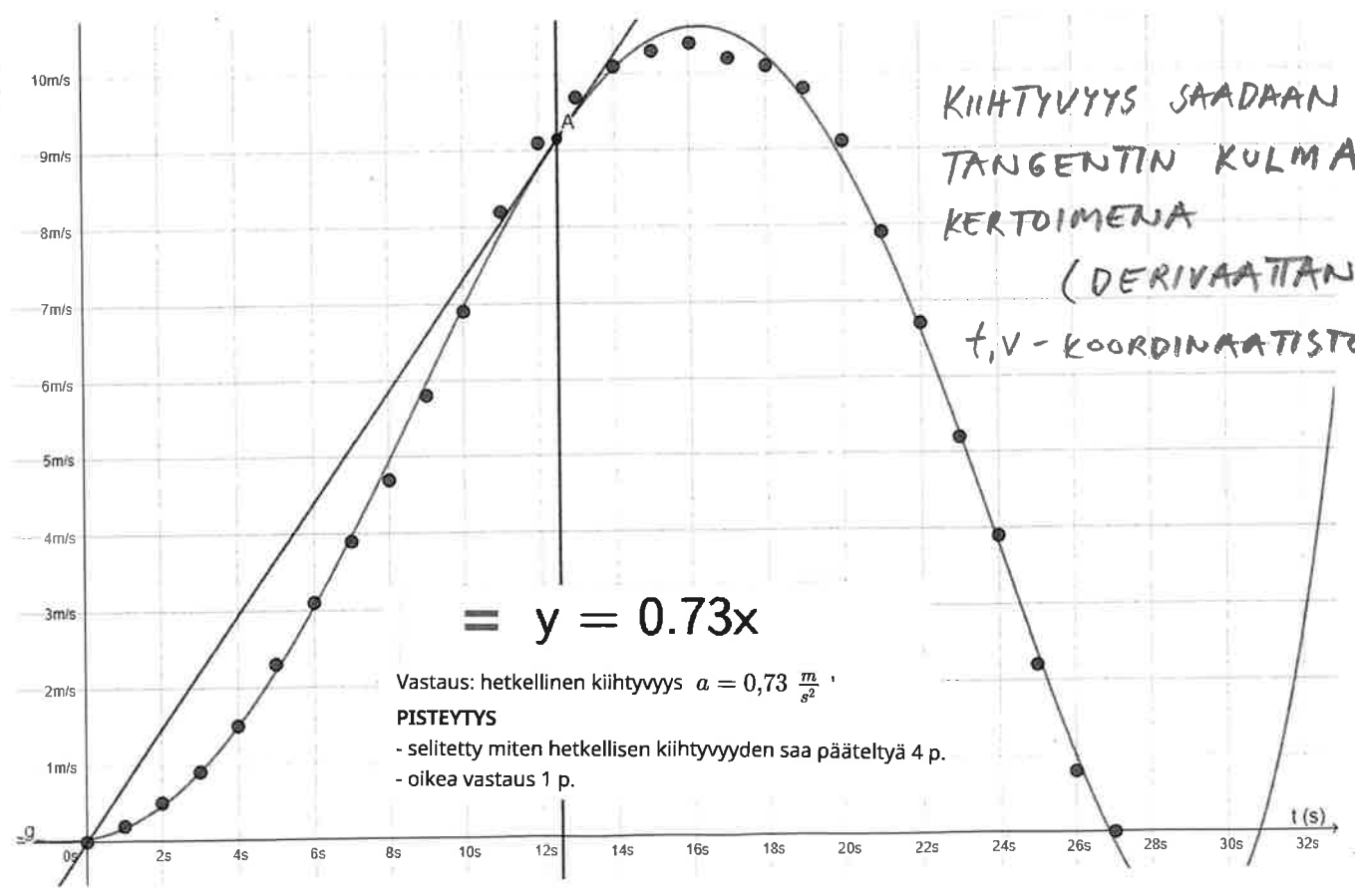
$$\mu = \frac{150 \text{ N} \cdot \cos(30^\circ)}{35 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 150 \text{ N} \cdot \sin(30^\circ)}$$

$$\mu = 0,484 \approx 0,48$$

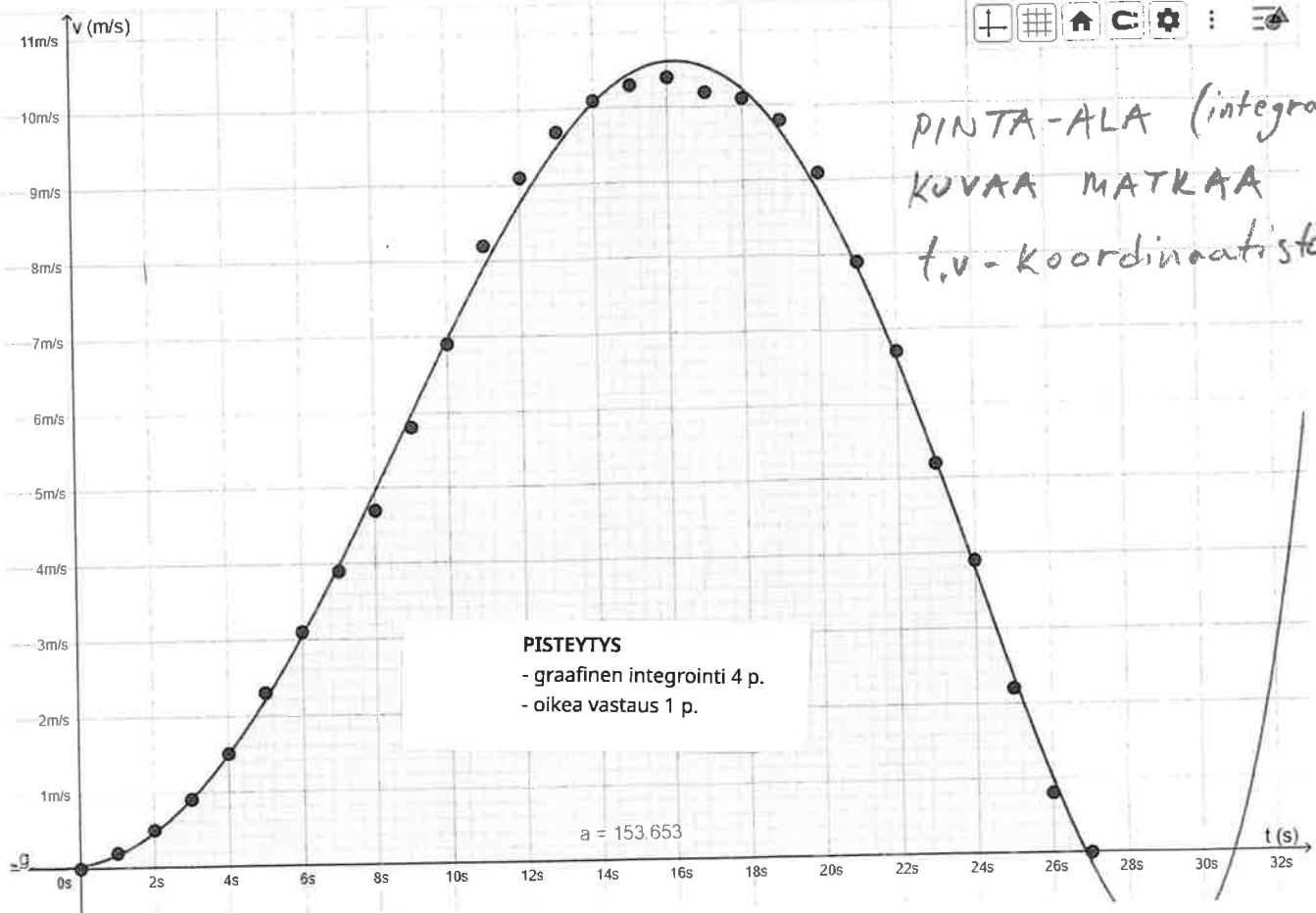
4.1)



4.2)



4.3)



Pinta-ala on 153,65 m eli pyöristettynä 150 metriä

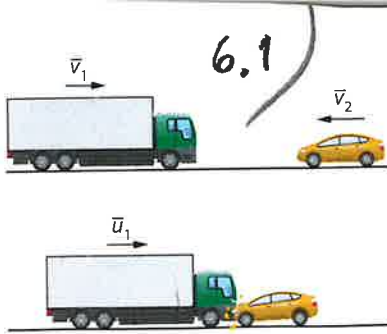
5)

$h = 66 \text{ m}, v_a = 0 \text{ m/s}, v_1 = 101 \text{ km/h}, m = 71 \text{ kg}, g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Hyppääjä lähtee levosta, jolloin hänen liike-energiansa alussa on nolla. Asetetaan potentiaalienergian nollassa hyppyrin nokalle. Mekaniikan energiaperiaate  $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$  saa muodon

$mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$ , jossa  $W$  on liikevastusvoimien tekemä työ liu'un aikana. Tästä saadaan liikevastusvoimien tekemäksi työkseksi

$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh = \frac{1}{2} \cdot 71 \text{ kg} \cdot \left(\frac{101 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2 - 71 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 66 \text{ m} \approx -18 \text{ kJ}.$$



### Ratkaisu

$$m_1 = 21\,500 \text{ kg}, m_2 = 980 \text{ kg},$$

$$v_1 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}, v_2 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}, \Delta t = 50 \text{ ms}$$

Törmäyksessä vaikuttavaa kitkaa ei oteta huomioon, joten törmäystä voidaan tarkastella kahden kappaleen vuorovaikutuksena, eli systeemiä voidaan pitää liikkeen kannalta eristettynä.

Liikemäärän säilymislain mukaan  $m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = (m_1 + m_2) \bar{u}$ , jossa  $\bar{u}$  on autojen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen. Sovitaan kuorma-auton nopeuden suunta positiiviseksi. Silloin henkilöauton nopeuden suunta on ennen törmäystä negatiivinen, joten saadaan skalaariyhtälö  $m_1 v_1 + m_2 (-v_2) = (m_1 + m_2) u$ .

Kuorma-auton ja henkilöauton yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 (-v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{21\,500 \text{ kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 980 \text{ kg} \cdot (-30 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{21\,500 \text{ kg} + 980 \text{ kg}}$$

$$= 17,8203 \text{ m/s} \approx 64 \text{ km/h.}$$

Autot liikkuvat välittömästi törmäyksen jälkeen kuorma-auton alkuperäiseen kulkusuuntaan nopeudella 64 km/h.

Henkilöauton nopeuden muutoksen suuruus on

$$|\Delta v_{\text{ha}}| = |17,8203 \text{ m/s} - (-30 \text{ m/s})| = 47,8203 \text{ m/s} (\approx 170 \text{ km/h}),$$

ja kuorma-auton nopeuden muutoksen suuruus on

$$|\Delta v_{\text{ka}}| = |17,8203 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}| = 2,1797 \text{ m/s} (\approx 8 \text{ km/h}).$$

6.2

Tämän voi perustella myös impulssi-periaatteella

$$I = \Delta P$$

$$F \Delta t = m \Delta V$$

Henkilöautoon kohdistuva keskimääräinen voima aiheutuu kuorma-autosta, ja sen suuruus on

$$F_{\text{ha}} = m_{\text{ha}} \cdot a_{\text{ha}} = m_{\text{ha}} \cdot \frac{\Delta v_{\text{ha}}}{\Delta t} = 980 \text{ kg} \cdot \frac{47,8203 \text{ m/s}}{0,050 \text{ s}} \approx 940 \text{ kN.}$$

Voiman suunta on henkilöautoon päin. Kuorma-autoon kohdistuva keskimääräinen voima aiheutuu henkilöautosta, ja sen suuruus on Newtonin III lain mukaan yhtä suuri kuin edellä laskettu 940 kN. Voiman suunta on kuorma-autoon päin.

6.3

Koska kumpaankin autoon kohdistuva voima on yhtä suuri, Newtonin II lain mukaan kevyemmän auton nopeuden muutos on suurempi kuin raskaamman auton. Jos oletetaan kummankin auton matkustajat samanmassaisiksi, henkilöauton matkustajaan kohdistuu Newtonin II lain mukaan suurempi voima kuin raskaamman auton matkustajaan.

Pallon paino:  $G = mg$

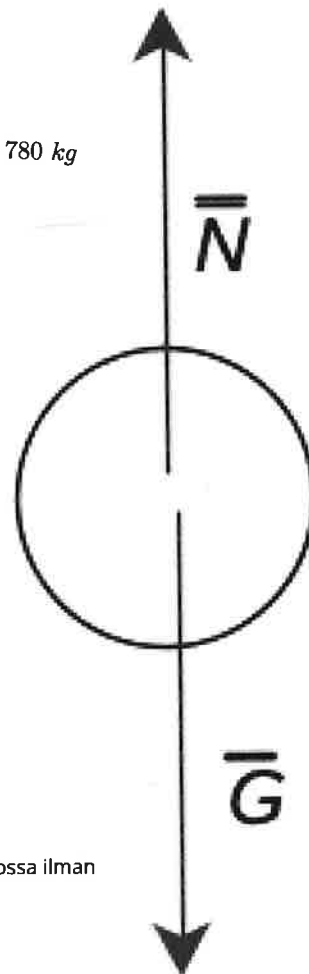
7)

RATKAISU

$\rho(\text{ilma, ulkona}) = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad m(\text{pallon omapaino}) = 780 \text{ kg}$

$\rho(\text{pallossa}) = ?$

(VOIMAKUVIO 3p)



Noste ja pallon paino tulee olla tasapainossa. Eli juuri siinä rajalla että pallo nousisi ylöspäin.

Nostovoima N lasketaan ulkoilman tiheydestä.

Pallon painovoima G tulee pallon omasta massasta, ilman sisäilman painoa.

Tämän lisäksi tulee huomioida lämmitetyn ilman paino pallon sisällä.

$\bar{N} + \bar{G}(\text{pallon paino}) + \bar{G}(\text{ilman paino}) = \bar{0}$

$N - G(p.p) - G(i.p.) = 0$

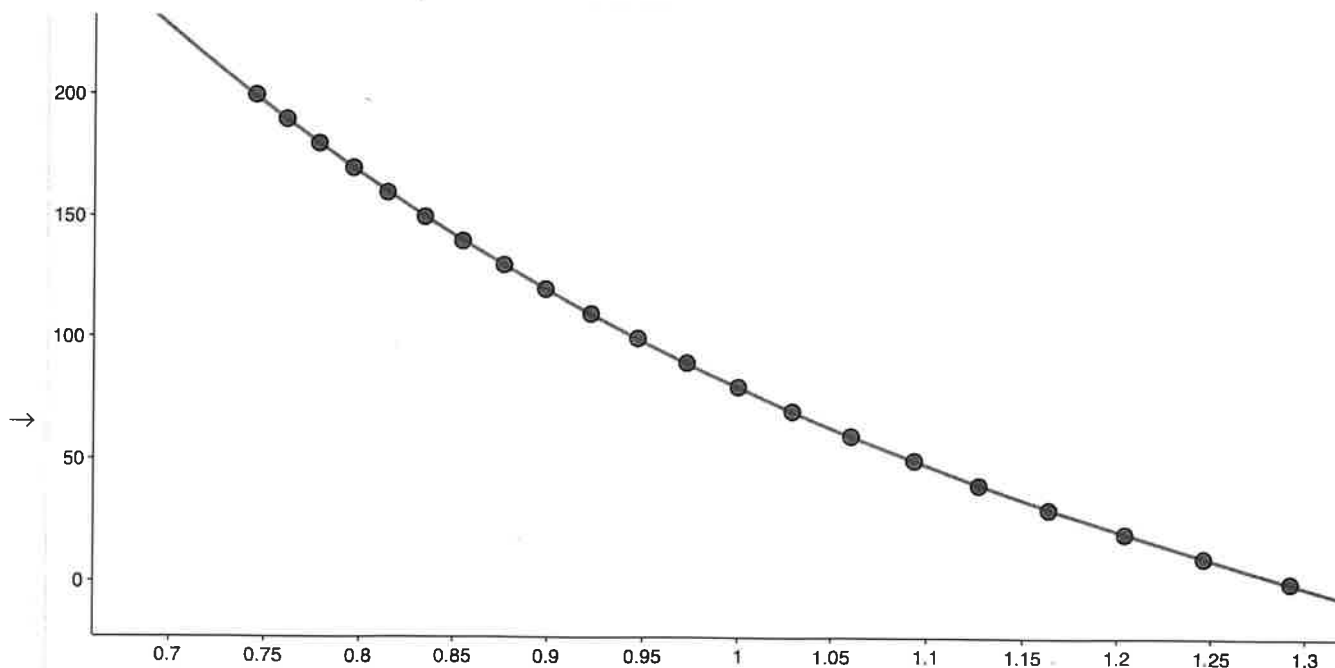
$\rho(\text{ilma ulkona}) \cdot V \cdot g - m(\text{pallon omapaino}) \cdot g - \rho(\text{lämmitetty ilma}) \cdot V \cdot g = 0 \quad || : g$

$\rho(\text{ilma ulkona}) \cdot V - m(\text{pallon omapaino}) - \rho(\text{lämmitetty ilma}) \cdot V = 0$

$\rho(\text{lämmitetty ilma}) = \frac{\rho(\text{ilma ulkona}) \cdot V - m(\text{pallon omapaino})}{V}$

$\rho(\text{lämmitetty ilma}) = \frac{1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2800 \text{ m}^3 - 780 \text{ kg}}{2800 \text{ m}^3} = 1,011428... \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 1,01 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  Piirretään kuvaaja mittaustiedoista jossa ilman

lämpötila annetaan eri tiheyksistä.



X: A1:A21

Regression Model

$y = -334.2848 x^3 + 1370.676 x^2 - 2092.0244 x + 1135.4882$

Polynomial 3

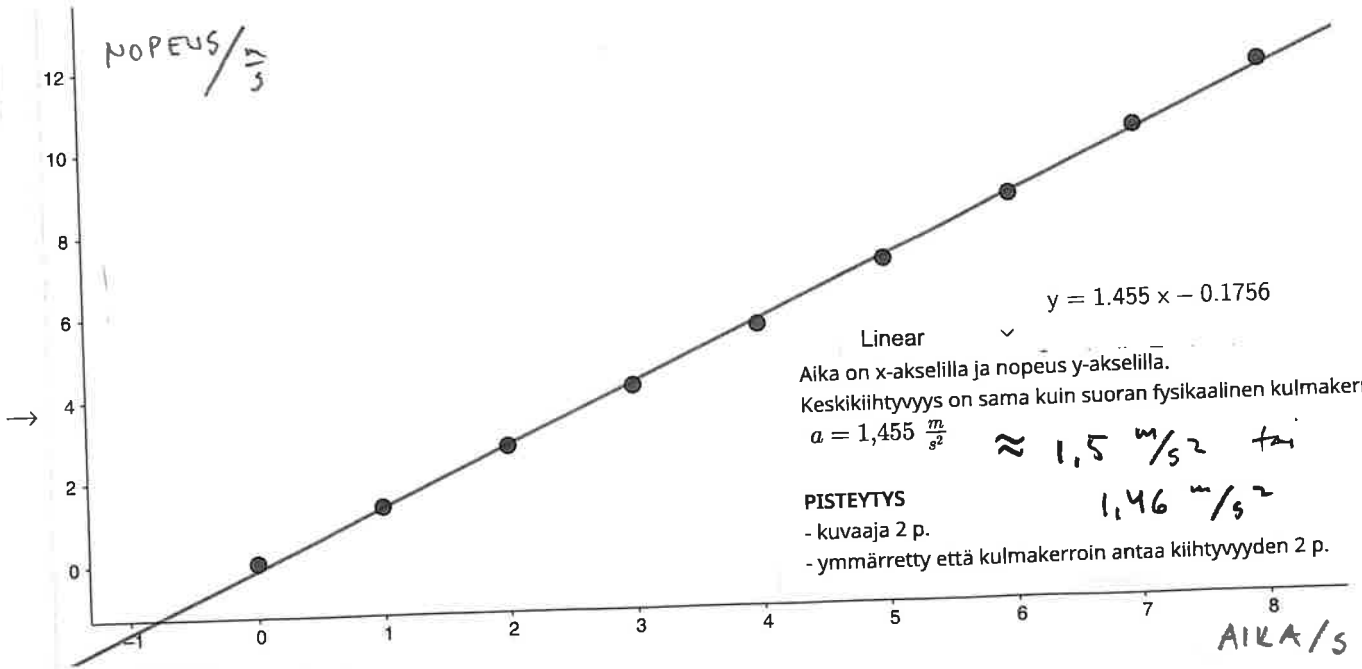
Symbolic Evaluation:  $x = 1.0114 \quad y = 75.872$

Syötetään Geogebraan saatu tiheys jotta saadaan lämpötila.

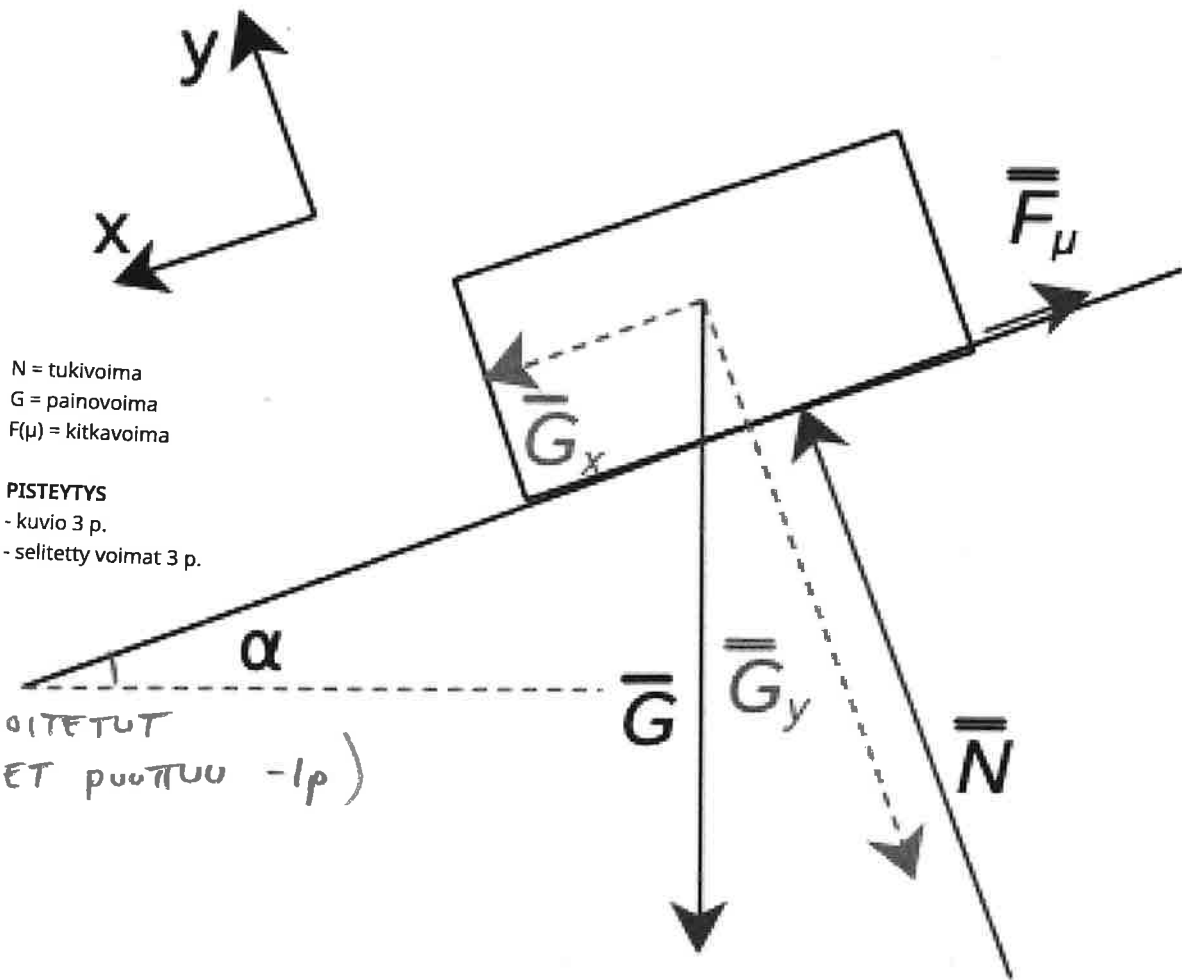
Ohjelman mukaan laskettu tiheys antaisi lämpötilaksi 75, 87 celsiusastetta eli noin 76 astetta.

Vastaus: 76 °C

8.1)



8.2)



8.3)

RATKAISU

$$\mu = ?$$

$$G_x = G \cdot \sin \alpha$$

$$G_y = G \cdot \cos \alpha \quad F_\mu = \mu \cdot N \quad N = G_y \quad \text{Liikkeen suunnassa: } \Sigma \vec{F} = \vec{G}_x + \vec{F}_\mu \quad \text{Kiihtyvä liike, käytetään Newtonin toista lakia:}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad G_x - F_\mu = ma$$

$$F_\mu = G \cdot \sin \alpha - ma \quad \mu = \frac{F_\mu}{N} = \frac{G \cdot \sin \alpha - ma}{G \cdot \cos \alpha}$$

$$\mu = \frac{2,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(35^\circ) - 2,0 \text{ kg} \cdot 1,455 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos(35^\circ)} = 0,519145\dots$$

$$\mu \approx 0,52$$

PISTEYTYS

- G(x)- ja G(y)-voimille yhtälöt 2 p.
- kitkavoimalle yhtälö 1 p.
- tukivoima ja G(y) yhtä isot 1 p.
- voimat liikkeen suunnassa 1 p.
- Newtonin toinen laki mainittu 2 p.
- kitkakertoimelle yhtälö 2 p.
- oikea vastaus 1 p.